UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

BINDING LIST JAN 1 5 1926

A.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

Math.
J.

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUBLIÉ DE 1875 A 1884 PAR H. RESAL,
ET DE 1885 A 1921 PAR CAMILLE JORDAN

NEUVIÈME SÉRIE

PUBLIÉE

Par HENRI VILLAT

AVEC LA COLLABORATION DE
R. DE MONTESSUS DE BALLORE, E. PICARD.

TOME PREMIER — ANNÉE 1922

(87e Volume de la Collection.)

200821
24.2.26

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1922

GN
F63a
v.7
c.2

CAMILLE JORDAN

1838-1922.

Cliche Pirou.

CAMILLE JORDAN

Les premiers jours de 1922 auront apporté au *Journal de Mathématiques* un deuil irréparable : Camille Jordan nous a été enlevé, pendant la nuit du 20 au 21 janvier, par un subit arrêt du cœur, dans la plénitude de ses facultés. Il est juste qu'aujourd'hui les premières pages de ce Journal, — où il a mis tant de lui-même, et où sa mémoire restera fidèlement respectée, — retracent en quelques mots l'existence, d'un si haut exemple, de l'illustre mathématicien.

Jordan (Marie-Ennemond-Camille) est né le 5 janvier 1838, à la Croix-Rousse, commune depuis incorporée à Lyon. Il était le fils d'Alexandre Jordan, ingénieur des Ponts et Chaussées, depuis député à l'Assemblée nationale, et de Joséphine Puvis de Chavannes, sœur du peintre, petit-neveu de Camille Jordan, l'orateur et l'homme politique du Conseil des Cinq-Cents et de la Restauration.

Après de solides études au Collège d'Oullins et au Lycée de Lyon, il entre à l'École Polytechnique en 1855, il en sort dans le corps des Mines, et devient ingénieur des Mines à Privas, Chalon-sur-Saône, puis à Paris (1867). Entre temps, il soutient, en 1861, ses Thèses de Doctorat. 1873 le voit examinateur à l'École Polytechnique, où il devient professeur en 1876; il devait le demeurer jusqu'à sa retraite en 1912. Appelé au Collège de France pour suppléer A. Serret, il y reste professeur titulaire de 1883 à 1912 : ses cours dans ces deux grandes Écoles ont une juste célébrité.

Jordan a remplacé Chasles à l'Institut de France en 1881; il fut vice-président de l'Académie des Sciences en 1915, président en 1916. En 1885, il avait succédé à Résal dans la direction du *Journal de Mathématiques :* tous nos lecteurs connaissent l'œuvre qu'il y a accomplie.

Ses travaux mathématiques sont et resteront universellement connus. Voici en quels termes M. E. Picard, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, les caractérisait le 23 janvier dernier :

« Les recherches de C. Jordan ont eu tout particulièrement pour but d'approfondir la *théorie de l'ordre* au point de vue de la Géométrie pure et de l'Analyse. Au début de sa carrière, il s'est occupé des polyèdres dans un beau Mémoire consacré, en fait, à la Géométrie de situation, et dans un autre travail, il a donné la condition pour que deux surfaces ou portions de surfaces, flexibles et extensibles à volonté, soient applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature. Ses travaux sur la symétrie et sur les groupes de mouvement ont devancé les recherches modernes sur les groupes de transformations, et ont été utilisés par les théoriciens de la cristallographie. Ils portaient déjà la marque de la puissance d'esprit de leur auteur.

» Mais c'est surtout dans la théorie des substitutions et des équations algébriques que Jordan laisse une trace profonde. Dans un Ouvrage considérable sur *les Substitutions*, il a fait une étude approfondie des idées de Galois, en y ajoutant des résultats fondamentaux sur les groupes primitifs, les groupes transitifs et les groupes composés, dont un des plus importants est relatif aux facteurs de composition d'un groupe. Ces études ont permis à Jordan de résoudre un problème posé par Abel, celui de rechercher les équations de degré donné résolubles par radicaux et de reconnaître si une équation rentre ou non dans cette classe. D'autres travaux se rapportent aux formes algébriques et aux groupes linéaires d'ordre fini, ce qui l'a amené à étudier les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques.

» Plus récemment, Jordan a été un précurseur dans la théorie des fonctions de variables réelles. Il a introduit, dans cette partie de l'Analyse, la notion capitale de fonction à variable bornée. Non moins célèbres sont ses études sur les courbes, universellement désignées sous le nom de *courbes de Jordan*, qui séparent le plan en deux régions distinctes. On lui doit aussi d'importantes propositions sur la mesure des ensembles, qui ont ouvert la voie à bien des recherches modernes.

» Tous les travaux de Jordan dénotent une rare profondeur d'esprit et une extraordinaire puissance d'abstraction. Il se jouait au milieu des discussions les plus subtiles sur des concepts comme ceux

de *groupes* ou de *substitutions*, se plaisant à aborder les questions dans toute leur généralité, comme s'il craignait que quelque particularité l'empêchât de voir les vraies raisons des choses. Jordan a été vraiment un grand algébriste; les notions fondamentales qu'il a introduites en Analyse préserveront son nom de l'oubli. »

Jusqu'à ses derniers jours, son activité scientifique fut toujours intense : en 1920, au Congrès International des Mathématiciens, à Strasbourg, Congrès dont il avait été nommé par acclamation président d'honneur, il présentait encore un important Mémoire sur la classification des constellations. Ce travail aura été sans doute le dernier qu'il ait publié.

Outre ces profondes recherches, Jordan avait écrit des ouvrages d'enseignement supérieur : il n'est pas un mathématicien au monde qui n'ait étudié l'une des nombreuses éditions de son Traité d'Analyse, ouvrage admirable d'élégance et de clarté, où les vues nouvelles illuminent chaque page.

Toutes les Académies et Sociétés savantes du monde tinrent à honneur de compter Jordan parmi leurs membres; la liste de ces Sociétés remplirait une page de ce Journal! Tous les témoignages de sympathie et d'admiration affluaient vers lui, sans cependant provoquer aucun sentiment d'un orgueil qui aurait été de sa part bien légitime, mais auquel il fut toujours étranger. Sans aucune ambition autre que celle de la Science et de l'enseignement, c'est dans la vie intime de la famille, que l'illustre savant sut trouver le vrai et durable bonheur. Il s'était marié en 1862 avec Mlle Isabelle Munet, dont il eut huit enfants, six fils et deux filles; vingt-cinq petits-enfants et trois arrière-petits-fils étaient venus accroître cette grande et belle famille; le dernier né datait du 12 janvier 1922, et son heureuse naissance avait été une joie profonde pour Jordan. Cependant, des deuils cruels l'avaient atteint durement. Il avait vu disparaître une fille en 1912. D'autre part, on devine qu'à une telle famille, où le sentiment du devoir et le culte de la Patrie trouvaient un foyer nombreux et ardent, la guerre qui nous fut imposée devait faire payer un trop lourd tribut : trois fils et l'aîné de ses petits-fils sont tombés au champ d'honneur pour le triomphe de la liberté! Le capitaine d'artillerie Charles Jordan, tué en septembre 1914; le capitaine de zouaves Pierre Jordan,

en novembre de la même année; le sergent Louis Jordan, en juin 1915; l'aspirant Camille Jordan, en février 1916; tous les quatre dans des circonstances héroïques. En 1918, enfin, Jordan eut la douleur de perdre la compagne qui avait été l'âme de son foyer. Dans ses convictions religieuses, auxquelles il était depuis son enfance profondément attaché, il sut trouver un réconfort et un appui; il restait entouré de la chaude affection des siens, s'occupant d'ailleurs beaucoup des études de ses petits-enfants, ce que son érudition, étendue dans tous les domaines, lui rendait facile; ses lectures étaient innombrables, et même les classiques grecs et latins, dans le texte original, n'avaient pas de secrets pour lui.

Trop brièvement, j'ai dit ce qu'a été la vie admirable de Jordan. Ce que je n'ai pas dit, et ce dont tous ceux qui l'ont approché dans l'intimité pourront témoigner, c'est l'extrême délicatesse et l'infinie bonté avec laquelle il savait traiter ses amis. N'attachant pour lui-même qu'un prix médiocre aux honneurs, il ne s'épargnait nulle peine pour les faire obtenir, à leur insu, à ceux qu'il en estimait dignes; et ce trait, entre mille autres, explique la profondeur des affections qui s'étaient multipliées autour de lui.

Jusqu'en ses derniers jours, les destinées de son Journal, du « *Journal de Jordan* », comme la voix publique le dénomme justement, furent pour lui l'objet de constantes préoccupations. Il a suivi ardemment, et puissamment aidé, les efforts faits pour sauvegarder cette œuvre à laquelle il s'était tant et si longtemps consacré. Tous ceux qui lui ont apporté ici leur concours ont contribué à lui donner un témoignage de reconnaissance et de sympathie auquel il a été plus que sensible. Moins de huit jours avant sa mort, il me le redisait encore, en soulignant le prix qu'il y attachait. C'est donc en croyant servir sa mémoire que nous chercherons à conserver au *Journal de Mathématiques* le renom illustre qu'il avait su lui assurer.

Henri Villat.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sugli ideali primarii assoluti in un corpo algebrico;

PER LUIGI BIANCHI.

(Pise.)

1. Sia definito un corpo algebrico $k(\theta)$ di grado n, mediante un suo numero intero generatore θ, radice di un' equazione irriducibile

$$(A) \qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

con primo coefficiente $a_0 = 1$, e gli altri razionali interi.

Un qualunque ideale A del corpo contiene infiniti numeri razionali (interi), tutti multipli del più piccolo di essi, e fra questi numeri vi è sempre la *norma* NA dell' ideale. Diremo che l'ideale A è *primario assoluto* [1], quando NA coïncide col più piccolo numero razionale

[1] In generale si dice primario un ideale quando nessun numero naturale > 1 divide tutti i suoi numeri. Se NA è il più piccolo razionale in A, l'ideale è certamente primario; ma non sussiste la proprietà inversa, salvo nel caso dei corpi quadratici, ove *qualunque ideale primario è anche assoluto.*

in A. Osserviamo subito che, fra gli ideali primarii assoluti, si trovano tutti gli ideali primi P di *primo grado*, perchè allora $NP = p$ dove p è il numero primo naturale coordinato a P, ed è al tempo stesso il più piccolo numero razionale in P. Si vedrà poi (n° 3) che ogni ideale primario assoluto, decomposto in ideali primi, dà luogo a soli ideali primi di primo grado.

In questa nota vogliamo ricercare gli ideali primarii assoluti A di $k(\theta)$, la cui norma eguaglia un intero positivo fissato m

$$NA = m.$$

Per questa, come per tutte le ricerche che concernono la costruzione di ideali in $k(\theta)$, è essenziale ricorrere alle *costanti* di *composizione* di una base intera *minima* del corpo

$$[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n], \tag{1}$$

sicchè ogni altro intero ω di $k(\theta)$ si ottiene, in modo univoco, dalla formola

$$\omega = h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_n\omega_n, \tag{2}$$

dove i coefficienti h_i sono razionali interi. In particolare si pongono sotto la forma (2) gli $\frac{n(n+1)}{2}$ prodotti $\omega_i\omega_k$ di due elementi qualunque (diversi od eguali) della base (1), e noi scriveremo le corrispondenti formole così

$$\omega_i\omega_k = \sum_{l=1}^{l=n} \gamma_{ik}^{l}\,\omega_l. \tag{I}$$

Questi $\frac{n^2(n+1)}{2}$ numeri *razionali interi* γ_{ik}^{l} si diranno appunto le costanti di composizione della base (1)(¹).

In generale, assegnata la base (1), per trovare un *qualunque*

(¹) Osservo qui incidentalmente che le costanti γ_{ik}^{l} si possono opportunamente indicare coi *simboli a tre indici* $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ di Christoffel nella teoria delle forme differenziali quadratiche, per la ragione seguente. Esiste, nello spazio *Euclideo* S_n a n dimensioni, un conveniente sistema di coordinate curvilinee

ideale A di norma data

$$\mathrm{NA} = m,$$

se ne cercherà una base

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n],$$

che si potrà esprimere sotto la forma *ridotta*

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = a_1\ \omega_1, \\ \alpha_2 = a_{21}\,\omega_1 + a_2\ \omega_2, \\ \alpha_3 = a_{31}\,\omega_1 + a_{32}\,\omega_2 + a_3\,\omega_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = a_{n1}\,\omega_1 + a_{n2}\,\omega_2 + \ldots + a_{n,n-1}\,\omega_{n-1} + a_n\,\omega_n. \end{cases}$$

I coefficienti a_i, a_{ik} della sostituzione lineare a destra sono tutti interi razionali; quelli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ della diagonale principale *positivi*, con prodotto eguale alla norma assegnata

$$(4) \qquad a_1 a_2 \ldots a_n = m,$$

mentre i secondarii in ciascuna colonna nella i^{ma} per esempio

$$(5) \qquad a_{i+1,i},\quad a_{i+2,i},\quad \ldots,\quad a_{n,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1),$$

$(u_1, u_2, \ldots u_n)$, per le quali il ds^2 dello spazio S_n

$$ds^2 = \Sigma\, b_{ik}(u)\, du_i\, du_k$$

ha una tale forma che i simboli a tre indici $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ risultano *costanti*, precisamente $= \gamma_{ik}^{(l)}$. Se con $x_1, x_2, \ldots, x_n$ indichiamo coordinate Cartesiane in S_n, ciascuna di queste soddisfa al sistema, completamente integrabile, di equazioni alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\, \partial u_k} = \sum_l \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u_i}\, \frac{\partial x}{\partial u_k}.$$

Oltre la $x =$ cost. se ne hanno subito le altre n soluzioni indipendenti

$$x_r = e^{\omega_1^{(r)} u_1 + \omega_2^{(r)} u_2 + \ldots + \omega_n^{(r)} u_n} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

dove $[\omega_1^{(r)}, \omega_2^{(r)}, \ldots, \omega_n^{(r)}]$ sono le n basi degli n corpi coniugati. Pel Jacobiano $\mathrm{I}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ si ha subito

$$\mathrm{I}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\, x_2 \ldots x_n \sqrt{(\mathrm{D})},$$

dove D è il numero fondamentale del corpo, e questo Jacobiano è in effetto $\neq 0$.

possono surrogarsi ciascuno con un qualunque numero congruo $(\text{mod}\, a_i)$. Se questi coefficienti soddisferanno alle condizioni perchè $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ sia l'effettiva base di un ideale, questo sarà perfettamente determinato dai valori scelti per $a_1, a_2, \ldots, a_n$, e dai minimi resti positivi $(\text{mod}\, a_i)$ dei numeri (5).

La base (1) del corpo può variarsi in infiniti modi, assoggettandola ad una arbitraria sostituzione *aritmetica* unimodulare. Per lo scopo nostro conviene sceglierla (come sempre è possibile) in guisa che fra in numeri della base (1) figuri il n° **1**, e sia per esempio $\omega_1 = 1$. In tal caso, nelle formole (I) quelle costanti di composizione γ_{ik}^l che hanno $k = 1$ $(0, i = 1)$ presentano i valori

$$(6) \qquad \begin{cases} \gamma_{i1}^l = 0 & \text{per} \quad i \neq l, \\ \gamma_{i1}^l = 1 & \text{per} \quad i = l. \end{cases}$$

Con questa scelta $[1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n]$ della base, nello schema dei coefficienti della (3)

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

il primo elemento a_1 in diagonale dà il minimo numero razionale contenuto nell' ideale e gli altri $a_2, a_3, \ldots, a_n$ sono tutti divisori di a_1.

2. Scelta la base in quest' ultimo modo più semplice $(\omega_1 = 1)$, vogliasi costruire un ideale primario assoluto A; con $NA = m$. Per quanto ora si è detto, dovremo avere nello schema (7) $a_1 = m$, indi per la (4)

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 1,$$

e tutti gli elementi secondarii nella 2^a, 3^a, ..., $(n-1)^{ma}$ colonna, ridotti mod 1, potranno rendersi $= 0$. Scriveremo lo schema sotto la forma

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \xi_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\xi_3 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_n & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

dove $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ saranno numeri razionali interi presi $(\mathrm{mod}\, m)$. La base dell' ideale A avrà pertanto la forma

$$(8) \qquad A = [m, \omega_2 - \xi_2, \omega_3 - \xi_3, \ldots, \omega_n - \xi_n],$$

e saranno ora da ricercare le condizioni necessarie e sufficienti, a cui debbono soddisfare gli $n - 1$ numeri incogniti

$$\xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots, \quad \xi_n,$$

affinchè il *modulo* (8) sia un effettivo ideale. Per questo occorre e basta che ciascuno degli n elementi della base (8), moltiplicato per un qualunque ω_h, dia un numero del modulo (8), cioè si ponga sotto la forma

$$m x_1 + \sum_{l=2}^{l=n} (\omega_l - \xi_l) x_l,$$

essendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ convenienti numeri razionali interi, che scriviamo anche

$$(9) \qquad m x_1 - \sum_{l=2}^{l=n} \xi_l x_l + \sum_{l=2}^{l=n} x_l \omega_l.$$

Pel moltiplicatore $\omega_1 = 1$ questo non implica condizione alcuna, e mèdesimamente pei prodotti

$$m \omega_k = m \xi_k + m(\omega_k - \xi_k),$$

onde bastera esprimere che ogni prodotto

$$(\omega_i - \xi_i)\omega_k \quad \text{per} \quad i, k = 2, 3, \ldots, n$$

deve porsi sotto la forma (9).

Ma, per le formole (I) di composizione, abbiamo

$$(\omega_i - \xi_i)\omega_k = \sum_{l=1}^{l=n} \gamma_{ik}^{l} \omega_l - \xi_i \omega_k,$$

e nel confronto colla espressione (9), essendo $\omega_1 = 1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ indipendenti, dobbiamo eguagliare i coefficienti corrispondenti di cia-

scuna ω_l dalle due parti ($l = 1, 2, \ldots, n$); questo ci dà le relazioni

$$m x_1 = \sum_{l=2}^{l=n} \xi_l x_l + \gamma_{ik}^{(1)},$$

$$\begin{array}{lll} x_l = \gamma_{ik}^{l} & \text{per} \quad l \neq k & \\ x_k = \gamma_{ik}^{k} - \xi_i & (l = k) & (l \geqq 2). \end{array}$$

Se nella prima di queste sostituiamo per $x_2, x_3, \ldots, x_n$ i valori dati dalle ultime, rimangono, quali condizioni per le incognite $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$, le seguenti congruenze quadratiche rispetto al modulo m

$$(10) \qquad \xi_i \xi_k \equiv \gamma_{ik}^{1} + \sum_{l=2}^{l=n} \gamma_{ik}^{l} \xi_l \pmod{m}$$

$$(i, k = 2, 3, \ldots, n).$$

3. Da questa semplice analisi è già lecito intanto concludere:

Affinchè esistano ideali primarii assoluti A *con* $NA = m$, *è necessario e sufficiente che, nelle* $n - 1$ *incognite*

$$\xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots, \quad \xi_n,$$

ammetta soluzioni il sistema delle $\frac{(n-1)n}{2}$ *congruenze quadratiche* (10). *Esisteranno tanti di questi ideali* A *quante soluzioni incongrue avrà il sistema* (10), *e per ogni soluzione si avrà dalla* (8) *il corrispondente ideale* A *espresso per la sua base.*

Di qui, senza ancora entrare nella discussione del sistema (10) (vedi numeri segmenti), possiamo subito dedurre alcune conseguenze notevoli.

Sia A un ideale primario assoluto con $NA = m$, e siano $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ i corrispondenti valori delle ξ, che soddisferanno alle (10). Prendiamo un qualunque divisore *puro* m_1 di m, sia $1 < m_1 < m$. I medesimi valori per $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ soddisferanno, *a fortiori*, le (10) scritte rispetto al modulo m_1, e quindi sarà

$$A_1 = [m_1, \omega_2 - \xi_2, \omega_3 - \xi_3, \ldots, \omega_n - \xi_n]$$

un altro ideale primario assoluto, che avrà

$$NA_1 = m_1.$$

I numeri della base (8) di A sono tutti contenuti in A_1, gli ultimi $n-1$ come comuni, il primo m come multiplo di m_1; dunque A è contenuto in A_1, ossia divisibile per A_1. Ma ora se

$$m = m_1 m_2,$$

per la ragione stessa anche l'ideale

$$A_2 = [m_2, \omega_2 - \xi_2, \ldots, \omega_n - \xi_n]$$

è primario assoluto ed è divisore di A. Precisamente dimostriamo che si ha

$$A = A_1 A_2,$$

osservando in primo luogo che i due ideali a sinistra e a destra hanno egual norma

$$NA = m, \qquad N(A_1 A_2) = NA_1 \, NA_2 = m_1 m_2.$$

In secondo luogo poi il prodotto $A_1 A_2$ è generato dagli n^2 numeri

$$m_1 m_2 = m, \qquad m_1(\omega_i - \xi_i), \qquad m_2(\omega_i - \xi_i), \qquad (\omega_i - \xi_i)(\omega_k - \xi_k),$$

che sono tutti contenuti in A, ed è per ciò $A_1 A_2$ divisibile per A; ma, avendo la stessa norma, coincide con A.

Applicando ripetutamente questo risultato, si vede che in generale:

Se la norma m dell' ideale primario assoluto

$$A = [m, \omega_2 - \xi_2, \ldots, \omega_n - \xi_n)$$

si scinde, in un qualunque modo, nel prodotto di r fattori

$$m = m_1 m_2 \ldots m_r,$$

corrispondentemente l'ideale A *si può scindere nel prodotto degli r ideali primarii assoluti* $A_1, A_2, \ldots, A_r$, *di rispettive norme* $m_1, m_2, \ldots, m_r$

$$A = A_1 A_2 \ldots A_r,$$

dove

$$A_i = [m_i, \omega_2 - \xi_2, \ldots, \omega_n - \xi_n].$$

In particolare, se si scinde m nei suoi fattori primi diversi p_1, $p_2, \ldots, p_s$, colla formola

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s},$$

si ha immediatamente l'ideale A decomposto in ideali primi di *primo grado*

$$P_i = [p_i, \omega_2 - \xi_2, \ldots, \omega_n - \xi_n] \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

colla formola corrispondente

$$A = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_s^{\alpha_s}.$$

Così è confermata l'asserzione al n° **1**.

4. I risultati ora ottenuti, rispetto alla decomposizione di un ideale primario assoluto nel prodotto di altri della stessa specie, possono in certo modo invertirsi, sotto la condizione che appare dall' enunciato seguente :

Se più ideali primarii assoluti hanno le norme prime fra loro due a due, anche il loro prodotto è un ideale primario assoluto.

Basterà dimostrare la proprietà per due tali ideali

$$A_1 = [m_1, \omega_2 - \xi_2^1, \omega_3 - \xi_3^1, \ldots, \omega_n - \xi_n^1],$$
$$A_2 = [m_2, \omega_2 - \xi_2^2, \omega_3 - \xi_3^2, \ldots, \omega_n - \xi_n^2],$$

le cui norme m_1, m_2 si suppongano prime fra loro. Qui $(\xi_2^1, \xi_3^1, \ldots, \xi_n^1)$ indica una soluzione delle congruenze (10), scritte *rispetto al modulo* m_1, e similmente $(\xi_2^2, \ldots, \xi_n^2)$ una soluzione delle medesime congruenze (10) rispetto al modulo m_2. Ma allora, essendo m_1, m_2 primi fra loro, possiamo determinare $n-1$ altri numeri $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ che soddisfino alle congruenze simultanee

$$\xi_i \equiv \xi_i^1 \pmod{m_1}, \qquad \xi_i \equiv \xi_i^2 \pmod{m_2}$$
$$(i = 2, 3, \ldots, n);$$

e allora questi numeri soddisferanno alle medesime congruenze (10) rispetto a ciascuno dei moduli m_1, m_2 e per ciò anche rispetto al loro minimo multiplo comune $m = m_1 m_2$. Per quanto si è visto sopra, il prodotto $A_1 A_2$ è l'ideale primario assoluto

$$A = [m, \omega_2 - \xi_2, \ldots, \omega_n - \xi_n]. \qquad \text{C. D. D.}$$

Del resto la proprietà ora segnalata discende da questa più generale :

Se A_1, A_2 *sono due ideali qualunque, contenenti rispettivamente come minimi numeri razionali i numeri* m_1, m_2, primi fra loro, *nell' ideale prodotto* $A_1 A_2$ *il minimo numero razionale contenuto è il prodotto* $m_1 m_2$.

Intanto $m_1 m_2$ è certamente contenuto in $A_1 A_2$; d'altra parte, il minimo numero razionale m contenuto in A è contenuto tanto in A_1 che in A_2, indi multiplo di m_1 e di m_2, per ció anche del loro prodotto.

3. Si è visto che l'esistenza di ideali primarii assoluti nel corpo $k(\theta)$, con norma assegnata $= m$, è subordinata alla risolubilità del sistema di congruenze (10) (mod m) nelle $n-1$ incognite $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$. Si vedrà ora che, sotto una condizione la quale verrà subito specificata, il sistema (10) puó sostituirsi con una sola congruenza di grado n in una sola incognita ξ, e questa è semplicemente la $f(\xi) \equiv 0 \pmod{m}$, che risulta dall' equazione fondamentale (A) cangiandola in congruenza (mod m).

Prima peró ci conviene scrivere le (10) sotto una forma più simmetrica, che viene suggerita del confronto colle formole (I) di composizione. Oltre ai numeri $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ s'introduca un n^{mo} numero ξ_1, e in corrispondenza ad $\omega_1 \equiv 1$, facciamo

$$\xi_1 \equiv 1 \pmod{m}.$$

Così le (10) potranno scriversi per tutti i valori $1, 2, \ldots, n$ degli indici i, k sotto la forma

$$(\mathrm{I}^*) \qquad \xi_i \xi_k \equiv \sum_{\rho=1}^{l=n} \gamma_{ik}^{(l)} \xi_l \pmod{m}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

e queste risultano dalle (I) riducendole a congruenze (mod m), col sostituire agli interi algebrici ω_i i numeri interi razionali ξ_i.

Siccome $\xi_1 \equiv 1 \pmod{m}$, le congruenze (I^*) aggiunte alle (10) (quelle con i o $k = 1$) sono identità, a causa delle formole (6).

Si osservi ancora che pure avendo fatto uso, nella deduzione delle (I') dalle (I), della base speciale con $\omega_1 = 1$, la relazione indicata vale comunque cangiando la base $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$ con una sostituzione aritmetica unimodulare, quando la stessa sostituzione si operi sopra $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Per una qualunque base $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$, affinchè esistano ideali primarii assoluti di norma $= m$, è necessario che il sistema di congruenze quadratiche (I') ammetta soluzioni $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ non tutte nulle (mod m).

Ed ora, per ridurre il sistema (I') ad una sola congruenza, ricorreremo alla nozione di *indice* C del numero generatore θ (Dedekind). Questo indice C è il numero razionale intero

$$C = \sqrt{\frac{d(\theta)}{D}},$$

dove $d(\theta)$ indica il discriminante del numero θ e D il numero fondamentale del corpo.

Ció premesso, noi faremo l'ipotesi che :

La norma m dell' ideale primario assoluto A *da costruirsi sia un numero primo coll' indice* C *di* θ.

Il numero stesso C si presenta anche, sotto altra forma, come modulo della sostituzione lineare che esprime i numeri

$$1, \quad \theta, \quad \theta^2, \quad \ldots, \quad \theta^{n-1},$$

formanti la base dell' *ordine o anello* di numeri $R(\theta)$ per la base $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$. Scriviamo questa sostituzione

$$(11) \qquad \begin{cases} 1 = c_{11}\,\omega_1 + c_{12}\,\omega_2 + \ldots + c_{1n}\,\omega_n, \\ \theta = c_{21}\,\omega_1 + c_{22}\,\omega_2 + \ldots + c_{2n}\,\omega_n, \\ \theta^2 = c_{31}\,\omega_1 + c_{32}\,\omega_2 + \ldots + c_{3n}\,\omega_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \theta^{n-1} = c_{n,1}\,\omega_1 + c_{n,2}\,\omega_2 + \ldots + c_{n,n}\,\omega_n, \end{cases}$$

dove i coefficienti c_{ik} sono razionali interi.

Il determinante $|C_{ik}|$, che è diverso da zero per l'irriducibilità

della (A), si può supporre positivo [1], ed eguaglia appunto l'indice C del numero θ

$$C = |c_{ik}|.$$

6. Per semplificare le deduzioni seguenti, supponiamo, come al n° **1**, che la base sia scelta con $\omega_1 = 1$, onde intanto pei coefficienti della prima orizzontale nelle (11) avremo

$$(12) \qquad c_{11} = 1, \qquad c_{12} = c_{13} = \ldots = c_{1n} = 0.$$

Osserviamo che, conosciuti i coefficienti

$$c_{21}, \quad c_{22}, \quad \ldots, \quad c_{2n}$$

della seconda orizzontale, quelli delle rimanenti si esprimeranno per questi e per le costanti di composizione $\gamma_{ik}^{(l)}$ in modo perfettamente determinato. Così per quelli della terza orizzontale, avendosi

$$\theta^2 = \sum_i c_{2i}\,\omega_i \sum_k c_{2k}\,\omega_k = \sum_{i,k,l} \gamma_{ik}^{(l)}\, c_{2i}\, c_{2k}\, \omega_l,$$

risulta

$$c_{3l} = \sum_{i,k} \gamma_{ik}^{(l)}\, c_{2i}\, c_{2k};$$

similmente

$$c_{4l} = \sum_{i,k} \gamma_{ik}^{(l)}\, c_{3i}\, c_{2k}, \ldots.$$

Conviene poi osservare che al quadro (11) possiamo aggiungere una $(n+1)^{\text{ma}}$ orizzontale

$$\theta^n = c_{n+1,1}\,\omega_1 + c_{n+1,2}\,\omega_2 + \ldots + c_{n+1,n}\,\omega_n,$$

ed a causa della identità $f(\theta) = 0$, avremo

$$(13) \qquad c_{n+1,i} + a_i\, c_{n,i} + a_2\, c_{n-1,i} + \ldots + a_n\, c_{1,i} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ora al posto delle $n-1$ incognite $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$, coll' aggiunta al solito di $\xi_1 \equiv 1 \pmod{m}$, introduciamo la nuova incognita

$$\xi \equiv c_{21}\,\xi_1 + c_{22}\,\xi_2 + \ldots + c_{2n}\,\xi_n \qquad (\text{mod } m),$$

---

[1] Basta, in caso contrario, cangiare di segno una delle ω_i.

e di questa formiamo le successive potenze, tenendo conto delle formole (I*) e delle osservazioni precedenti. Ne dedurremo le congruenze corrispondenti alle formole (11):

$$(11^*)\qquad \left\{\begin{array}{ll} 1 & \equiv c_{11}\xi_1 + c_{12}\xi_2 + \ldots + c_{1n}\xi_n \\ \xi & \equiv c_{21}\xi_1 + c_{22}\xi_2 + \ldots + c_{2n}\xi_n \\ \xi^2 & \equiv c_{31}\xi_1 + c_{32}\xi_2 + \ldots + c_{3n}\xi_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi^{n-1} & \equiv c_{n1}\xi_1 + c_{n2}\xi_2 + \ldots + c_{nn}\xi_n \end{array}\right. \qquad (\text{mod } m),$$

le quali si ottengono dalle (11) come le (I*) dalle (I) e cioè convertendole in congruenze (mod m) col sostituire alle ω_i le ξ_i (¹).

Costruendo ancora ξ^n, avremo

$$\xi^n \equiv c_{n+1,1}\xi_1 + c_{n+1,2}\xi_2 + \ldots + c_{n+1,n}\xi_n \qquad (\text{mod } m),$$

dopo di che dalle identità (13) risulta:

L'incognita ξ deve essere radice della congruenza

$$(A^*)\quad f(\xi) = \xi^n + a_1\xi^{n-1} + a_2\xi^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\xi + a_n \equiv 0 \qquad (\text{mod } m),$$

che si forma dall' equazione fondamentale (A) *cangiando questa in congruenza* (mod m).

Non può dunque esistere alcun ideale primario assoluto di norma $= m$, se non ha radici la congruenza (A*); e questo vale anche se m non è primo con C, poichè dell' ulteriore ipotesi non si è fin qui fatto uso. Ma supponendola ora soddisfatta, mostriamo come si inverte il risultato precedente, e la condizione trovata necessaria risulta anche sufficiente.

7. Risolvendo il sistema delle n equazioni lineari (11), rispetto ad $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, otteniamo

$$(B)\qquad C\omega_k = C_{1k} + C_{2k}\vartheta + \ldots + C_{n,k}\vartheta^{n-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

avendo indicato con C_{ik} il complemento algebrico dell' elemento c_{ik} nel determinante C.

(¹) La prima delle (11*) è identica, a causa delle (12) e di $\xi_1 \equiv 1$ (mod m).

E similmente dalle corrispondenti congruenze (11*) avremo risolvendo

$$(B^*) \quad C\xi_k \equiv C_{1k} + C_{2k}\xi + \ldots + C_{n,k}\xi^{n-1} \pmod{m} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Siccome C *è primo col modulo m*, queste fissano i valori di $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ appena fissato quello di ξ. Di più, in riguardo alla ξ_1, siccome dalle (12) [ò anche dalle (B)] segue

$$C_{11} = C, \qquad C_{21} = C_{31} = \ldots = C_{n1} = 0,$$

e la (B*) per $k = 1$ dà

$$C(\xi_1 - 1) \equiv 0 \pmod{m},$$

da cui $\xi_1 \equiv 1 \pmod{m}$.

Ora è facile dimostrare che, se ξ è una radice della congruenza

$$f(\xi) \equiv 0 \pmod{m},$$

le ξ_k, cosi calcolate univocamente dalle (B*), verranno a soddisfare alle congruenze quadratiche (I*).

Difatti, siccome le formole di composizione (I) sono conseguenze delle (B) e dell' essere θ radice di $f(\theta) = 0$, cosi pure dalle (B*) e dal fatto che ξ soddisfa alla $f(\xi) \equiv 0 \pmod{m}$ discendono ora le congruenze quadratiche (I*).

Abbiamo dunque :

Se il numero m è primo coll' indice C *del numero* θ, *esistono nel corpo* $k(\theta)$ *tanti ideali primarii assoluti colla norma* $= m$, *quante radici diverse (incongrue) possiede la congruenza*

$$f(\xi) \equiv 0 \pmod{m};$$

e per ciascuna tale radice ξ, *si ha l'ideale* A *corrispondente espresso per la sua base colla formola*

$$(14) \qquad A = [m, \omega_2 - \xi_2, \ldots, \omega_n - \xi_n],$$

dove i numeri $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ *si calcolano univocamente* (mod m) *dalle congruenze* (B*).

Si puó anche individuare l'ideale A, invece che per la base, per due

suoi numeri di cui sia il massimo comun divisore. Dalle formole

$$\begin{aligned} \theta &= c_{21} + c_{22}\omega_2 + \ldots + c_{2n}\omega_n \\ \xi &= c_{21} + c_{22}\xi_2 + \ldots + c_{2n}\xi_n \end{aligned} \qquad (\text{mod } m),$$

sottraendo risulta

$$\theta - \xi = qm + c_{22}(\omega_2 - \xi_2) + \ldots + c_{2n}(\omega_n - \xi_n)$$

con q intero razionale, e per la (14) questo è un numero dell'ideale A. Ora dimostriamo :

L'ideale A *è il massimo comun divisore dei due numeri* m, $\theta - \xi$, *o esprimendo in simboli*,

$$A = (m, \theta - \xi).$$

Per questo dovremo provare che i due ideali A e $(m, \theta - \xi)$ si contengono l'un l'altro. Che il secondo sia contenuto nel primo è evidente, perchè vi sono contenuti i due numeri generatori m, $\theta - \xi$. In secondo luogo dalle (B), (B*), sottraendo, abbiamo

$$C(\omega_k - \xi_k) = qm + \left[C_{2k} + C_{3k}\frac{\theta^2 - \xi^2}{\theta - \xi} + \ldots + C_{n,k}\frac{\theta^{n-1} - \xi^{n-1}}{\theta - \xi}\right](\theta - \xi),$$

dove q è un numero razionale intero, e a destra il moltiplicatore di $\theta - \xi$ è un intero μ di $k(\theta)$, onde dalla formola

$$C(\omega_k - \xi_k) = qm + \mu(\theta - \xi)$$

risulta che $C(\omega_k - \xi_k)$ è un numero dell' ideale $(m, \theta - \xi)$. Siccome poi C è primo con m, possiamo prendere due interi razionali t, u tali che sia

$$Ct = 1 + mu,$$

e nell' ideale $(m, \theta - \xi)$ sarà pure contenuto il numero

$$Ct(\omega_k - \xi_k) = \omega_k - \xi_k + u(\omega_k - \xi_k)m,$$

quindi anche

$$\omega_k - \xi_k = Ct(\omega_k - \xi_k) - u(\omega_k - \xi_k)m$$

come differenza di due numeri dell' ideale.

Dunque tutti gli n numeri della base (14) di A si trovano nell' ideale $(m, \theta - \xi)$ ed A stesso è contenuto in $(m, \theta - \xi)$, e si conclude

appunto

$$A = (m, \theta - \xi).$$

8. Secondo i risultati al n° **3**, gli elementi coi quali si compongono gli ideali primarii assoluti sono esclusivamente gli ideali primi di primo grado. Si sa che :

In ogni corpo algebrico esistono infiniti ideali primi di primo grado.

La proposizione si stabilisce in generale col sussidio dell' aritmetica analitica (¹). Qui vogliano dimostrarla, almeno in un caso particolare ma assai esteso, come si vedrà, con mezzi puramente aritmetici. Il caso che vogliamo trattare è il seguente : *supponiamo che a numero generatore del corpo* $k(\theta)$ possa *scegliersi un' unità.* Tale circostanza si verifica sempre, in particolare, quando fra gli n corpi coniugati

$$k^{(1)}, \quad k^{(2)}, \quad \ldots, \quad k^{(n)}$$

uno almeno è reale. Questo deriva dal teorema fondamentale di Dirichlet per l'esistenza delle unità, come segue. Attribuiamo il corpo reale k al primo gruppo A del teorema di Dirichlet, e tutti i rimanenti al secondo gruppo B. Esiste in $k(\theta)$, pel teorema ricordato, un' unità ε il cui modulo è > 1, mentre tutti i moduli dei coniugati (appartenenti al gruppo B) sono invece < 1. In queste condizioni, il numero ε non può eguagliare alcuno dei suoi coniugati, ed è quindi di grado n (primitivo), ossia un numero generatore del corpo come si voleva.

Scelto dunque a numero generatore θ del corpo un' unità, avendosi $N\theta = \pm 1$, il valore assoluto dell' ultimo coefficiente a_n, nell' equazione fondamentale (A), sarà $= 1$, scriviamo

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x \pm 1. \tag{15}$$

Ora dimostriamo :

Scelto un qualunque numero razionale intero (positivo) μ, *si può trovare un numero primo* p, *che non divida* μ, *e pel quale la congruenza* $f(\xi) \equiv 0 \pmod{p}$ *sia solubile.*

(¹) V. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, IIe Auflage, II^{ter} Bd. § 197, S^e 727.

Pongasi nella (15) per x un intero arbitrario multiplo di μ

$$x = q\mu \qquad (q \text{ intero arbitrario}).$$

Il numero intero che ne risulta

$$(16) \qquad N = f(q\mu) = q^n\mu^n + a_1 q^{n-1}\mu^{n-1} + \ldots + a_{n-1} q\mu \pm 1$$

sarà diverso da zero [per la irriducibilità della $f(x)$], e diverso anche da ± 1, se pure escludiamo per q quegli *eventuali* valori (in numero finito) che rendessero $f(q\mu) = \pm 1$. Così il numero N avrà almeno un divisore primo p, che non dividerà μ, risultando dalla (16)

$$N \equiv \pm 1 \qquad (\text{mod}\, \mu),$$

e per questo numero primo p la congruenza

$$(17) \qquad f(\xi) \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, p)$$

avrà almeno la radice $\xi = q\mu$. C. D. D.

In questo risultato poniamo $\mu = C$, essendo C l'indice di θ, e la (17) avrà una radice ξ, mentre il modulo p è primo con C. A questa radice ξ corrisponderà (n° 7) un ideale P primo e di primo grado, divisore di p ($NP = p$). Ma ora si vede subito che di questi numeri primi p, che non dividono C e pei quali è solubile la congruenza (17), se ne dànno infiniti. E difatti, per quanti di tali numeri primi si sieno già trovati, diciamo

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_r,$$

se nel teorema dimostrato poniamo

$$\mu = C p_1 p_2 \ldots p_r,$$

ne troveremo uno nuovo p, che non divide C ed è diverso da $p_1, p_2, \ldots, p_r$. L'infinità degli ideali primi di primo grado in $k(\theta)$ risulta così manifesta.

9. Terminiamo la presente Nota colla ricerca del *carattere quadratico* di un qualunque intero ω del corpo $k(\theta)$ rispetto ad un ideale primo P di *primo grado* che non entra in ω, e nemmeno nel numero

primo 2 [1]. Col simbolo di Dirichlet $\left[\frac{\omega}{P}\right]$ indichiamo l'unità positiva o negativa, secondo che ω è residuo quadratico o non residuo (mod P), cioè secondo che è solubile, ovvero insolubile la congruenza

$$x^2 \equiv \omega \pmod{P}. \tag{18}$$

Dimostriamo che il calcolo del simbolo $\left[\frac{\omega}{P}\right]$ si riduce a quello di un simbolo di Legendre $\left(\frac{r}{p}\right)$, dove p è il numero primo (dispari) norma di P.

Nel caso attuale $NP = p$ formano già un sistema completo di resti (mod P) i p numeri razionali

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad p-1,$$

poichè un numero razionale r che sia $\equiv 0 \pmod{P}$ è necessariamente multiplo del più piccolo p, cioè è anche $r \equiv 0 \pmod{p}$. Per esaminare se la congruenza (18) è solubile, si può già supporre ω sostituito col numero razionale $r \not\equiv 0 \pmod{p}$, a cui ω è congruo (mod P), ed anche pel valore dell' incognita x si può assumere un numero razionale ξ.

Secondo le osservazioni superiori, la congruenza (18) equivale così perfettamente all' altra di aritmetica razionale

$$\xi^2 \equiv r \pmod{p};$$

ne segue: *Se r è un numero razionale (non divisibile per p) si ha*

$$\left[\frac{r}{P}\right] = \left(\frac{r}{p}\right). \tag{19}$$

Ció premesso, sia dato un qualunque intero ω in $k(\theta)$

$$\omega = h_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_n\omega_n,$$

e prendiamo la base di P sotto la forma del n° **3**

$$P = [p, \omega_2 - \xi_2, \ldots, \omega_n - \xi_n].$$

Per calcolare $\left[\frac{\omega}{P}\right]$ basterà determinare il numero razionale

---

(1) Se P divide 2, *qualunque* intero ω è suo residuo quadratico.

$r \equiv \omega \pmod{P}$, ed applicare quindi la (19). Ora, dovendosi avere

$$h_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_n\omega_n = r + px_1 + (\omega_2 - \xi_2)x_2 + \ldots + (\omega_n - \xi_n)x_n,$$

dove $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono interi razionali, ne deduciamo

$$x_2 = h_2, \qquad x_3 = h_3, \qquad \ldots, \qquad x_n = h_n,$$

indi

$$r = h_1 + h_2\xi_2 + h_3\xi_3 + \ldots + h_n\xi_n.$$

Così resta stabilità la formola

$$(20) \qquad \left[\frac{h_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_n\omega_n}{P}\right] = \left(\frac{h_1 + h_2\xi_2 + \ldots + h_n\xi_n}{p}\right),$$

che effettua la riduzione del simbolo $\left[\frac{\omega}{P}\right]$ ad un simbolo di Legendre. Nel caso del corpo quadratico di Gauss $k(\sqrt{-1})$, quando per P si assuma un fattore primo complesso π del numero primo $p \equiv 1 \pmod{4}$, la (20) diventa una ben nota formola di Dirichlet.

Mécanismes transformables ou déformables. Couples de surfaces applicables qui s'en déduisent;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. M. Bricard a indiqué dans les *Nouvelles Annales* (1920) quelques exemples de mécanismes déformables que je vais généraliser.

Soient un premier ensemble de m points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et un second ensemble de p points $B_1, B_2, \ldots, B_p$. Nous ne regardons pas comme distinctes deux configurations de ce double ensemble se ramenant l'une à l'autre par un déplacement ou une symétrie. Supposons chaque point A_i relié à chaque point B_j par une tige rectiligne indéformable, inextensible : nous avons un mécanisme de mp tiges à $m+p$ nœuds d'articulation. Sur chaque tige A_{ij} faisons une marque permettant de la reconnaître : inscrivons par exemple A_{ij}; *démontons* ce mécanisme. Il résulte de la discussion simple, déjà faite par M. Bricard, que nous ne pourrons, en général, *remonter* ce mécanisme que dans la configuration primitive (ou symétrique). Cela tient à ce que, si nous cherchons à déterminer m points A_i et p points B_j par la donnée des distances A_{ij}, nous avons un système de mp équations à $2(m+p)-3$ ou $3(m+p)-6$ inconnues, suivant que l'on opère dans le plan ou l'espace, défalcation faite des paramètres de déplacement d'ensemble. Or

$$(1)\qquad \begin{cases} mp - 2(m+p) + 3 = (m-2)(p-2) - 1, \\ mp - 3(m+p) + 6 = (m-3)(p-3) - 3. \end{cases}$$

En supposant $m \geqq p$ et $p \geqq 3$ dans le plan ou $p \geqq 4$ dans l'espace, nous

avons un nombre d'équations supérieur au nombre d'inconnues. Ces conditions sont sûrement remplies si nous supposons m et p très grands, pouvant même devenir infinis.

Si donc on choisit au hasard la valeur l_{ij} de la distance A_iB_j, le système d'équations est incompatible. La construction préalable du mécanisme précédent nous donne des valeurs l_{ij} assurant la compatibilité du système : le cas normal correspond à un système *unique* de solutions; le mécanisme est alors strictement *indéformable*. Il peut arriver que ces équations aient un nombre *fini*, *supérieur à l'unité*, de solutions; le mécanisme est *transformable*, on peut passer d'une configuration à une autre par un *démontage*, mais non par une suite de déformations continues. Enfin il peut arriver qu'il y ait une *infinité* de solutions à un ou plusieurs paramètres, le mécanisme est *déformable*.

On peut imaginer une combinaison des deux derniers cas : deux séries continues de déformations peuvent fort bien exister pour un même mécanisme, sans que l'on puisse passer d'une configuration de la première série à une de la seconde série autrement que par un démontage : nous en donnerons des exemples. On peut imaginer un cas un peu plus spécial; aux notions purement *géométriques* de configuration, transformation, déformation, adjoignons la notion *cinématique* de vitesse. Dans le cas de déformation continue, suivons chaque point avec sa vitesse : deux séries de déformations S et S_1 peuvent fort bien admettre une configuration commune Σ, telle que, pour pouvoir passer d'une configuration déterminée S à une configuration déterminée S_1, il soit nécessaire de passer par la configuration Σ avec vitesse nulle pour tous les points au moment où l'*embranchement* Σ est réalisé. Un schéma très simple fera comprendre ceci : on peut imaginer deux courbes planes ou gauches S et S_1 sans point commun, cela correspondrait à deux séries de configurations d'un même mécanisme déformable ne pouvant se succéder que grâce à un démontage; si les courbes S et S_1 ont un point commun Σ, où elles ne sont pas tangentes, on peut imaginer qu'un point décrive la première courbe, arrive en Σ avec une vitesse nulle et soit aiguillé, sans choc, sur la seconde courbe. Nous trouverons des exemples de tels mécanismes.

2. On peut faire grandir m et p indéfiniment. Les points A_i seront répartis sur une courbe ou même une surface; de même les points B_j. Les raisonnements précédents et leurs conclusions subsistent; on pourrait *a priori* croire que la détermination est plus difficile que si m et p sont finis : c'est le contraire qui a lieu.

Au point de vue analytique, le nouveau problème se pose ainsi : deux courbes (a) et (A), lieux des points a et A respectivement, se correspondent ponctuellement; de même deux autres courbes (b) et (B). Quels que soient les points a et b choisis sur (a) ou (b), on a

$$ab = AB.$$

Appelons (a_1, a_2, a_3) les coordonnées rectangulaires de a, (A_1, A_2, A_3) celles de A, nous avons ainsi six fonctions d'un paramètre α; de même (b_1, b_2, b_3) et (B_1, B_2, B_3) sont six fonctions d'un second paramètre β et l'on a

$$(2) \quad (a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2-(A_1-B_1)^2-(A_2-B_2)^2-(A_3-B_3)^2=0.$$

Suivant que les douze fonctions, solutions de (2), contiendront ou non un paramètre t distinct de α et β, une solution de (2) fournira un mécanisme déformable ou simplement transformable.

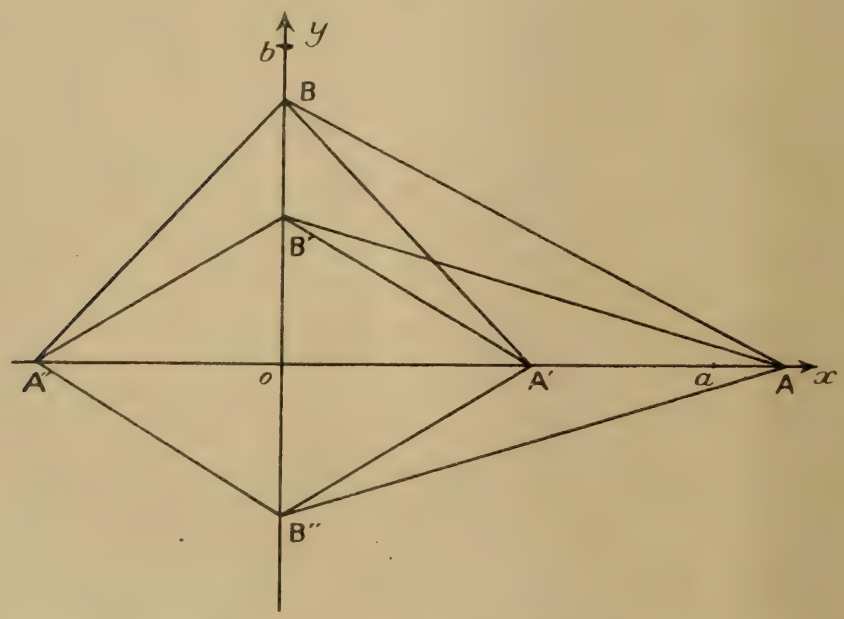
Sur la courbe (a) d'un tel mécanisme, marquons m points; sur la courbe (b), p points : nous retrouvons un mécanisme à nombre fini de points; m et p sont donc arbitraires. Si donc nous cherchons les mécanismes à nombre fini de points, nous devrons d'abord trouver ceux qui dérivent des mécanismes de courbes, puis peut-être d'autres. C'est donc la recherche des mécanismes à nombre fini de points qui sera la plus délicate, la méthode différentielle ne pouvant s'appliquer à ceux-là; il serait précisément intéressant de chercher s'il existe des mécanismes à nombre fini de points non dérivés des mécanismes de courbes.

Dans le cas de mécanismes plans, il suffit de supposer les quatre fonctions d'indice 3 nulles identiquement et l'on trouve uniquement, en ne tenant pas compte du résultat évident où l'une des courbes se réduit à un point, deux exemples qui se déduisent d'ailleurs des mécanismes de l'espace à trois dimensions : l'un est un mécanisme transformable constitué par deux coniques homofocales quelconques, l'autre

est un mécanisme déformable constitué par deux droites rectangulaires. Je n'étudie ce dernier que pour montrer comment le mécanisme si élégant de M. Bricard, constitué de deux inverseurs de Peaucellier avec un losange commun, en dérive.

Soit a un point de Ox, d'abscisse x (*fig.* 1); nous lui faisons cor-

Fig. 1.



espondre le point A, situé aussi sur Ox d'abscisse X, par la relation

$$X^2 = x^2 + h,$$

où h est une constante arbitraire $\gtrless 0$. De même au point b de Oy, d'ordonnée y, correspondra le point B d'ordonnée Y par la relation

$$Y^2 = y^2 - h,$$

on a manifestement $ab = AB$. Marquons donc deux points A', A'' symétriques par rapport à O sur Ox, deux points B', B'' symétriques par rapport à O sur Oy. La figure A'A''B'B'' est un losange et nous retrouvons les deux inverseurs accouplés

$$A(A'A''B'B'') \quad \text{et} \quad B(A'A''B'B'')$$

qui, avec la tige supplémentaire AB, forment le mécanisme de M. Bricard; la seule différence c'est que M. Bricard fixe A et B, tandis qu'ici j'oblige les diagonales du losange à rester sur deux directions rectangulaires fixes. Nous retrouvons l'opposition du particulier au général; ce mécanisme si ingénieux de M. Bricard aurait pu nous échapper, et c'eût été dommage, si nous n'avions considéré que le mécanisme des deux droites rectangulaires dont il dérive.

3. Indiquons maintenant la méthode de résolution de l'identité (2). Une double dérivation par rapport à α puis β donne

$$(3) \qquad a'_1 b'_5 + a'_2 b'_2 + a'_3 b'_3 - A'_1 B'_1 - A'_2 B'_2 - A'_3 B'_3 = 0.$$

L'identité (3) est d'un type bien connu : fixons β, j'ai une relation linéaire et homogène entre les a' et A'; β variant de $-\infty$ à $+\infty$ si les relations obtenues ainsi ne se réduisent pas à moins de six, on voit que a et A sont deux points fixes, (b) et (B) deux courbes arbitraires. Ce cas est banal; d'ailleurs, à notre point de vue, nous devons supposer que les deux courbes (a) et (b) sont à nombre infini de points toutes deux. On supposera donc que les relations distinctes sont en nombre $k \leqq 5$; en posant $l = 6 - k$, les k relations distinctes permettent d'exprimer $a'_1, \ldots, A'_3$ au moyen de l arbitraires $u_1, u_2, \ldots, u_l$. Substituant dans (3), nous égalerons à zéro les coefficients de $u_1, \ldots, u_l$ et obtenons ainsi l relations linéaires et homogènes en $b'_1, \ldots, B'_3$. Comme on peut intervertir les rôles de (a) et (b), on peut supposer $k \geqq l$; donc nous étudierons successivement

$$k = 5, \qquad l = 1,$$
$$k = 4, \qquad l = 2,$$
$$k = 3, \qquad l = 3.$$

On se rappellera d'ailleurs qu'un déplacement d'ensemble sur (a, b) d'une part, sur (A, B) de l'autre, est permis. L'identité (3) ayant été résolue, des intégrations donnent $a_1, \ldots, A_3$, et le premier membre de (2), s'il n'est pas identiquement nul, se réduit à une expression

$$F(\alpha) - \Phi(\beta).$$

Nous n'aurons plus qu'à chercher s'il est possible de réduire $F(\alpha)$ et $\Phi(\beta)$ à une même constante numérique.

La discussion complète est assez longue, mais le résultat final est très simple :

Il existe dans l'espace à trois dimensions un mécanisme transformable, mais non déformable, et un seul; il se compose de deux quadriques homofocales, dont l'une peut être un plan.

Il existe des mécanismes déformables : la condition nécessaire et suffisante pour qu'un mécanisme formé de deux courbes soit déformable est que l'une d'elles soit une conique (ou une droite) ou bien que les deux courbes soient planes dans deux plans rectangulaires. Le mécanisme formé des deux courbes planes pourra, si l'on préfère, être regardé comme formé de deux plans rectangulaires.

4. Supposons $k = 5$; les rapports mutuels des a' et A' étant fixes, les points a et A décrivent chacun une droite; on écrira donc

$$(4) \qquad a_1 = a_2 = A_1 = A_2 = 0, \qquad A'_3 = m a'_3,$$

où m est une constante, nulle ou non; on en déduit

$$(5) \qquad \begin{cases} b'_3 = m B'_3, \\ A_3 = m a_3, \qquad b_3 = m B_3 + p, \end{cases}$$

conformément à la méthode générale, et usant de certains déplacements, puis

$$(6) \qquad b_1^2 + b_2^2 + (m^2 - 1) B_3^2 - B_1^2 - B_2^2 = a_3^2 (m^2 - 1) + 2 a_3 p - p^2 = C,$$

où C et p sont des constantes. Si l'on n'a pas à la fois $m^2 - 1$ et p nuls, a_3 est une constante, les points a et A sont fixes, cas déjà étudié et écarté. Comme il est indifférent d'adopter $m = +1$ ou $m = -1$, puisqu'on peut prendre le symétrique de (A, B) par rapport à xOy, on a $m = 1$, $p = 0$:

$$(7) \qquad A_3 = a_3, \qquad b_3 = B_3, \qquad b_1^2 + b_2^2 = B_1^2 + B_2^2.$$

Le point a décrit l'axe des z; le point A coïncide avec a; le point b décrit une courbe gauche quelconque; en faisant tourner cette courbe

autour de Oz, elle engendre une surface de révolution, la courbe (B) est quelconque sur cette surface, la correspondance entre (b) et (B) étant effectuée par les parallèles. On peut dire, si l'on veut, que *l'axe d'une surface de révolution et cette surface constituent un mécanisme déformable* (¹) : adoptons les coordonnées semi-polaires (r, θ, z); l'axe restera inaltéré et un point de la surface reste sur son parallèle, θ étant remplacé par $\Theta = f(\theta, z)$, où f est une fonction arbitraire de deux variables, caractérisant la déformation. J'appellerai ce mécanisme *type I*.

5. Supposons $k = 4$. On pourra écrire (les l, m, L, M étant des constantes et u, v deux paramètres arbitraires)

$$(8)\qquad \begin{cases} a'_1 = l_1 u + m_1 v, & A'_1 = L_1 u + M_1 v, \\ a'_2 = l_2 u + m_2 v, & A'_2 = L_2 u + M_2 v, \\ a'_3 = l_3 u + m_3 v, & A'_3 = L_3 u + M_3 v; \end{cases}$$

de la sorte, entre (a'_1, a'_2, a'_3) existe au moins une relation linéaire et homogène. J'aurai donc à distinguer plusieurs cas, suivant que les nombres de relations entre

$$(a'_1, a'_2, a'_3) \quad \text{et} \quad (A'_1, A'_2, A'_3)$$

sont respectivement

$$(3, 1), \quad (2, 2), \quad (1, 2), \quad (1, 1).$$

Si l'on adopte la première hypothèse, on a le droit d'écrire, sans rien particulariser,

$$(9)\qquad \begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = A_3 = 0, \qquad B_1 = B_2 = 0, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - B_3^2 = A_1^2 + A_2^2 = C; \end{cases}$$

le point a est fixe, la courbe (b) est arbitraire; le point B décrit une

(¹) Ce mécanisme peut être considéré comme formé de l'espace tout entier et d'une droite. Chaque point de l'espace est soumis à une transformation consistant en une rotation arbitraire autour de la droite : la transformation dépend donc d'une fonction arbitraire de *trois* variables. Il y a peut-être intérêt à ne considérer qu'une surface de révolution et son axe.

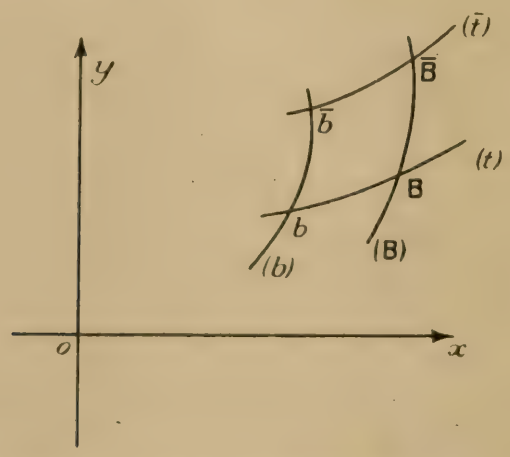
droite, axe du cercle décrit par le point A. Ce sera le type II ; je le conserve parce que, dans le couple (A, B), j'ai effectivement deux courbes; c'est un mécanisme *déformable avec embranchement.*

Dans la seconde hypothèse, a et A décrivent chacun une droite : on est amené à écrire

$$(10)\qquad \begin{cases} a_1 = a_2 = A_1 = A_2 = 0, \qquad b_3 = B_3 = 0, \\ A_3^2 = a_3^2 + C, \\ B_1^2 + B_2^2 = b_1^2 + b_2^2 - C. \end{cases}$$

On obtient *un mécanisme déformable à un paramètre* (type III), *constitué par une courbe plane arbitraire* (b) *et une droite* (a) *normale au plan de cette courbe* [1]. On peut se donner arbitrairement la courbe (b) et les trajectoires des divers points de (b) au cours de la déformation quand C varie; on peut, au contraire, se donner les diverses positions de (b) et une trajectoire. On peut remarquer qu'ici

Fig. 2.



il y a une réciprocité curieuse entre les deux séries de courbes : positions de (b) et trajectoires des points de b; on peut échanger leurs rôles, comme on le voit (*fig.* 2), en considérant le quadrilatère formé

[1] Ce mécanisme peut, si l'on préfère, être regardé comme constitué par une droite et un plan perpendiculaire à la droite; à ce titre, ce n'est qu'un cas particulier du type I, quand la surface de révolution se réduit à un plan.

par deux positions (b) et (B) et deux trajectoires t et $\bar{t}$, l'égalité

$$Ob^2 - O\bar{b}^2 = OB^2 - \overline{OB}^2$$

pouvant s'écrire

$$Ob^2 - OB^2 = O\bar{b}^2 - \overline{OB}^2.$$

Il est très remarquable que ce mécanisme ait fourni au géomètre Peterson une classe particulière de surfaces applicables les unes sur les autres. Si, dans ce mécanisme III, on suppose que la courbe plane est un cercle admettant la droite pour axe, on retrouve le mécanisme II et l'on voit qu'au cours de la déformation on peut obtenir successivemant tous les cercles concentriques au premier dans son plan et, en particulier, le réduire à son centre : cette configuration est celle qui constitue embranchement pour le mécanisme II, car le système formé par un point et une courbe peut être déformé, le point restant toujours point et la courbe se déformant à volonté; ce genre de déformation est celui que nous avons indiqué au début pour le rejeter aussitôt.

6. Nous prenons alors $k = 4$ et la troisième hypothèse; une relation entre a'_1, a'_2, a'_3, deux entre A'_1, A'_2, A'_3. On peut supposer $a_1 = 0$, $A_1 = A_2 = 0$; il existe une relation entre A'_3, a'_2 et a'_3 de la forme $A'_3 = h_1 a'_2 + h a'_3$, que l'on peut intégrer et ramener par rotation de (a, b) autour de Oz et glissement de (A, B) le long de Oz à $A_3 = h a_3$ $(h \neq 0)$. On en déduit $b_3 = h B_3 + m$, $b_2 = n$. J'indique les expressions générales des coordonnées des points des diverses courbes :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{llllllll} (a) & 0 & a_2 & a_3 & (A) & 0 & 0 & h a_3 \\ (b) & b_1 & n & h B_3 + m & (B) & B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \right.$$

Il est visible que je peux remplacer ce Tableau par

$$(11') \quad \left\{ \begin{array}{llllllll} (a) & 0 & a_2 - n & a_3 + p & (A) & 0 & 0 & h a_3 + q \\ (b) & 0 & 0 & h B_3 + m + p & (B) & B_1 & B_2 & B_3 + q \end{array} \right.$$

où m, n, p, q, h sont des constantes. On peut déterminer p et q par

$$q = hp, \qquad m + p = hq = h^2 p.$$

Si donc $h^2 \neq 1$, on aura

$$p = \frac{m}{h^2 - 1}, \qquad q = \frac{mh}{h^2 - 1},$$

et un simple changement de notations nous donne le Tableau

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{llll} (a) & 0 & a_2 & a_3 \\ (b) & b_1 & 0 & b_3 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{llll} (A) & 0 & 0 & ha_3 \\ (B) & B_1 & B_2 & \dfrac{b_3}{h} \end{array}$$

Si $h^2 = 1$, d'où simplement $h = +1$ comme plus haut, on aura

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{llll} (a) & 0 & a_2 & a_3 \\ (b) & b_1 & 0 & b_3 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{llll} (A) & 0 & 0 & a_3 \\ (B) & B_1 & B_2 & b_3 - m \end{array}$$

Adoptons le Tableau (12), on obtient

$$(14) \qquad a_2^2 + a_3^2(1 - h^2) = B_1^2 + B_2^2 + \frac{b_3^2}{h^2}(1 - h^2) - b_1^2 = C.$$

Nous avons un mécanisme IV dont les deux configurations sont à étudier séparément : *la courbe* (a) *est une conique quelconque à centre et la courbe* (b) *une courbe plane quelconque dans un plan principal de* (a) [1], c'est-à-dire dans un plan perpendiculaire au plan de (a) mené par un axe de (a) ; cette configuration étant donnée, C et h sont déterminés ; on trouve pour (A) une droite correspondant suivant la loi bien déterminée par (12) à la conique (a), et pour (B) une courbe arbitraire située sur une surface de révolution d'axe A, bien déterminée, car on a trouvé

$$B_3 = \frac{b_3}{h}, \qquad B_1^2 + B_2^2 = C - \frac{b_3^2}{h^2}(1 - h^2) + b_1^2.$$

Cette configuration est celle qui caractérise le type I ; nous pouvons, au contraire, partir de la seconde configuration donnée arbitrairement : une droite (A) et une courbe (B) sont données arbitrairement ; on pourra prendre (A) pour Oz et se donner arbitrairement le point

---

[1] On peut encore considérer le mécanisme IV comme constitué par une conique et son plan principal d'une part, et d'autre part par une droite et tout l'espace.

de (A) qui sera origine du système de coordonnées; ensuite on prendra C et h arbitrairement, on obtiendra alors pour (a) la conique

$$a_1 = 0, \qquad a_2^2 + a_3^2(1 - h^2) = C$$

située dans le plan yOz, ayant pour centre O, et une grandeur arbitraire. La courbe (b), elle aussi, une fois donnés C, h et la position de O, est bien déterminée par les équations

$$b_2 = 0, \qquad b_3 = hB_3, \qquad b_1^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2(1 - h^2) - C.$$

Le système (a), (b) est un cas particulier d'un mécanisme déformable à trois paramètres que nous trouverons plus bas, constitué par deux courbes planes dans deux plans rectangulaires; quand l'une est une conique et l'autre une courbe située dans un plan principal de cette conique, la déformation à trois paramètres que nous indiquerons conserve la définition de l'ensemble de ces deux courbes, *la conique étant remplaçable par une autre arbitraire* (à centre, ou parabole, ou droite). Si précisément nous transformons la conique (a) en une droite, nous trouvons une *configuration embranchement* qui permet (*voir* type I) de remplacer la courbe (b) restée plane par une courbe quelconque située sur une surface de révolution dont la droite est l'axe; les configurations ainsi obtenues sont précisément celles que nous rencontrons ici en étudiant les deux parties (a) (b) et (A) (B). Ceci évite donc de procéder à un démontage pour passer de la conique (a) et courbe plane (b) dans le plan principal à la droite (A) et courbe (B). On remarquera que, si la conique (a) se déforme, la surface de révolution décrite par (B) en tournant autour de (A) ne change pas.

Le Tableau (13) donne une parabole et une courbe plane dans le plan principal : cela n'est pas distinct de ce qui précède, d'après le changement possible de (a) en une conique arbitraire.

7. Soit maintenant $k = 4$ une seule relation linéaire entre a'_1, a'_2, a'_3 seuls, entre A'_1, A'_2, A'_3 seuls, d'où $a_3 = A_3 = 0$. On a ensuite, les h étant constants,

$$(15) \qquad \begin{cases} A'_1 = h_1 a'_1 + h'_1 a'_2 \\ A'_2 = h'_2 a'_1 + h_2 a'_2 \end{cases} \qquad (h_1 h_2 - h'_1 h'_2 \neq 0).$$

Des considérations simples d'homographie dans un plan montrent que l'on peut réduire par des rotations autour de Oz de chaque partie (a), (b) et (A), (B) le système (15) à la forme canonique

$$(15') \qquad \begin{cases} A'_1 = h_1 a'_1 \\ A'_2 = h_2 a'_2 \end{cases} \quad (h_1 h_2 \neq 0).$$

On en déduit comme plus haut

$$(16) \qquad \begin{cases} A_1 = h_1 a_1, & A_2 = h_2 a_2, \\ b_1 = h_1 B_1 + m, & b_2 = h_2 B_2 + n; \end{cases}$$

si $h_1^2 \neq 1$, on peut supposer $m = 0$; si $h_2^2 \neq 1$, on peut supposer $n = 0$. Prenons d'abord $m = n = 0$. On a donc les courbes

$$(17) \qquad \begin{cases} (a) \quad a_1 \quad a_2 \quad 0 \qquad (A) \quad h_1 a_1 \quad h_2 a_2 \quad 0 \\ (b) \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \qquad (B) \quad \dfrac{b_1}{h_1} \quad \dfrac{b_2}{h_2} \quad B_3 \end{cases}$$

avec

$$(18) \quad a_1^2(1-h_1^2) + a_2^2(1-h_2^2) = b_1^2\left(\frac{1}{h_1^2} - 1\right) + b_2^2\left(\frac{1}{h_2^2} - 1\right) + B_3^2 - b_3^2 = C.$$

La courbe (a) est une conique à centre arbitraire, la courbe (b) une courbe arbitraire, plane ou gauche [1]. La courbe (A) est une conique

$$(19) \qquad \frac{A_1^2(1-h_1^2)}{h_1^2} + \frac{A_2^2(1-h_2^2)}{h_2^2} = C.$$

Les carrés des demi-axes de (a) sont :

$$\alpha^2 = \frac{C}{1-h_1^2}, \qquad \beta^2 = \frac{C}{1-h_2^2};$$

ceux de (A),

$$\alpha'^2 = \frac{Ch_1^2}{1-h_1^2}, \qquad \beta'^2 = \frac{Ch_2^2}{1-h_2^2}.$$

On a

$$\alpha^2 - \alpha'^2 = \beta^2 - \beta'^2 = C,$$

donc les coniques (a) et (A) sont homofocales. Remarquons que l'on

---

[1] Le mécanisme V pourra être considéré comme formé d'une conique et de tout l'espace.

tire de là

$$h_1 = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - C}}{\alpha}, \qquad h_2 = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\sqrt{\beta^2 - C}}{\beta};$$

il existe donc un seul paramètre de déformation C; nous avons *un mécanisme déformable constitué d'une conique* (a) *arbitraire et d'une courbe* (b) *arbitraire*. Ce sera notre type V.

Quand C est donné, on obtient

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{lll} A_1 = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 - C}}{\alpha} a_1, & A_2 = \dfrac{\sqrt{\beta^2 - C}}{\beta} a_2, & A_3 = 0, \\ B_1 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - C}} b_1, & B_2 = \dfrac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - C}} b_2, & \\ B_3^2 = C + b_3^2 - \dfrac{b_1^2 C}{\alpha^2 - C} - \dfrac{b_2^2 C}{\beta^2 - C}. & & \end{array}\right.$$

Si b_1 n'est pas constamment nul, c'est-à-dire si la courbe (b) n'est pas plane et située dans le plan principal $x = 0$ de la conique (a), on voit que, si C tend vers α^2, la conique (A) devient une droite, mais que la courbe (B) s'éloigne à l'infini. On ne trouve pas de position d'embranchement; mais si la double condition était réalisée, on retomberait sur le type IV déjà donné, sur lequel il est inutile de revenir.

Dans le cas où $h_1 = 1$, $h_2^2 \neq 1$, on aura le Tableau

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{llll} (a) & a_1 & a_2 & 0 \\ (b) & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{llll} (A) & a_1 & h_2 a_2 & 0 \\ (B) & b_1 - m & \dfrac{b_2}{h_2} & B_3 \end{array}$$

avec

$$(22)\quad a_2^2(1 - h_2^2) - 2ma_1 = b_2^2\left(\frac{1}{h_2^2} - 1\right) + B_3^2 - b_3^2 - 2mb_1 + m^2 = C;$$

ici la conique (a) est une parabole, (A) aussi. On peut, par une translation d'ensemble de tout le système parallèlement à Ox, pourvu que m soit $\neq 0$, supposer $C = 0$; le paramètre de (a) est $p = \frac{m}{1 - h_2^2}$, celui de (A) est $p' = \frac{m h_2^2}{1 - h_2^2}$. On en déduit

$$p - p' = m, \qquad h_2 = \sqrt{\frac{p - m}{p}}.$$

Le paramètre de déformation est donc m; la parabole (a) se transforme en une parabole de grandeur arbitraire; donc tout ce qui a été dit subsiste sans modification. Remarquons que m nul donnerait $a_2 =$ const., on retomberait sur un cas déjà étudié (type I).

Si l'on suppose $h_1 = h_2 = 1$, on a le Tableau

$$\begin{array}{llll} (a) & a_1 & a_2 & 0 \\ (A) & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \qquad \begin{array}{llll} (A) & a_1 & a_2 & 0 \\ (B) & b_1 - m & b_2 - n & B_3 \end{array}$$

on trouve

$$2ma_1 + 2na_2 = b_3^2 - B_3^2 + 2mb_1 + 2nb_2 = C;$$

mais alors on a encore pour courbe (a) une droite et l'on retombe sur un cas déjà étudié.

Un cas particulièrement intéressant est celui où les deux courbes (a) et (b) sont deux coniques quelconques situées dans des plans quelconques : au cours de la déformation, on peut convertir (a) en une conique de même distance focale, (b) devenant courbe gauche; mais on peut avoir une seconde série de déformations où c'est (b) qui reste conique, avec conservation de la distance focale, (a) devenant courbe gauche. La configuration (a), (b), toutes deux coniques, devient ainsi configuration embranchement.

Dans ce cas particulier, prenons même celui, encore plus spécial, où (a) et (b) sont deux coniques homofocales du même plan; leurs équations seront

$$(23) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{a_1^2}{\alpha^2} + \dfrac{a_2^2}{\beta_2} = 1, & a_3 = 0, \\ \dfrac{b_1^2}{\alpha^2 - C_1} + \dfrac{b_2^2}{\beta^2 - C_1} = 1, & b_3 = 0. \end{array} \right.$$

On a d'abord

$$A_1 = a_1 \frac{\sqrt{\alpha^2 - C}}{\alpha}, \qquad A_2 = a_2 \frac{\sqrt{\beta^2 - C}}{\beta}, \qquad A_3 = 0,$$

de sorte que A engendre la conique homofocale à (a)

$$\frac{A_1^2}{\alpha^2 - C} + \frac{A_2^2}{\beta^2 - C} = 1.$$

On a aisément

$$(24)\quad \begin{cases} B_1 = \dfrac{b_1\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - C}}, \qquad B_2 = \dfrac{b_2\beta}{\sqrt{\beta^2 - C}}, \\ B_3^2 = C\left[1 - \dfrac{b_1^2}{\alpha^2 - C} - \dfrac{b_2^2}{\beta^2 - C}\right], \end{cases}$$

le point (B_1, B_2, B_3) décrit donc une certaine biquadratique gauche. Supposons, pour fixer les idées, que (a) et (b) soient deux ellipses homofocales réelles, (b) étant intérieure à (a). Si C varie de o à C_1, l'ellipse (a) se déforme et balaie toute la région intérieure à la couronne limitée par (a) et (b), et pour $C = C_1$ la courbe (A) n'est autre que (b) et la biquadratique (B) est devenue la conique (a). Le mécanisme (a), (b) considéré uniquement dans le plan est un mécanisme strictement transformable mais non déformable : un démontage permet d'échanger (a) avec (b), et inversement; considéré dans l'espace, il est déformable (avec embranchement).

Nous avons épuisé le cas $k = 4$.

8. Dans le cas où $k = 3$, nous avons trois relations :

$$(25)\quad l_i a'_1 + m_i a'_2 + n_i a'_3 + L_i A'_1 + M_i A'_2 + N_i A'_3 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Si le déterminant

$$\begin{vmatrix} l_i & m_i & n_i \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, on pourra résoudre en a'_1, a'_2, a'_3 et il n'y aura pas de relation linéaire entre A'_1, A'_2, A'_3 tous seuls. Si au contraire

$$\begin{vmatrix} l_i & m_i & n_i \end{vmatrix}$$

est nul, on obtient une relation linéaire, ou plusieurs, entre A'_1, A'_2, A'_3. Nous allons donc distinguer plusieurs cas, suivant qu'il existe trois, deux, une ou zéro relations entre A'_1, A'_2, A'_3.

Soit d'abord le premier cas : trois relations entre A'_1, A'_2, A'_3. On en déduit

$$A_1 = A_2 = A_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 0,$$
$$B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = C.$$

Ce cas est peu intéressant : la courbe (a) est une courbe sphérique et la courbe (b) se réduit au centre de la sphère; sous cette forme on a

un mécanisme, déjà rencontré et écarté, ou du moins un cas particulier de ce mécanisme. Ici on peut déformer à volonté (a) sur la sphère. Mais pour passer à la configuration (A), (B), où cette fois (A) est un point, le centre de la sphère par exemple, il faut *démonter* le mécanisme, toutes les têtes d'articulation situées sur la sphère passent au centre et inversement.

Supposons donc qu'il existe deux relations linéaires entre A'_1, A'_2, A'_3; la forme canonique des relations entre les A et a sera

$$(26) \qquad A_1 = A_2 = 0, \qquad a_3 = hA_3 \qquad (h \neq 0);$$

on en déduit

$$b_1 = b_2 = 0, \qquad B_3 = hb_3 + m.$$

Si $h^2 \neq 1$, on peut supposer $m = 0$.

On trouve alors le Tableau

$$(27) \cdot \quad \left\{ \begin{array}{llll} (a) & a_1 & a_2 & a_3 \\ (b) & 0 & 0 & \dfrac{B_3}{h} \end{array} \right. \qquad \begin{array}{llll} (A) & 0 & 0 & \dfrac{a_3}{h} \\ (B) & B_1 & B_2 & B_3 \end{array}$$

et

$$(28) \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) = C;$$

ici la courbe (b) est l'axe des z et le point a est simplement assujetti à se trouver sur une quadrique de révolution autour de Oz. On a ainsi un cas très particulier du mécanisme I susceptible d'une déformation continue avec une fonction de deux variables; le couple (A), (B) est précisément le même, mais en sens inverse. Or pour passer de (a), quadrique de révolution, à son axe (A), on peut éviter un démontage.

En effet, on peut, soit que l'on conserve simplement une courbe tracée sur la quadrique de révolution, soit que l'on conserve toute la quadrique, réduire par déformation continue la courbe ou la quadrique à la méridienne contenue dans le plan xOz, s'il s'agit de (a), (b). On a alors l'embranchement

$$(29) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} (a) & a_1 & 0 & a_3 \\ (b) & 0 & 0 & b_3 \end{array} \right.$$

avec

$$a_1^2 + a_3^2\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) = C. \tag{30}$$

Or considérons la déformation, déjà signalée, qui sera obtenue un peu plus loin,

$$\left\{\begin{array}{ll} A_3 = \dfrac{a_3}{h'}, & A_1^3 + A_3^2 = a_1^2 + a_3^2 - C', \\ B_3 = h' b_3, & B_2^2 + B_3^2 = b_3^2 + C', \end{array}\right. \tag{31}$$

qui fait passer, avec les deux paramètres arbitraires h' et C', de (29) à la nouvelle configuration

$$\left\{\begin{array}{lccc} (A) & A_1 & 0 & A_3 \\ (B) & 0 & B_2 & B_3. \end{array}\right. \tag{32}$$

h' et C' variant d'une façon continue, on a pour $C' = 0$, $h' = 1$ précisément (29), puis pour $C' = C$, $h' = h$ la configuration nouvelle

$$\left\{\begin{array}{lccc} (A) & 0 & 0 & \dfrac{a_3}{h} \\ (B) & 0 & B_2 & B_3 \end{array}\right. \tag{33}$$

avec

$$B_2^2 + B_3^2\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) = C. \tag{34}$$

Or, dans l'état (33) qui nous sert de nouvel embranchement, on peut faire tourner les divers points de la conique (B) autour de l'axe Oz de façon à retrouver la seconde partie (A), (B) du Tableau (27). On a ainsi échangé, d'une façon continue, avec deux embranchements, la quadrique de révolution et son axe.

Ce type VI, constitué par une quadrique de révolution et son axe, est donc un cas particulier du type I, conçu de façon à obtenir pour ce mécanisme I, quand la surface de révolution est du second degré, deux séries de configurations déformables d'une façon continue séparément, reliées l'une à l'autre par embranchement.

Le cas $h = 1$ donne le Tableau

$$\left\{\begin{array}{lccc} (a) & a_1 & a_2 & a_3 \\ (b) & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{lccc} (A) & 0 & 0 & a_3 \\ (B) & B_1 & B_2 & b_3 + m \end{array} \tag{35}$$

avec

$$(36)\qquad a_1^2 + a_2^2 + 2ma_3 = B_1^2 + B_2^2 + 2mB_3 - m^2 = C.$$

Rien n'est changé, sauf que la quadrique de révolution est un paraboloïde si $m \neq 0$, un cylindre de révolution si $m = 0$.

9. Supposons maintenant qu'il existe toujours deux relations linéaires entre A'_1, A'_2, A'_3, d'où $A_1 = A_2 = 0$ comme précédemment, et que la quantité (h) entrant dans (26) soit nulle. Nous obtenons, suivant la méthode générale,

$$(37)\qquad \begin{cases} (a) & a_1 & a_2 & 0 \\ (b) & 0 & 0 & b_3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (A) & 0 & 0 & A_3 \\ (B) & B_1 & B_2 & 0 \end{matrix}$$

$$(38)\qquad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = A_3^2 + C, \\ B_1^2 + B_2^2 = b_3^2 + C. \end{cases}$$

Dans le Tableau (37), chaque partie (a), (b) ou (A), (B) reproduit purement et simplement le mécanisme III; mais nous obtenons ici une nouvelle propriété de ce mécanisme, constitué par une courbe plane C (ou un plan) et une droite D perpendiculaire au plan. Nous n'avions signalé que les déformations continues à un paramètre faisant glisser chaque point de D le long de D suivant une loi simple et déformant C dans son plan. Si, laissant D et C inaltérées, nous considérons ce mécanisme comme cas particulier de I, nous pouvons faire tourner chaque point de C autour de D de façon à transformer C en une droite D′ menée arbitrairement dans P par le pied de D.

Mais alors le mécanisme se réduit à deux droites D et D′ jouant même rôle : donc, on peut cette fois faire tourner D autour de D′ de façon à transformer D en une certaine courbe plane C′ (ou un plan) dont le plan est perpendiculaire à D′ : alors cette nouvelle configuration est celle qui est indiquée sous nom (A), (B) dans le Tableau (37), et l'on peut appliquer la déformation III à cette nouvelle configuration. Nous avons, somme toute, le même ordre d'idées que pour le type VI, dont ce nouveau est aussi type particulier : on a réuni ici à la fois I, III et VI, et c'est la notion d'embranchement qui nous permet de réunir toutes ces formes ; je ne donnerai pas de nom nouveau à ce mécanisme qui n'est pas distinct de III; nous avons reconnu simplement que III

admet deux séries de configurations distinctes liées par embranchement.

10. Nous devons maintenant étudier $k = 3$, en supposant une relation entre A'_1, A'_2, A'_3, seuls d'où $A_3 = 0$. Les quantités a'_1, a'_2, a'_3 peuvent être liées par deux relations indépendantes de A'_1, A'_2, ce serait le cas du paragraphe précédent; elles peuvent être liées par une relation indépendante de A'_1, A'_2 ou bien une telle relation n'existe pas. Soit donc le premier cas, on a

$$A_3 = a_3 = 0, \qquad A'_1 = la'_1$$

avec $l \neq 0$, sinon on retomberait sur un cas étudié. Suivant la méthode générale, on aura, si $l \neq +1$ ou -1, le Tableau

$$(39) \qquad \begin{cases} (a) & a_1 & a_2 & 0 & \qquad (A) & la_1 & A_2 & 0 \\ (b) & b_1 & 0 & b_3 & \qquad (B) & \dfrac{b_1}{l} & 0 & B_3 \end{cases}$$

avec

$$(40) \qquad \begin{cases} A_1^2 + A_2^2 = a_1^2 + a_2^2 - C, & A_1 = la_1, \\ B_1^2 + B_3^2 = b_1^2 + b_9^2 + C, & B_1 = \dfrac{b_1}{l}. \end{cases}$$

Le mécanisme VII est constitué de deux courbes planes arbitraires dans deux plans rectangulaires, sa déformation dépend de trois paramètres.

Les paramètres sont les quantités C et h qui figurent explicitement dans les formules (40) plus la position de l'origine sur la droite d'intersection des deux plans, quantité ne figurant plus explicitement dans les formules (40), mais qu'il ne faut pas oublier [1]. Si C tend vers zéro et l vers l'unité, la déformation (40) fait tendre (A) vers (a) et (B) vers (b). Ce mécanisme a déjà été signalé nombreuses fois, quand,

---

[1] Le mécanisme peut être regardé comme formé de deux plans rectangulaires, auquel cas le choix particulier de l'origine sur leur intersection est indifférent, si nous négligeons les déplacements. Mais si l'on trace une courbe sur l'un des plans, la position de l'origine intervient nécessairement comme paramètre. C'est pour une raison analogue qu'une sphère de rayon connu dépend en Mécanique de six paramètres, mais de trois seulement en Géométrie.

par suite d'une forme spéciale de l'une des courbes (a), (b), ce mécanisme est doué d'embranchements; c'est ce qui arrive si (a) est une conique et (b) une courbe plane située dans l'un des deux plans principaux de (a), mécanisme IV, ou encore dans l'hypothèse plus particulière où (b) se réduit à l'un des axes de (a), mécanisme VI.

La transformation à trois paramètres l, x_0, C,

$$(41)\qquad \begin{cases} A_1 - x_0 = l(a_1 - x_0), \\ (A_1 - x_0)^2 + A_2^2 = (a_1 - x_0)^2 + a_2^2 - C \end{cases}$$

appliquée à une conique d'axe Ox dans le plan Oxy le transforme en une conique de grandeur arbitraire du même plan Oxy, ayant toujours pour axe Ox, ou même en deux droites parallèles à Ox et équidistantes de Ox, ou même simplement en Ox : nous nous sommes servis de ces résultats.

Un cas particulièrement intéressant est à signaler : supposons que (a) soit une ellipse et (b) l'hyperbole focale de (a) : on peut réduire par déformation continue (a) et (b) à leur axe transverse commun. En effet, on a, en posant $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$ et supposant $\alpha > \beta$,

$$(42)\qquad \begin{cases} \dfrac{a_1^2}{\alpha^2} + \dfrac{a_2^2}{\beta^2} - 1 = 0, \\ \dfrac{b_1^2}{\gamma^2} + \dfrac{b_3^2}{\beta^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Nous écrirons, comme pour le mécanisme V, formules (20),

$$(43)\qquad A_1 = \frac{\sqrt{\alpha^2 - C}}{\alpha} a_1, \qquad A_2 = \frac{\sqrt{\beta^2 - C}}{\beta} a_2;$$

d'où

$$(44)\qquad \frac{A_1^2}{\alpha^2 - C} + \frac{A_2^2}{\beta^2 - C} = 1, \qquad A_1^2 + A_2^2 = a_1^2 + a_2^2 - C,$$

formules qui rentrent bien dans le type (40). Nous avons ensuite

$$(45)\qquad B_1 = \frac{b_1 \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - C}}, \qquad B_1^2 + B_3^2 = b_1^2 + b_3^2 + C;$$

en éliminant b_1 et b_3 entre (42) et (45), on trouve l'équation

$$(46)\qquad B_3^2 = (\beta^2 - C)\left[\frac{B_1^2}{\gamma^2} - 1\right].$$

qui, si $\beta^2 - C \neq 0$, peut être mise sous la forme

$$(46') \qquad \frac{B_1^2}{\gamma^2} - \frac{B_3^2}{\beta^2 - C} - 1 = 0$$

et ceci prouve que les deux coniques (A) et (B) sont encore focales. Si donc on suppose maintenant $\beta^2 = C$, les formules (43), (45), (46) se réduisent à

$$(47) \qquad \begin{cases} A_1 = \dfrac{\gamma}{\alpha} a_1, & A_2 = 0, \\ B_1 = \dfrac{\alpha}{\gamma} b_1, & B_3 = 0 \end{cases}$$

et le résultat est obtenu. On remarquera que ce calcul fournit précisément, dans la théorie des surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, les cyclides de Dupin (*voir* Darboux, *Théorie des surfaces*, t. 1, 2e édition, p. 185 et suiv.). C'est un résultat curieux sur l'analogie de problèmes en apparence éloignés. Il résulte de là que, un premier couple de coniques focales pouvant être réduit par déformation à un système de deux droites coïncidantes, et de même un second couple arbitraire par rapport au premier, on peut passer du premier couple au second par une déformation continue : et, en effet, notre déformation VII permet de passer du premier couple au second. Les considérations qui précèdent sont celles qui ont fait découvrir à M. Bricard, dans l'article déjà cité, le mécanisme si élégant constitué de deux coniques focales. Ce mécanisme donne la solution complète de l'équation

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = (a_4 - b_4)^2$$

rencontrée dans la recherche des surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes. Cette équation exprime, comme le remarque Darboux pour la résoudre géométriquement, que chaque sphère de centre (a_1, a_2, a_3) et rayon a_4 est tangente à chaque sphère de centre (b_1, b_2, b_3) et rayon b_4. On a deux séries de sphères à un paramètre; la transformation de Sophus Lie les transforme en deux séries de droites à un paramètre, telles que deux droites quelconques prises dans l'une et l'autre série soient sécantes : on obtient ainsi une quadrique. Cette remarque, due aussi à M. Bricard, eût permis de trouver

encore le résultat qui précède; il est intéressant de constater l'analogie de problèmes de formes si diverses.

Si l'on avait supposé $l = +1$, nous aurions eu le Tableau

$$(48)\quad \begin{cases} (a) \quad a_1 \quad a_2 \quad 0 \qquad\qquad (A) \quad a_1 - \dfrac{m}{2} \quad A_2 \quad 0 \\ (b) \quad b_1 \quad 0 \quad b_3 \qquad\qquad (B) \quad b_1 + \dfrac{m}{2} \quad 0 \quad B_3 \end{cases}$$

car, au lieu de prendre $A_1 = a_1$, $B_1 = b_1 + m$, on peut, en faisant glisser (A) (B) le long de Ox, obtenir les formules (48); on doit avoir

$$(a_1 - b_1)^2 + a_2^2 + b_3^2 = (a_1 - b_1 - m)^2 + A_2^2 + B_3^2$$

et nous écrirons cette formule sous la forme

$$\left(a_1 - B_1 + \frac{m}{2}\right)^2 + a_2^2 + b_3^2 = \left(a_1 - B_1 - \frac{m}{2}\right)^2 + A_2^2 + B_3^2,$$

d'où

$$(49)\quad \begin{cases} a_2^2 + 2ma_1 - C = A_2^2, \\ B_3^2 + 2mB_1 - C = b_3^2 \end{cases}$$

et par adjonction de A_1^2 ou b_1^2 au second membre de la première ou seconde équation (49), on a pour forme canonique de cette déformation

$$(50)\quad \begin{cases} A_1^2 + A_2^2 = \left(a_1 + \dfrac{m}{2}\right)^2 + a_2^2 - C, \qquad A_1 = a_1 - \dfrac{m}{2}, \\ b_1^2 + b_3^2 = \left(B_1 + \dfrac{m}{2}\right)^2 + B_3^2 - C, \qquad b_1 = B_1 - \dfrac{m}{2}. \end{cases}$$

Les formules (50) montrent une réciprocité entre les deux configurations (A), (B) et (a), (b); la courbe plane (a) peut s'échanger, au point de vue des formules, avec la courbe (B) et (A) avec (b).

Nous avons encore trois paramètres, m, C et la position de l'origine sur la droite d'intersection des deux plans rectangulaires qui contiennent les deux courbes; pour $C = m = 0$, on a la transformation identique.

Il est utile de voir qu'on peut trouver un seul et unique système de formules canoniques rassemblant ces deux déformations en apparence distinctes appliquées à un ensemble de deux courbes planes (a), (b) situées dans deux plans rectangulaires. En faisant intervenir un point

d'abscisse x_0 sur la droite Ox, on peut écrire au lieu des formules (39)

$$(51)\qquad \begin{cases} A_1 - x_0 = l(a_1 - x_0), \\ B_1 - x_0 = \dfrac{b_1 - x_0}{l}; \end{cases}$$

posons

$$L = x_0(1 - l),$$

on aura

$$(52)\qquad \begin{cases} A_1 = la_1 + L, \\ B_1 = \dfrac{b_1 - L}{l}; \end{cases}$$

il en résulte que l'on aura finalement le Tableau équivalant à (39) pour notre but :

$$(53)\qquad \begin{cases} (a) \quad a_1 \quad a_2 \quad 0 \qquad (A) \quad la_1 + L \quad A_2 \quad 0 \\ (b) \quad b_1 \quad 0 \quad b_3 \qquad (B) \quad \dfrac{b_1 - L}{l} \quad 0 \quad B_3 \end{cases}$$

Cette fois, de même que l'on a

$$A_1 = la_1 + L,$$

on a

$$b_1 = lB_1 + l$$

et l'on écrira donc

$$(a_1 - B_1 l - L)^2 + a_2^2 + b_3^2 = (la_1 + L - B_1)^2 + A_2^2 + B_3^2,$$

d'où

$$(54)\qquad \begin{cases} A_2^2 = a_1^2(1 - l^2) + a_2^2 - 2La_1(1 + l) - C, \\ b_3^2 = B_1^2(1 - l^2) + B_3^2 - 2LB_1(1 + l) - C; \end{cases}$$

en ajoutant aux deux membres de chaque équation (54) A_1^2 ou b_1^2, on trouve la forme canonique définitive

$$(55)\qquad \begin{cases} A_1^2 + A_2^2 = (a_1 - L)^2 + a_2^2 - C, \qquad A_1 = la_1 + L, \\ b_1^2 + b_3^2 = (B_1 - L)^2 + B_3^2 - C, \qquad b_1 = lB_1 + L \end{cases}$$

qui contient trois constantes arbitraires l, L, C. Pour obtenir le type canonique (40), il suffit de supposer L nul. Pour obtenir le type canonique (50), il suffit de supposer $l = 1$. Ceci montre bien qu'il n'y a pas à considérer ces deux déformations comme distinctes, bien que l'on

puisse avoir avantage à conserver chaque type (40) ou (50) isolément comme forme réduite.

11. Nous devons maintenant considérer $k = 3$. $A_3 = 0$ et supposer que a'_1, a'_2, a'_3 ne soient liées par aucune relation indépendante de A'_1 et A'_2. Par des déplacements d'ensemble effectués sur (a), (b) d'une part, (A), (B) de l'autre, nous obtenons la forme canonique

$$(56)\qquad \begin{cases} A_3 = 0, & A_1 = la_1 & A_2 = ma_2, \\ b_3 = 0, & b_1 = lB_1 + l_1, & b_2 = mB_2 + m_1, \end{cases}$$

où l, m, l_1, m_1 sont des constantes ($lm \neq 0$).

Si $l^2 \neq 1$, on peut supposer $l_1 = 0$; si $m^2 \neq 1$, on peut de même supposer $m_1 = 0$. Supposons donc d'abord $l^2 \neq 1$, $m^2 \neq 1$, nous aurons le Tableau

$$(57)\qquad \begin{cases} (a) & a_1 & a_2 & a_3 \\ (b) & lB_1 & mB_2 & 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (A) & la_1 & ma_2 & 0 \\ (B) & B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix}$$

avec

$$(58)\qquad a_1^2(1 - l^2) + a_2^2(1 - m^2) + a_3^2 = B_1^2(1 - l^2) + B_2^2(1 - m^2) + B_3^2 = C.$$

Le point (a_1, a_2, a_3) décrit une quadrique à centre Q et le point b un plan principal de Q; le point (B_1, B_2, B_3) décrit la même quadrique Q. La connaissance de Q détermine sans ambiguïté l^2, m^2; ayant choisi un des quatre systèmes possibles pour l, m, le point a de Q est remplacé par un point A du plan principal considéré $(la_1, ma_2, 0)$; le point B de Q est remplacé suivant la même loi par un point b du même plan principal et l'on a $ab = AB$. Ce mécanisme, *simplement transformable*, constitué par une quadrique et un plan principal, n'est qu'un cas particulier de celui que nous indiquerons plus bas en dernier lieu. Dans ce Tableau (57), si l ou m devient égal à l'unité, on a un cylindre du second degré et un plan principal mené par l'axe. Si $l = m = 1$, dans le Tableau (57), le mécanisme n'existe plus à notre point de vue, car il se compose de deux plans parallèles que l'on échange par une symétrie par rapport au plan équidistant. Dans (57) et (58), si l'on suppose $C = 0$, on a un cône du second degré et un plan principal.

Si l'on suppose, dans (56), $l = 1$, $l_1 \neq 0$, on trouve un paraboloïde et un plan principal ou un cylindre parabolique et son plan principal, mécanisme rentrant toujours comme cas particulier dans celui qui clôturera cette étude. Si $l = 1$, $m = 1$, on peut supposer $m_1 = 0$ et l'on a toujours le cylindre parabolique et son plan principal.

12. Nous allons enfin trouver le dernier type, type VIII, *mécanisme simplement transformable, composé de deux quadriques homofocales.*

Il existe, par hypothèse, trois relations linéaires homogènes

$$(59)\qquad \begin{cases} A'_1 = l\,a'_1 + m\,a'_2 + n\,a'_3, \\ A'_2 = l_1 a'_1 + m_1 a'_2 + n_1 a'_3, \\ A'_3 = l_2 a'_1 + m_2 a'_2 + n_2 a'_3, \end{cases}$$

de déterminant $|l\ m\ n|$ non nul. Dans une rotation d'ensemble du système $(a)(b)$ autour de l'origine, le point (a_1, a_2, a_3) et le point (a'_1, a'_2, a'_3) subissent la même transformation de coordonnées, de sorte que l'homographie particulière établie entre les points (A'_1, A'_2, A'_3) et (a'_1, a'_2, a'_3) peut être ramenée par une rotation *réelle* convenable à la forme canonique

$$(60)\qquad A'_1 = la'_1, \qquad A'_2 = ma'_2, \qquad A'_3 = na_3$$

avec $lmn \neq 0$. On en déduira comme précédemment

$$(61)\qquad \begin{cases} A_1 = la_1, & A_2 = ma_2, & A_3 = na_3, \\ b_1 = lB_1 + l_1, & b_2 = mB_2 + m_1, & b_3 = nB_3 + n_1. \end{cases}$$

Si $l^2 \neq 1$, on peut supposer $l_1 = 0$ et, de même, si $m^2 \neq 1$ ou $n^2 \neq 1$, on aura le droit d'écrire $m_1 = 0$ ou $n_1 = 0$.

Si donc on suppose $l^2 \neq 1$, $m^2 \neq 1$, $n^2 \neq 1$, on aura simplement

$$(62)\qquad \begin{cases} A_1 = la_1, \quad A_2 = ma_2, \quad A_3 = na_3, \\ b_1 = lB_1, \quad b_2 = mB_2, \quad b_3 = nB_3, \\ a_1^2(1 - l^2) + a_2^2(1 - m^2) + a_3^2(1 - n^2) \\ = B_1^2(1 - l^2) + B_2^2(1 - m^2) + B_3^2(1 - n^2) = C; \end{cases}$$

le point a et le point B décrivent une même quadrique Q à centre;

soient α^2, β^2, γ^2 les carrés des demi-axes, on a

$$(63)\qquad \alpha^2 = \frac{C}{1-l^2}, \qquad \beta^2 = \frac{C}{1-m^2}, \qquad \gamma^2 = \frac{C}{1-n^2}.$$

Le point A et le point b décrivent une même quadrique Q′ coaxiale à Q; α', β', γ' désignant les quantités analogues à α, β, γ, on a

$$(64)\qquad \alpha'^2 = \frac{Cl^2}{1-l^2}, \qquad \beta'^2 = \frac{Cm^2}{1-m^2}, \qquad \gamma'^2 = \frac{Cn^2}{1-n^2};$$

donc

$$(65)\qquad \begin{cases} \alpha^2 - \alpha'^2 = \beta^2 - \beta'^2 = \gamma^2 - \gamma'^2 = C, \\ l = \dfrac{\alpha'}{\alpha}, \qquad m = \dfrac{\beta'}{\beta}, \qquad n = \dfrac{\gamma'}{\gamma}, \end{cases}$$

ce qui prouve que les deux quadriques Q et Q′ sont homofocales.

La donnée de Q et Q′ fixe l, m, n (au signe près) par les formules (65); l'une des huit combinaisons adoptées, la relation qui lie les points correspondants a de Q et A de Q′ (ou B de Q et b de Q′) est ce que l'on appelle souvent une *affinité*, cas très particulier de l'homographie dans l'espace, et l'on a $ab = AB$ quels que soient a sur Q et b sur Q′. Cette proposition a déjà été signalée par Ivory. On remarquera, en vertu de (62), que l'on a

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - C \qquad \text{et} \qquad B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + C.$$

Si l'on suppose $l^2 = 1$, et, par suite, $l = 1$, sans rien restreindre, on ne pourra annuler l_1 et, comme plus haut, on pourra supposer

$$(66)\qquad \begin{cases} A_1 = a_1 + \dfrac{l_1}{2}, \qquad A_2 = ma_2, \qquad A_3 = na_3, \\ b_1 = B_1 + \dfrac{l_1}{2}, \qquad b_2 = mB_2, \qquad b_3 = nB_3; \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(67)\qquad \begin{aligned} &a_2^2(1-m^2) + a_3^2(1-n^2) - 2l_1a_1 \\ &= B_2^2(1-m^2) + B_3^2(1-n^2) - 2l_1B_1 = C, \end{aligned}$$

a ou B décrivent le même paraboloïde Q et b ou A le même paraboloïde Q′ homofocal à Q; tout ce qui a été dit plus haut se répète identiquement, la donnée simultanée de Q et Q′ détermine l_1 complète-

ment et m, n au signe près; l'un des quatre systèmes étant choisi, A et b dérivent sur Q′ des points a et B de Q par la même transformation homographique; la propriété des paraboloïdes peut se déduire par passage à la limite de celle relative aux quadriques à centre unique.

Si l'on suppose $l = 1$, $m = 1$ et $n^2 \neq 1$, on aura de même

$$(68)\quad \begin{cases} A_1 = a_1 + \frac{l_1}{2}, & A_2 = a_2 + \frac{m_1}{2}, & A_3 = na_3, \\ b_1 = B_1 + \frac{l_1}{2}, & b_2 = B_2 + \frac{m_1}{2}, & b_3 = nB_3 \end{cases}$$

et

$$(69)\quad a_3^2(1 - n^2) - 2l_1a_1 - 2m_1a_2 = B_3^2(1 - n^2) - 2l_1B_1 - 2m_1B_2 = C;$$

cette fois on a affaire à deux cylindres paraboliques homofocaux; on peut même supposer, sans restriction, $m_1 = 0$.

Le cas $l = m = n = 1$ ne conduit à rien, sauf une symétrie effectuée sur un couple de deux plans parallèles.

Pour être tout à fait complet, il faut signaler que, dans le cas des formules (62), quadriques à centre, si l'on suppose $n = 1$ avec $C \neq 0$, on tombe sur deux cylindres homofocaux à centres; la transformation se faisant en transformant les sections droites de même cote, on a, somme toute, le mécanisme plan *transformable* (si l'on ne sort pas du plan) constitué par deux coniques homofocales, signalé dès le début de l'étude (§ **2**); j'ai montré au paragraphe **7** qu'un tel mécanisme, pris dans l'espace, est *déformable* à un paramètre. Supposer à la fois $l = m = 1$ dans (62) ne donne que l'un des cas rejetés *a priori*, se ramenant à un déplacement en symétrie.

Dans les formules (62), si l'on suppose $C = 0$, on a affaire à deux cônes homofocaux.

Si donc on rassemble les résultats de ce paragraphe et du précédent, nous voyons que l'on a affaire au *mécanisme simplement transformable constitué par une quadrique arbitraire et une quadrique homofocale à la première; la seconde quadrique peut se réduire en particulier à un plan principal de la première, ou même à son axe de révolution, si la première est de révolution.*

Il n'est pas inutile de faire quelques remarques sur ces mécanismes,

qui sont d'ailleurs, sur les huit types obtenus, le seul exemple de mécanisme transformable et non déformable.

Je vais raisonner pour simplifier sur une quadrique Q à centre

$$(70)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

du genre ellipsoïde si a, b, c sont réels tous trois, du genre hyperboloïde si un ou deux de ces nombres est imaginaire pure. A un point m de Q j'associe sur la quadrique

$$(71)\qquad \frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}+\frac{Z^2}{C^2}-1=0$$

le point M par les formules

$$(72)\qquad \frac{x}{a}=\frac{X}{A},\qquad \frac{y}{b}=\frac{Y}{B},\qquad \frac{z}{c}=\frac{Z}{C}.$$

Si je suppose

$$(73)\qquad A^2=a^2+\lambda,\qquad B^2=b^2+\lambda,\qquad C^2=c^2+\lambda,$$

on a aisément

$$(74)\quad OM^2=X^2+Y^2+Z^2=x^2\frac{A^2}{a^2}+y^2\frac{B^2}{b^2}+z^2\frac{C^2}{c^2}=x^2+y^2+z^2+\lambda=Om^2+\lambda.$$

Si m' et M' sont deux autres points associés, on a aussi

$$(75)\quad OM'^2=Om'^2+\lambda,\qquad Om.OM'=OM.Om'=\frac{A}{a}(xx'+yy'+zz'),$$

le produit $Om.OM'$ étant un produit vectoriel scalaire.

Si donc nous considérons le triangle OmM', on a

$$(76)\qquad mM'^2=Om^2+OM'^2-2Om.OM'$$

et il résulte immédiatement de là que $m'M^2$ est égal à mM'^2 et ceci démontre géométriquement l'existence du mécanisme transformable puisque $m'M=mM'$.

Supposons Q fixe et λ variable : si le point m reste fixe sur la quadrique Q, le point M correspondant décrit une biquadrique gauche dont les équations sont immédiates :

$$(77)\qquad \frac{X^2-x^2}{\frac{x^2}{a^2}}=\frac{Y^2-y^2}{\frac{y^2}{b^2}}=\frac{Z^2-z^2}{\frac{z^2}{c^2}}.$$

où x, y, z sont les coordonnées fixes de m et X, Y, Z les coordonnées courantes. On voit immédiatement que cette biquadratique est l'intersection des deux quadriques homofocales à Q qui passent en m. En effet, soient $a^2+\lambda$, $b^2+\lambda$, $c^2+\lambda$ les carrés des axes de l'une de ces deux quadriques, on a par hypothèse

$$(78)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2+\lambda}+\dfrac{y^2}{b^2+\lambda}+\dfrac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0 \end{cases}$$

et en retranchant, puisque $\lambda \neq 0$,

$$(79)\qquad \frac{x^2}{a^2(a^2+\lambda)}+\frac{y^2}{b^2(b^2+\lambda)}+\frac{z^2}{c^2(c^2+\lambda)}=0.$$

Si donc, dans (77), nous multiplions chaque rapport haut et bas par $\frac{1}{a^2+\lambda}$, $\frac{1}{b^2+\lambda}$, $\frac{1}{c^2+\lambda}$ respectivement, et si nous ajoutons, on obtient

$$(80)\qquad \frac{X^2}{a^2+\lambda}+\frac{Y^2}{b^2+\lambda}+\frac{Z^2}{c^2+\lambda}-1=0,$$

où λ est l'une des deux racines non nulles de (78), ce qui démontre la proposition.

Ceci donne une propriété intéressante : supposons Q et Q′ ellipsoïdes homofocaux, coupons-les par un hyperboloïde H à une nappe, par exemple, homofocal; les courbes d'intersection C et C′ de H avec Q et Q′ sont donc deux courbes correspondantes sur Q et Q′ et alors elles forment un mécanisme transformable situé sur la quadrique H.

Nous avons donc un théorème de géométrie à deux dimensions sur une quadrique Q quelconque : considérons deux lignes de courbure quelconques C et C′ de Q : elles forment un mécanisme transformable. Au point de vue de la réalité, qui est évident, il faut, s'il s'agit de deux quadriques homofocales Q et Q′, qu'elles soient non sécantes, c'est-à-dire du même type s'il s'agit de quadriques à centre. De même, sur une quadrique, on prendra deux lignes de courbure du même système (non sécantes), la correspondance entre ces courbes s'effectue par les

lignes de courbure du système opposé; il y a là une espèce de réciprocité curieuse à confronter avec celle qu'a fourni le mécanisme III. Dans le cas d'une sphère il faudra prendre, si l'on reste sur la sphère, deux familles de coniques sphériques homofocales; j'ai rencontré ce mécanisme comme base pour construire deux surfaces de translation applicables l'une sur l'autre, avec conservation du réseau de translation. Dans le cas de la sphère, on obtient même un système déformable, et non plus simplement transformable, en considérant deux grands cercles orthogonaux.

13. De cette discussion complète, nous avons déduit un résultat simple que je rappelle :

Il existe dans l'espace à trois dimensions un mécanisme transformable, mais non déformable, et un seul; il se compose de deux quadriques homofocales, dont l'une peut être un plan.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un mécanisme soit déformable est qu'il comprenne comme première partie une conique (ou une droite), ou bien qu'il se compose de deux courbes planes dans deux plans rectangulaires.

La notion d'embranchement sert à relier plusieurs types distincts. Je vais récapituler les divers types déformables : il sera entendu que chacun est constitué par une première courbe (a) et une seconde courbe (b), (b) pouvant être accidentellement une surface, et que (a) et (b) se déforment d'une façon continue, de sorte que je n'indique pas la nature de (A) et (B) dans les types qui suivent, (A) n'étant qu'une forme de (a) et (B) de (b); j'indiquerai ensuite les embranchements. Je dresse donc le Tableau :

Numéro du type.	Courbe (a).	Courbe (b).
I.....	Droite D.	Surface de révolution autour de D.
III.....	Droite D.	Courbe plane dans un plan perpendiculaire à D.
V.....	Conique.	Courbe arbitraire.
VII.....	Courbe plane arbitraire.	Courbe plane arbitraire dans un plan perpendiculaire au plan de la première.

J'ai montré que le type III admet un embranchement permettant de convertir la droite D en courbe plane et la courbe plane associée à D en une droite. Le type II est un cas particulier de III lorsque la courbe est un cercle dont D est l'axe; le type IV est un cas particulier soit de V, soit de VII, et en réduisant, par la déformation V ou VII, la conique à une droite, on trouve une configuration formant embranchement entre IV et I. Le type VI est un cas particulier de I, ou encore de IV, si nous réduisons la quadrique à sa méridienne.

On pourra remarquer qu'il y a un mécanisme qui, en apparence, ne figure pas dans la discussion : nous avons remarqué que le mécanisme V deviendrait plus intéressant encore s'il était constitué non pas d'une conique et d'une courbe arbitraire, mais de deux coniques (a), (b) d'ailleurs arbitraires. Déformons-le de façon à ce que (a) devienne une conique (A) de même distance focale, et que (b) devienne une biquadratique gauche (B). Partons au contraire de (a), (b) en changeant (b) en une conique (b') de même distance focale et (a) en une biquadratique gauche (a'). Le mécanisme (A), (B) peut être *transformé* en le mécanisme (a'), (b'). La conique (A) se trouve transformée en biquadratique, la biquadratique gauche (B) en conique : mais on s'aperçoit aisément que cette transformation rentre dans la transformation plus étendue échangeant une quadrique Q avec un plan principal P (*voir* § **11**). Dans P traçons deux coniques arbitraires, l'une sera appelée (A), l'autre (b), la transformation ponctuelle entre Q et P transforme (A) en biquadratique (a) et (b) en biquadratique (B) : nous avons ainsi obtenu le mécanisme (A), (B) et son transformé (a), (b). Ce mécanisme est en réalité déformable, avec une configuration d'embranchement formé de deux coniques.

On peut remarquer encore que la considération d'un triangle Oab prenant une nouvelle forme OAB telle que

$$(81)\qquad \begin{cases} OA^2 + OB^2 = Oa^2 + Ob^2, \\ OA.OB = Oa.Ob \end{cases}$$

peut suffire à engendrer presque tous les types; il s'agit d'un produit scalaire dans la seconde égalité (81).

14. Les limites de réalité sont faciles à obtenir; je n'y insiste pas.

Je préfère donner une application intéressante à la géométrie des surfaces à courbure totale constante, positive ou négative. Sur la sphère nous avons trouvé, en vertu du type VIII, un mécanisme transformable constitué de deux coniques sphériques homofocales : nous nous bornons pour la réalité à deux coniques non sécantes, que nous pouvons considérer comme ellipses relatives à deux points F et F′ de la sphère; la correspondance entre les points des deux ellipses se fait par les hyperboles sphériques de foyers F et F′; a et b étant deux points pris au hasard sur la première et seconde ellipse, A et B étant les points correspondants sur la seconde et première respectivement, on a $ab = \mathrm{AB}$, l'égalité se rapportant aux distances rectilignes, mais pouvant, sur la sphère, être remplacée par l'égalité des arcs de grand cercle ab et AB; donc, si l'on préfère, l'égalité se rapportera aux distances géodésiques. Nous avons ainsi sur la sphère un mécanisme transformable constitué par les deux coniques et les géodésiques reliant les points d'une conique aux points de l'autre; ceci subsistera dans une déformation de la sphère, et par une homothétie d'origine O et de rapport i, nous pouvons étendre ceci à toute surface à courbure totale constante, positive ou négative. Dans une projection stéréographique, suivie d'une inversion plane, on pourra réduire le ds^2 de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 + a^2 = 0$ et par suite aussi celui d'une surface à courbure totale négative à la forme $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ et l'image du mécanisme dans le plan Oxy se composera de deux quartiques bicirculaires, convenablement choisies : il suffit de reprendre les raisonnements exposés par Darboux (*Théorie des surfaces*, t. 3, p. 415).

Sur la sphère nous avons, d'autre part, un mécanisme déformable constitué par deux grands cercles orthogonaux d'équations respectives

$$(82) \qquad \begin{cases} z = 0, & x^2 + y^2 = 1, \\ y_1 = 0, & x_1^2 + z_1^2 = 1; \end{cases}$$

on fait correspondre à un point $(x, y, 0)$ du premier le point qui a pour abscisse λx, où λ est une constante arbitraire, et au point $(x_1, 0, z_1)$ du second le point d'abscisse $\frac{x_1}{\lambda}$. Le paramètre de déformation est λ.

Ce mécanisme sera remplacé, sur une surface à courbure totale constante, positive ou négative, par deux géodésiques orthogonales quelconques. Avec le ds^2 caractéristique des surfaces à courbure négative $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$, on aura pour image deux cercles orthogonaux entre eux et à l'axe des x.

On pourrait chercher à réaliser sur d'autres surfaces des mécanismes analogues constitués par des géodésiques de longueur constante reliant une série de points A_i à une série de points B_j de la surface; dans une transformation ou déformation, chaque distance géodésique comptée sur la surface doit rester constante. Sur les surfaces à courbure totale constante, nous avons donné des exemples, distincts de ceux, peu intéressants, qui seraient obtenus par une simple application de la surface sur elle-même (dans le cas de la sphère, déplacement ou symétrie).

15. Une autre application intéressante donne soit un couple de surfaces applicables, soit une famille continue de déformées d'une surface, comme le montre Darboux (*Théorie des surfaces*, t. 1, 2e éd., p. 181) d'après Peterson. En modifiant les notations de Darboux et adoptant celles de ce travail, nous avons deux surfaces S et S_1 définies par les formules

$$(83)\qquad S\left\{\begin{aligned} X &= Ab_1 - \int A' a_1\, d\alpha,\\ Y &= Ab_2 - \int A' a_2\, d\alpha,\\ Z &= Ab_3 - \int A' a_3\, d\alpha;\end{aligned}\right.$$

$$(84)\qquad S_1\left\{\begin{aligned} X_1 &= AB_1 - \int A' A_1\, d\alpha,\\ Y_1 &= AB_2 - \int A' A_2\, d\alpha,\\ Z_1 &= AB_3 - \int A' A_3\, d\alpha;\end{aligned}\right.$$

où a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3 sont les six fonctions de α et b_1, b_2, b_3, B_1, B_2, B_3 les six fonctions de β déjà rencontrées et A une nouvelle fonc-

tion arbitraire de α. On trouve pour ds^2 de S

$$(85)\qquad \begin{aligned} ds^2 = {} & A^2(db_1^2 + db_2^2 + db_3^2) \\ & + 2A\,dA\,[(b_1 - a_1)\,db_1 + (b_2 - a_2)\,db_2 + (b_3 - a_3)\,db_3] \\ & + [(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2]\,dA^2. \end{aligned}$$

Si les courbes (a), (b) constituent avec (A), (B) un de nos mécanismes transformables ou déformables, le coefficient de dA^2 et $A\,dA$ sera le même en passant à S_1, et il suffira de chercher si l'on peut obtenir la relation complémentaire

$$(86)\qquad db_1^2 + db_2^2 + db_3^2 = dB_1^2 + dB_2^2 + dB_3^2,$$

et alors les deux surfaces auront même ds^2; la relation (86) rompt la symétrie entre les deux courbes (a), (A) d'une part et (b), (B) de l'autre; nous devrons donc passer en revue les types I à VIII, avec la précaution, pour chacun d'eux, de débaptiser au besoin (a) et (b) en échangeant leurs noms. Quelques remarques simples permettront de se borner aux essais strictement indispensables. Si (a), (b) subissent une translation d'ensemble, S reste inaltérée; si l'ensemble (a), (b) est déplacé autour de l'origine, S subit ce même déplacement. Donc on peut, comme précédemment, infliger à l'ensemble (a), (b) le déplacement le plus général; si (a) est un point, donc si $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, S est un cône; si (b) est un point, donc si $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, S est une courbe. Donc nous pouvons écarter le cas où le mécanisme comprend une courbe réduite à un point (type II ou divers autres types signalés sans numérotage). D'autre part, si un mécanisme comprend une droite, on ne pourra utiliser la droite que comme courbe (a), et non comme courbe (b). En effet, si (b) est une droite, soit $b_1 = b_2 = 0$, X et Y ne dépendent que de α, donc S est un cylindre, donc nous pouvons écarter ces solutions banales.

Passons en revue les types : pour I, il y a une droite qui est donc (a), on aurait ensuite

$$b_1^2 + b_2^2 = B_1^2 + B_2^2, \qquad db_1^2 + db_2^2 = dB_1^2 + dB_2^2,$$

ce qui donne simplement une rotation autour de Oz, donc on n'a rien. Le type II contenant une courbe point est à rejeter. Le type III a été utilisé par Peterson, et Darboux a exposé quelques résultats simples

relatifs aux quadriques. J'ai moi-même montré, au *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1921, comment on en déduit trois types de surfaces ayant même forme de ds^2 qu'une quadrique arbitraire, tels que deux surfaces réelles de type différent ne puissent se recouvrir physiquement.

Le type IV et le type V nous donneront des surfaces intéressantes, que j'étudierai un peu plus bas. Le type VI est à rejeter, car l'une des deux courbes (b) ou (B) est une droite, quelle que soit la façon de nommer les courbes. Les types VII et VIII sont aussi à rejeter. Prenons, en effet, le type VII : en raison de la symétrie qu'y jouent (a) et (b), peu importe le nom (a) ou (b) donné à l'une des deux courbes planes. Adoptons le Tableau (39); on doit écrire

$$(87)\qquad \begin{cases} dB_1^2 + dB_3^2 = db_1^2 + db_3^2, \\ B_1^2 + B_3^2 = b_1^2 + b_3^2 + C, \\ B_1 = \dfrac{b_1}{l}. \end{cases}$$

Posons

$$b_1\sqrt{1-\frac{1}{l^2}} = x, \qquad b_3 = y, \qquad B_1 = z,$$

on a à intégrer

$$(88)\qquad \begin{cases} dz^2 = dx^2 + dy^2, \\ z^2 = x^2 + y^2 + C. \end{cases}$$

En éliminant z, on a

$$(y\,dx - x\,dy)^2 + C(dx^2 + dy^2) = 0,$$

et, en regardant y comme fonction de x,

$$(89)\qquad y - xy' + \sqrt{-C}\sqrt{1+y'^2} = 0.$$

L'équation (89) est une équation de Clairaut : l'intégrale générale est une droite tangente au cercle de centre O et rayon $\sqrt{-C}$, mais alors (b) est une droite, donc ceci est à rejeter. L'intégrale singulière de (89),

$$x^2 + y^2 + C = 0,$$

ne donne pas une solution de (88). Si, pour le même type VII, on

prenait le Tableau (48), on aurait

$$b'_3 = B'_3 \qquad \text{ou} \qquad b_3 = B_3 - K$$

et, en remplaçant dans (49), on voit que (B) serait une droite. Donc tout cela est à rejeter.

Reste le type VIII : il faut trouver sur les deux quadriques homofocales deux courbes correspondantes dont les arcs infiniment petits correspondants ont même longueur ; si nous adoptons les coordonnées elliptiques ρ, ρ_1, ρ_2 dans l'espace, $\rho_2 = 0$ et $\rho_2 = \rho_2^0$ étant les équations des deux quadriques Q et Q′, aux points correspondants des deux surfaces les coordonnées ρ et ρ_1 ont la même valeur, d'après ce qui a été expliqué. Prenons le ds^2 dans ce système de coordonnées et nous trouvons immédiatement l'équation

$$(90) \qquad \frac{d\rho^2}{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)} - \frac{d\rho_1^2}{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)} = 0,$$

qui est précisément l'équation des asymptotiques de l'une ou l'autre quadrique, $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$ étant l'équation de l'une d'elles. Ce résultat est à peu près évident *a priori*, car nous avons vu que les équations de la correspondance reviennent à une affinité : une droite se transformant en droite, les génératrices rectilignes de Q se transforment dans les génératrices rectilignes de Q′ et un segment de génératrice de Q conserve la même longueur en passant de Q à une quadrique homofocale voisine, puis à une autre, puis à Q′, car ce segment est normal aux trajectoires de ses extrémités. Les courbes (b) et (B) étant des droites, nous n'obtenons rien.

Nous n'aurons donc à étudier que le type IV et le type V, qui avec le type III (Peterson-Darboux) fourniront toutes les surfaces de même ds^2 susceptibles d'être obtenues ici. Je rappelle que, sur ces surfaces, les courbes α et β sont conjuguées; les courbes $\beta = \text{const.}$ sont les courbes de contact de cônes circonscrits, les courbes $\alpha = \text{const.}$ sont les courbes de contact de cylindres circonscrits.

16. Je prends le mécanisme III qui donne les surfaces de Peterson-

Darboux :

$$S\begin{cases} X = A\,b_1, \\ Y = A\,b_2, \\ Z = \int a_3\,dA, \end{cases} \qquad S_1\begin{cases} X_1 = AB_1, \\ Y_1 = AB_2, \\ Z_1 = \int A_3\,dA, \end{cases}$$

avec les conditions

$$(91) \qquad \begin{cases} B_1^2 + B_2^2 = b_1^2 + b_2^2 - C, \\ B_1'^2 + B_2'^2 = b_1'^2 + b_2'^2, \\ A_3^2 = a_3^2 + C. \end{cases}$$

Sur ces surfaces, les courbes $\alpha =$ const. et $\beta =$ const. forment un système conjugué pour une double raison comme conséquence du théorème de M. Kœnigs. La méthode de Peterson consiste à calculer B_1 et B_2, quand b_1 et b_2 sont données, en écrivant

$$(92) \qquad \begin{cases} B_1 = \rho\cos\theta, \qquad B_2 = \rho\sin\theta, \\ \rho^2 = b_1^2 + b_2^2 - C, \\ \theta' = \dfrac{\sqrt{(b_1 b_2' - b_2 b_1')^2 - C(b_1'^2 + b_2'^2)}}{b_1^2 + b_2^2 - C}. \end{cases}$$

Je vais indiquer quelques conditions nécessaires pour que les déformées d'une surface S algébrique de ce type soient toutes algébriques quand C varie; je fournirai des solutions élégantes de cette espèce. Mais les solutions de ce problème précis devant être probablement en assez petit nombre, je donnerai le moyen d'obtenir, quand C prend une valeur convenablement choisie, une surface S_1 algébrique en même temps que S, de sorte que nous aurons cette fois deux échantillons seulement algébriques dans la famille; pour ce problème moins précis, nous trouverons immédiatement des solutions en nombre illimité.

Pour traiter le premier problème, nous aurons d'abord à déterminer a_3 et A en fonction d'un paramètre α de façon que

$$\int a_3\,dA \qquad \text{et} \qquad \int \sqrt{a_3^2 + C}\,dA$$

soient fonctions algébriques de A. Une solution très étendue s'obtient

en supposant $A = P(a_3^2)$, où P désigne un polynome entier; on aura

$$P(a_3^2) = P(A_3^2 - C) = Q(A_3^2),$$

où Q désigne un autre polynome entier. Le cas le plus simple sera

$$A = a_3^2 - K,$$

d'où

$$\int a_3\, dA = \frac{2}{3}(A + K)^{\frac{3}{2}}, \qquad \int A_3 dA = \frac{2}{3}(A + K + C)^{\frac{3}{2}}.$$

Nous avons ensuite à écrire que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont algébriques; je considère la courbe plane (b_1, b_2) comme enveloppe de la droite

$$x \sin\omega - y\cos\omega = p. \tag{93}$$

Désignant par p' la dérivée $\frac{dp}{d\omega}$, r la distance du point (b_1, b_2) à l'origine, s l'arc, R le rayon de courbure, on a

$$\left\{\begin{array}{ll} b_1 = \quad p\sin\omega + p'\cos\omega, & r^2 = p^2 + p'^2, \\ b_2 = -p\cos\omega + p'\sin\omega, & R = p + p'', \\ ds = \quad (p + p'')\, d\omega, & R = \dfrac{r\,dr}{dp}, \\ b_1 b_2' - b_2 b_1' = p(p + p''). & \end{array}\right. \tag{94}$$

On en déduit

$$d\theta = \frac{ds\sqrt{p^2 - C}}{r^2 - C}, \tag{95}$$

formule qui ne fait plus intervenir que des éléments géométriques.

La fonction $e^{i\theta}$ doit être fonction algébrique des coordonnées b_1, b_2. Considérons une racine de l'équation $r^2 - C = 0$, soient r_0, s_0, p_0', R_0, ω_0 les valeurs numériques en ce point des éléments r, s, ... Le résidu de $\frac{d\theta}{ds}$ pour $r = r_0$ est

$$\frac{\sqrt{p_0^2 - r_0^2}}{2 r_0 \dfrac{dr_0}{ds}} = i\frac{dp_0}{d\omega_0} : 2 r_0 \frac{dr_0}{ds_0},$$

et ceci se réduit à $\frac{i}{2}$, car

$$r_0\, dr_0 = R_0\, dp_0, \qquad ds_0 = R_0\, d\omega_0.$$

En intégrant, on aura

$$\theta = \frac{-\varepsilon i}{2}\log(s-s_0) + F(s-s_0),$$
$$e^{i\theta} = (s-s_0)^{\frac{\varepsilon}{2}}\Phi(s-s_0),$$

où F et Φ sont fonctions régulières de s pour $s = s_0$. Une circulation faite autour du point racine de $r^2 - C$ augmente $\log(s-s_0)$ de $2i\pi$ et θ de $\varepsilon\pi$, $\tang\theta$ ne varie pas. Pour que $e^{i\theta}$ soit algébrique, il faudra donc simplement que les périodes cycliques de l'intégrale (95) soient commensurables avec π. On voit aisément qu'une condition *nécessaire, mais non suffisante en général*, est que l'arc s soit lui-même algébrique, autrement dit que la courbe (b_1, b_2) soit développée d'une autre courbe algébrique. Car nous pouvons, si C est très grand, poser $C = \frac{-1}{K^2}$, où K sera infiniment petit, et développer

$$\frac{d\theta}{ds} = K + \frac{K^3}{2}(p^2 - 2r^2) + \ldots,$$
$$\theta = Ks + K^3\theta_1 + K^5\theta_2 + \ldots,$$

où θ_1, θ_2, ... sont certaines fonctions de s

$$(96)\qquad \left\{\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i(Ks + K^3\theta_1 + \ldots) - \frac{1}{2}(Ks + \ldots)^2 + \ldots \\ &= 1 + iKs - \frac{K^2}{2}s^2 + iK^3\left(\theta_1 - \frac{s^3}{6}\right) + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et alors les coefficients du développement (96) doivent être algébriques; finalement s, θ_1, θ_2, ... doivent être algébriques. Nous allons constater que, si la courbe (b_1, b_2) est développée de conique, $\tang\theta$ est effectivement algébrique. Écrivons donc

$$(97)\qquad b_1 = a\cos^3\varphi, \qquad b_2 = b\sin^3\varphi$$

de façon à avoir, si $a \neq b$, une développée d'ellipse, et si $a = b$ une hypocycloïde à quatre rebroussements.

On trouve sans peine

$$(98)\qquad d\theta = \frac{3\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{a^2b^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi - C(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)}}{a^2\cos^6\varphi + b^2\sin^6\varphi - C}\,d\varphi,$$

et, en posant $\cos 2\varphi = u$,

$$(99) \qquad d\theta = \frac{-du\sqrt{a^2b^2(1-u^2) - 2C[a^2(1+u) + b^2(1-u)]}}{a^2(1+u)^3 + b^2(1-u)^3 - 8C}.$$

Le calcul est valable pour $a = b$ ou $a \neq b$. Si C est négatif, pour la réalité, aucune condition n'est imposée à φ, donc u peut varier de -1 à $+1$; si $C > 0$, il faudra que C soit inférieur au maximum de

$$\frac{a^2b^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi},$$

d'où résulte aisément

$$C < \frac{a^2b^2}{(a+b)^2},$$

et alors il y a deux valeurs de φ comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ annulant le radical de la formule (98), donc deux valeurs de u comprises entre -1 et $+1$ annulant le radical de la formule (99) et limitant entre elles la variation de u. De toutes façons, le radical de la formule (99) a deux racines réelles u_0, u_1 telles que

$$u_0 < -1 < +1 < u_1 \quad \text{si} \quad C < 0$$

et

$$-1 < u_0 < u_1 < +1 \quad \text{si} \quad 0 < C < \frac{a^2b^2}{(a+b)^2}.$$

Si nous écrivons

$$\frac{u - u_0}{u_1 - u} = t^2, \qquad u = \frac{u_1t^2 + u_0}{1 + t^2},$$

l'intégrale devient, A, B, C, D étant certaines constantes,

$$(100) \qquad d\theta = \frac{t^2\,dt}{At^6 + Bt^4 + Ct^2 + D}.$$

Considérons le multiplicateur de dt comme une fraction du troisième degré en t^2, on aura, h, k, ..., l_1 étant des constantes,

$$d\theta = \frac{h_1\,dt}{1 + h^2t^2} + \frac{k_1\,dt}{1 + k^2t^2} + \frac{l_1\,dt}{1 + l^2t^2}.$$

Les explications données plus haut sur les racines de $r^2 - C = 0$

montrent que l'on doit avoir

$$h_1 = h, \qquad k_1 = k, \qquad l_1 = l.$$

D'autre part, la somme des résidus de la fraction

$$\frac{x}{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}$$

est nulle, donc on a

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 0.$$

Si dans (100) nous remplaçons t par $\frac{1}{t}$, on est conduit par le même procédé à la relation

$$h + k + l = 0.$$

L'intégration donne

$$\theta = \text{arc tang}\, ht + \text{arc tang}\, kt + \text{arc tang}\, lt,$$

$$\text{tang}\,\theta = \frac{(h + k + l)t - hklt^3}{1 - (kl + lh + hk)t^2} = -hklt^3 = mt^3.$$

On en déduit

$$d\theta = \frac{3mt^2\,dt}{1 + m^2t^6}. \tag{101}$$

C'est une chose aisée de vérifier qu'effectivement le second membre de (100) a cette forme : les fonctions $B + C$ et $\frac{B - C}{u_1 - u_0}$ sont des fonctions symétriques de u_1 et u_0 dont on constate aisément qu'elles se réduisent à zéro, mais nos prévisions rendent cette vérification superflue. On a

$$\left\{\begin{aligned} m^2 &= \frac{a^2(1 + u_1)^3 + b^2(1 - u_1)^3 - 8C}{a^2(1 + u_0)^3 + b^2(1 - u_0)^3 - 8C}, \\ \text{tang}\,\theta &= m\left(\frac{u - u_0}{u_1 - u}\right)^{\frac{3}{2}}, \\ \rho &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2(1 + u)^3 + b^2(1 - u)^3 - 8C}, \end{aligned}\right. \tag{102}$$

u_1 et u_0 étant les deux racines de

$$a^2b^2(1 - u^2) - 2C[a^2(1 + u) + b^2(1 - u)] = 0,$$

C étant une constante au plus égale à $\frac{a^2b^2}{(a + b)^2}$.

Désignons par $P(u)$ le polynome

$$a^2(1+u)^3+b^2(1-u)^3-8C;$$

le calcul qui précède fournit l'identité

$$P(u)=\frac{(u-u_0)^3\,P(u_1)+(u_1-u)^3\,P(u_0)}{(u_1-u_0)^3},$$

que l'on obtient d'ailleurs en cherchant à résoudre l'équation $P(u)=0$ par l'une des méthodes classiques. On a alors les surfaces S et S_1 (K et K_1 étant deux constantes)

$$S\quad(103)\qquad\left\{\begin{aligned} X&=\frac{a}{2\sqrt{2}}\,l(1+u)^{\frac{3}{2}},\\ Y&=\frac{b}{2\sqrt{2}}\,l(1-u)^{\frac{3}{2}},\\ Z&=\frac{2}{3}(Kl+K_1)^{\frac{3}{2}}:\end{aligned}\right.$$

$$S_1\quad(104)\qquad\left\{\begin{aligned} X_1&=\frac{\sqrt{P(u_1)}}{2\sqrt{2}}\,l\left(\frac{u-u_0}{u_1-u_0}\right)^{\frac{3}{2}},\\ Y_1&=\frac{\sqrt{P(u_0)}}{2\sqrt{2}}\,l\left(\frac{u_1-u}{u_1-u_0}\right)^{\frac{3}{2}},\\ Z_1&=\frac{2}{3}\left(Kl+K_1+\frac{C}{K^2}\right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}\right.$$

Pour $C=0$, la surface S_1 se réduit à S. Si C est négatif, en supposant $K>0$, il faut que u soit compris entre -1 et $+1$ et que $l>-\frac{K_1}{K}$ pour que le point de S soit réel; mais, puisque $u_0<-1$ et $+1<u_1$, il faut encore que $l>-\frac{K_1}{K}-\frac{C}{K^3}$ pour que le point correspondant de S_1 soit réel, donc S_1 ne recouvre S qu'en partie. De même, pour qu'un point de S_1 soit réel, il faut et il suffit que

$$u_0<u<u_1\quad\text{et}\quad l>\frac{-K_1}{K}-\frac{C}{K_3};$$

mais alors le point correspondant de S n'est réel que si $-1<u<+1$, donc S portée sur S_1, n'en recouvre elle aussi qu'une partie.

Si l'on suppose $o < C < \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2}$, on a des résultats semblables qui reviennent au fond à échanger les rôles de S et S_1. On le voit aussi en posant

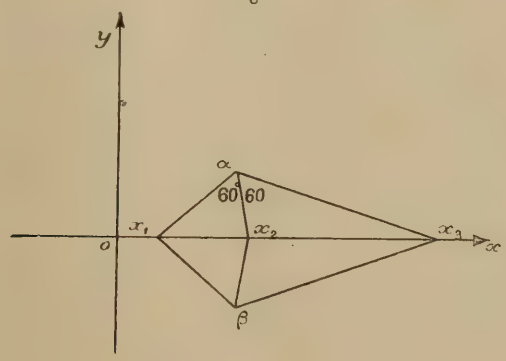
$$c = \frac{2u - u_0 - u_1}{u_1 - u_0}, \qquad a_1 = \sqrt{\frac{P(u_1)}{8}}, \qquad b_1 = \sqrt{\frac{P(u_0)}{8}},$$

$$K_1 + \frac{C}{K^2} = K'_1, \qquad C_1 = -C;$$

les rôles de S et S_1 s'échangent.

Les résultats que nous venons de découvrir par voie déductive peuvent être énoncés synthétiquement, sous la forme suivante, qui ne fera plus de différence entre la développée d'ellipse ou d'hyperbole ou l'hypocycloïde à quatre rebroussements : soit $P(x)$ un polynome du troisième degré (ou du second degré) qui a ses racines réelles et dis-

Fig. 3.



tinctes; marquons (*fig.* 3), sur l'axe des x, les racines x_1, x_2 et x_3 ($x_3 = \infty$ si l'équation est du second degré). Il existe un point α au-dessus de Ox, tel que l'on voit de ce point le segment $x_1 x_2$ et le segment $x_2 x_3$ sous un angle de 60°; soit β le point symétrique de α par rapport à Ox. Si le plan xOy représente un plan complexe, et α, β désignent les affixes des points α, β, on a manifestement

$$\frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta} = j\frac{x_2 - \alpha}{x_2 - \beta} = j^2\frac{x_3 - \alpha}{x_3 - \beta},$$

où j est une racine cubique imaginaire de l'unité. On en conclut donc

que l'expression $\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^3$ a une seule et même valeur pour les trois racines de l'équation $P(x)$ et par suite

$$P(x) \equiv \lambda(x-\alpha)^3 + \mu(x-\beta)^3, \tag{105}$$

où λ, μ, α, β sont certaines constantes; α et β sont données par une équation du second degré quand P est donné; si P a ses trois racines réelles et distinctes, α et β sont imaginaires conjuguées, λ et μ aussi. Telle est l'interprétation géométrique élégante, que m'a signalée M. Kœnigs, de cette méthode classique de résolution de l'équation $P(x) = 0$ [1]. Supposons donc *donné* un polynome arbitraire $f(x)$ du troisième degré (ou du second); nous supposons que $f'(x)$ n'est pas carré parfait. Dans ces conditions, posons

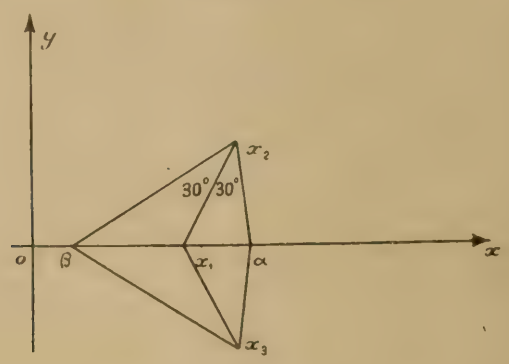
$$P(x) \equiv f(x) - C,$$

où C est une constante arbitraire, que nous ne ferons varier que dans les intervalles convenables de façon que P ait une racine réelle et deux imaginaires conjuguées. A chaque valeur de C correspondent, par une

---

[1] Si l'on suppose que P a une racine réelle x_1 et deux racines imaginaires x_2, x_3 (*fig.* 4), on joint x_2 à x_1 et l'on fait tourner de 30° dans un sens ou l'autre

Fig. 4.



autour de x_2 le rayon allant de x_2 à x_1; les deux droites ainsi obtenues percent Ox aux points réels α, β. Dans ce cas, si P était du second degré, à racines imaginaires, x_2 et x_0 sont ces racines et x_1 est le point à l'infini sur Ox.

équation du second degré, deux valeurs u_0, u_1 réelles et deux nombres λ_0, λ_1 réels tels que l'on ait

$$(106)\qquad \begin{cases} f(u) - C \equiv \lambda_1 (u - u_0)^3 + \lambda_0 (u - u_1)^3, \\ f'(u) \equiv 3[\lambda_1 (u - u_0)^2 + \lambda_0 (u - u_1)^2], \\ f''(u) \equiv 6[\lambda_1 (u - u_0) + \lambda_0 (u - u_1)]. \end{cases}$$

Il en résulte qu'en écrivant

$$X = t\sqrt{\lambda_1 (u - u_0)^3},$$
$$Y = t\sqrt{\lambda_0 (u - u_1)^3},$$
$$Z = \int \sqrt{H(t) + C}\, dt,$$

on définit une infinité de surfaces variables avec C ayant toutes pour ds^2

$$ds^2 = [f(u) + H(t)]\, dt^2 + t f'(u)\, dt\, du + \frac{3t^2}{8} f''(u)\, du^2,$$

donc applicables les unes sur les autres. Pour avoir des surfaces algébriques il suffira, par exemple, de supposer que la relation entre H et t est $t = \varphi(H)$, où φ est un polynome entier. En posant $H + C = H_1$, on a encore $t = \psi(H_1)$, où H_1 est un nouveau polynome, et l'intégrale Z devient

$$Z = \int \sqrt{H_1}\, \psi'(H_1)\, dH_1,$$

qui est un polynome entier en $\sqrt{H_1}$.

Supposons λ_1 et λ_0 positifs, $u_1 > u_0$; on fera varier u par valeurs supérieures à u_1, chaque plan horizontal coupe la surface suivant une développée d'hyperbole; dans ce cas, il n'y a pas de restriction à la variation de C.

Supposons $u_1 > u_0$, $\lambda_0 < 0$ et $\lambda_1 > 0$, on fera varier u entre u_0 et u_1; chaque plan horizontal coupe la surface suivant une développée d'ellipse si $\lambda_0 + \lambda_1 \neq 0$ [$f(u)$ du troisième degré], suivant une hypocycloïde à quatre rebroussements si $\lambda_0 + \lambda_1 = 0$ [$f(u)$ du second degré]. Dans ce cas, C ne peut varier que dans un intervalle bien déterminé.

D'ailleurs, on voit aisément que remplacer u par $\lambda U + \mu$ effectue la même substitution sur u_0 et u_1, tandis que λ_0 et λ_1 sont remplacées par $\lambda_0\lambda^2$ et $\lambda_1\lambda^2$; que l'on peut remplacer $f(u)$ par $\rho f(u)$, à condition de remplacer λ_1 et λ_0 par $\rho\lambda_1$, $\rho\lambda_0$, C par ρC sans toucher à u_0 et u_1, t étant remplacé par $\frac{t}{\sqrt{\rho}}$. On peut donc réduire le polynome $f(u)$ à la forme réduite $u^3 + 3pu$. Dans ce cas, on trouve immédiatement que u_0 et u_1 sont racines de

$$u^2 - \frac{C}{p}u - p = 0.$$

Si p est positif, C peut varier arbitrairement; u_1 est positif, u_0 négatif et l'on a

$$u_1 = \frac{C}{2p} + \sqrt{\frac{C^2}{4p^2} + p}$$

$$u_0 = \frac{C}{2p} - \sqrt{\frac{C^2}{4p^2} + p} \qquad [\lambda_0 = -u_0(u_1 - u_0)],$$

$$u_1 - u_0 = \sqrt{\frac{C^2}{p^2} + 4p} \qquad [\lambda_1 = u_1(u_1 - u_0)].$$

Si p est négatif, il faudra prendre C inférieur à $-2\sqrt{-p^3}$; u_0 et u_1 sont réels et positifs, λ_1 est positif, λ_0 négatif, on fait varier u de u_0 à u_1.

Si l'on suppose le polynome f du second degré, on pourra écrire les formules plus simples

$$(107) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{t}{k\sqrt{2}}(k^2 + u)^{\frac{3}{2}}, \\ Y &= \frac{t}{k\sqrt{2}}(k^2 - u)^{\frac{3}{2}}, \\ Z &= \int \sqrt{H(t) - k^2}\, dt, \end{aligned} \right.$$

où k est le paramètre de déformation; le ds^2 est

$$ds^2 = [3u^2 + H(t)]\,dt^2 + 6u\,dt\,du + \frac{9}{4}t^2\,du^2.$$

17. En prenant le type III, nous aurions pu écrire, en suivant une

méthode légèrement différente,

$$(108)\qquad \begin{cases} B_2^2 = b_1^2 + b_2^2 - B_1^2 - C, \\ B_2'^2 = b_1'^2 + b_2'^2 - B_1'^2. \end{cases}$$

L'élimination de B_2 est immédiate :

$$(109)\qquad (b_1^2 + b_2^2 - B_1^2 - C)(b_1'^2 + b_2'^2 - B_1'^2) - (b_1 b_1' + b_2 b_2' - B_1 B_1')^2 = 0.$$

Si nous considérons la quadrique Q

$$x^2 + y^2 - z^2 - C = 0,$$

le cône circonscrit à Q, de sommet x_0, y_0, z_0, a pour équation

$$(x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - C)(x^2 + y^2 - z^2 - C) - (x_0 x + y_0 y - z_0 z - C)^2 = 0$$

ou encore

$$(110)\qquad \begin{aligned} &(x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - C)[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2] \\ &\qquad - [x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - z_0(z - z_0)]^2 = 0. \end{aligned}$$

L'équation (108) exprime donc que b_1', b_2', B_1' sont les paramètres directeurs d'une génératrice du cône de sommet (b_1, b_2, B_1) circonscrit à Q. Autrement dit, la courbe lieu du point (b_1, b_2, B_1) est l'arête de rebroussement d'une développable circonscrite à Q. Si donc nous nous donnons la valeur de la constante C, la quadrique Q est connue, nous pouvons circonscrire à Q une développable et nous prendrons pour b_1, b_2, B_1 les coordonnées d'un point courant de l'arête de rebroussement; en prenant ensuite $B_2 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + B_1^2 - C}$, nous aurons B_2; nous donnant ensuite a_3 et A, nous avons un *couple* S et S_1 obtenu sans quadratures autres que $\int a_3\, dA$ et $\int A_3\, dA$. Ici S et S_1 jouant le même rôle, on peut supposer $C > 0$ et même $C = 1$, car on peut multiplier par un même facteur les fonctions $a_1, a_2, \ldots, B_3$, à condition de diviser A par le même facteur. On pourra donc écrire

$$(111)\qquad a_3 = \operatorname{sh}\varphi, \qquad A_3 = \operatorname{ch}\varphi, \qquad A = t - t'',$$

où t est une fonction algébrique de e^{φ}, de sorte que

$$\int \operatorname{ch}\varphi\, d(t-t'') = t' \operatorname{sh}\varphi - t'' \operatorname{ch}\varphi,$$

$$\int \operatorname{sh}\varphi\, d(t-t'') = t' \operatorname{ch}\varphi - t'' \operatorname{sh}\varphi.$$

On prendra d'autre part une courbe algébrique C arbitraire sur la quadrique $x^2+y^2-z^2-1=0$; l'arête de rebroussement Γ de la développable D circonscrite à Q le long de C s'obtiendra algébriquement, nous aurons ainsi un couple algébrique S, S_1; quand le paramètre de déformation est nul, nous avons S; quand il devient égal à 1, nous obtenons S_1; mais, pour les autres valeurs de ce paramètre, nous aurons des surfaces déformées de S ou S_1 qui ne seront plus algébriques.

Donnons immédiatement un exemple simple; sur la quadrique Q,

$$x^2+y^2-z^2-1=0,$$

on peut exprimer les coordonnées d'un point courant avec deux paramètres (λ, μ), ainsi que les coordonnées u, v, w, p du plan tangent, par les formules

$$(112)\quad \left\{\begin{array}{llll} x=\dfrac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}, & y=\dfrac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu}, & z=\dfrac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu}, & \\ u=\lambda-\mu, & v=1+\lambda\mu, & w=\lambda\mu-1, & p=-\lambda-\mu. \end{array}\right.$$

En prenant $\lambda=\mu^2$, nous avons une développable D de troisième classe

$$(113)\quad u=\mu^2-\mu, \qquad v=1+\mu^3, \qquad w=\mu^3-1, \qquad p=-\mu^2-\mu.$$

L'arête de rebroussement Γ est la cubique gauche

$$(114)\quad x=\frac{-1-\mu}{1-\mu}, \qquad y=\frac{1+\mu+\mu^2}{3\mu}, \qquad z=\frac{1+\mu^3}{3\mu(1-\mu)}.$$

Je prendrai

$$a_3=\operatorname{sh}\varphi, \qquad A_3=\operatorname{ch}\varphi, \qquad A=e^{2\varphi}$$

et j'ai le couple algébrique

$$S\begin{cases} X = \alpha^2 \dfrac{1+\mu}{1-\mu}, \\ Y = \alpha^2 \dfrac{1+\mu+\mu^2}{3\mu}, \\ Z = \dfrac{\alpha^3}{3} - \alpha, \end{cases} \qquad S_1\begin{cases} X_1 = \alpha^2 \dfrac{1+\mu^3}{3\mu(1-\mu)}, \\ Y_1 = \alpha_2 \dfrac{4\sqrt{2}\sqrt{\mu}}{3(1-\mu)}, \\ Z_1 = \dfrac{\alpha^3}{3} + \alpha. \end{cases}$$

où j'ai remplacé e^{φ} par α.

On voit que la surface S_1 ne recouvre S que sur la région $\mu > 0$; dans tous les exemples obtenus par cette méthode, à cause du radical $B_2 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - B_1^2 - 1}$, nous aurons une surface S_1 ne recouvrant S que sur les régions limitées par des plans méridiens correspondant aux arcs de Γ satisfaisant à l'inégalité $x^2 + y^2 - z^2 - 1 > 0$. Nous pouvons prévoir *a priori* le nombre des points d'intersection de Γ et de Q; en effet, Γ est la polaire réciproque par rapport à Q de la développable enveloppe des plans osculateurs de C; si, en un point de C, le plan osculateur à cette courbe est tangent à Q, le point correspondant de Γ est sur Q (coïncidant d'ailleurs avec ce point de C); car le plan osculateur de C contient deux tangentes consécutives de C, tandis que le point de Γ est à l'intersection des deux tangentes conjuguées de celles-là. Dans le plan $\omega\lambda\mu$ image de Q, les asymptotiques de Q ont pour image les droites parallèles aux axes $\omega\lambda$, $\omega\mu$, et, pour avoir les points de C où le plan osculateur est tangent à Q, il suffit de mener à l'image de C les tangentes parallèles à $\omega\lambda$ ou $\omega\mu$. Nous pourrons donc obtenir des courbes Γ coupant Q en un nombre arbitrairement grand $2n$ de points, S sera partagée en $2n$ régions, alternativement recouvertes ou non par la surface S_1. Cette disposition curieuse méritait d'être signalée. Avec l'exemple numérique $\lambda = \mu^2$, le nombre n est égal à l'unité.

18. Nous pouvons maintenant étudier rapidement les couples de surfaces applicables fournis par le type IV. La courbe (A) est une droite, donc elle doit bien s'appeler (A) et non (B); (A) est l'axe des z, (B) est une courbe arbitraire et, avec le Tableau (12), nous

devons choisir deux constantes arbitraires C et h, et, puisque

$$b_3 = hB_3 \qquad \text{et} \qquad b_1'^2 + b_2'^2 = B_1'^2 + B_2'^2 + B_3'^2.$$

on aura

$$(115) \qquad \begin{cases} b_1^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2(1-h^2) - C, \\ b_1'^2 = B_1'^2 + B_2'^2 + B_3'^2(1-h^2). \end{cases}$$

Un raisonnement déjà fait montre que la courbe (B_1, B_2, B_3) est l'arête de rebroussement Γ d'une développable D circonscrite à la quadrique Q de révolution

$$x^2 + y^2 + z^2(1-h^2) - C = 0.$$

On opérera comme plus haut pour avoir une courbe (B) algébrique et l'on prendra ensuite

$$b_3 = hB_3, \qquad b_1 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2(1-h^2) - C}.$$

Comme on a

$$a_2^2 + a_3^2(1-h^2) = C,$$

si $C > 0$ et si $0 < h < 1$, on posera

$$a_2 = \sqrt{C}\cos\varphi, \qquad a_3 = \sqrt{\frac{C}{1-h^2}}\sin\varphi,$$

et les quadratures $\int a_2\,dA$, $\int a_3\,dA$ s'effectueront en écrivant

$$A = t + t'',$$

où t est une fonction algébrique de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. On a ainsi

$$S \begin{cases} X = Ab_1, \\ Y = \quad -\int a_2\,dA, \\ Z = Ab_3 - \int a_3\,dA; \end{cases}$$

$$S_1 \begin{cases} X_1 = AB_1, \\ Y_1 = AB_2, \\ Z_1 = AB_3 - h\int a_3\,dA = AB_3 - \int A_3\,dA. \end{cases}$$

Si $C > 0$ et $h > 1$, on pose

$$a_2 = \sqrt{C}\,\mathrm{ch}\,\varphi, \qquad a_3 = \sqrt{\frac{C}{h^2-1}}\,\mathrm{sh}\,\varphi \qquad \text{et} \qquad \Lambda = t - t'.$$

où t est fonction algébrique de e^{φ}.

Si $C < 0$ et $h > 1$, on pose

$$a_3 = \sqrt{\frac{C}{1-h^2}}\,\mathrm{ch}\,\varphi, \qquad a_2 = \sqrt{-C}\,\mathrm{sh}\,\varphi \qquad \text{et} \qquad \Lambda = t - t''.$$

On pourrait se demander ici si le couple S, S_1 étant ainsi constitué, la courbe (B) ne permettrait pas de déterminer une autre déformée de S_1; en effet, Oz et la courbe (B) étant donnés, on peut déplacer sur Oz le point pris pour origine; soit z_0 la cote d'un point pris sur Oz; si la courbe (B) avait ses tangentes également tangentes à une seconde quadrique Q′ de révolution autour de Oz,

$$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2(1 - h'^2) - C' = 0,$$

on pourrait en déduire une nouvelle déformée de S_1; mais alors, (B) devant être arête de rebroussement de la développable circonscrite à Q et Q′, (B) se réduirait à un point, puisque Q et Q′ ont le même axe de révolution; donc nous n'obtenons rien.

La constante h ne peut être nulle; si l'on avait $h = 1$, on aurait $a_2^2 = C$, et, comme on peut réduire C à l'unité, on aurait

$$a_2 = 1, \qquad C = 1, \qquad b_3 = B_3, \qquad b_1 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 1}, \qquad b_1'^2 = B_1'^2 + B_2'^2.$$

Un calcul déjà fait montre que le point $(B_1, B_2, 0)$ décrit une tangente au cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$, on pourra donc supposer $B_2 = 1$, $b_1 = B_1$, et alors les deux surfaces S et S_1 coïncident.

Si l'on suppose $C = 0$, la quadrique Q est un cône, la courbe (B_1, B_2, B_3) est une courbe plane contenue dans un plan tangent au cône; écrivons $1 - h^2 = -m^2$, et je pourrai supposer

$$B_2 = mB_3, \qquad b_1 = B_1, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = \sqrt{1 + m^2}\,B_3, \qquad a_2 = m a_3,$$

et l'on constate aisément que S et S_1 peuvent coïncider par rotation autour de Ox. Finalement, on doit donc simplement garder le cas

d'une quadrique de révolution à centre non développable, ou encore d'un paraboloïde de révolution. Ce cas du paraboloïde correspond au Tableau

$$(116)\qquad \left\{\begin{array}{llll} (a) & 0 & a_2 & a_3 \\ (b) & b_1 & 0 & b_3 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{llll} (A) & 0 & 0 & a_3+\dfrac{m}{2}, \\ (B) & B_1 & B_2 & b_3-\dfrac{m}{2} \end{array}$$

avec

$$(117)\qquad a_2^2-2ma_3=B_1^2+B_2^2-2mB_3-b_1^2=0.$$

L'équation

$$b_1'^2=B_1'^2+B_2'^2$$

entraîne que la courbe (B_1, B_2, B_3) soit l'arête de rebroussement Γ d'une développable circonscrite au paraboloïde

$$(118)\qquad x^2+y^2-2mz=0;$$

on aura une courbe (B) algébrique comme plus haut et l'on pourra prendre pour A la dérivée seconde d'une fonction algébrique de a_2 afin que $\int a_2\,dA$ et $\int a_2^2\,dA$ soient algébriques en même temps que A.

Dans le cas du mécanisme IV, on fera les mêmes remarques que précédemment sur les régions de S_1 effectivement recouvertes par S, à cause du radical qui donne b_1. On remarquera que s'il s'agit d'un ellipsoïde de révolution, d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes ou du paraboloïde de révolution, en partant d'une courbe réelle C située sur la quadrique, l'arête de rebroussement Γ perce la quadrique en points tous imaginaires et la quantité b_1 est toujours réelle : les deux surfaces S et S_1 se recouvrent complètement. Si la quadrique est un hyperboloïde à une nappe, on retrouve la possibilité de partager la surface S_1 en $2n$ secteurs alternativement recouverts ou non.

Pour avoir un exemple numérique, je pourrai prendre $C=1$, $h=\sqrt{2}$, de façon à retrouver la quadrique $x^2+y^2-z^2-1=0$ déjà étudiée; en prenant la même courbe d'image $\lambda=\mu^2$, $a_2=\operatorname{ch}\varphi$, $a_3=\operatorname{sh}\varphi$, $A=e^{2\varphi}$

et posant $e^{\varphi} = \alpha$, j'aurai

$$S \quad \begin{cases} X = \alpha^2 \dfrac{4\sqrt{2}\sqrt{\mu}}{3(1-\mu)}, \\ Y = \dfrac{\alpha^3}{3} + \alpha, \\ Z = \alpha^2 \dfrac{\sqrt{2}(1+\mu^3)}{3\mu(1-\mu)} - \dfrac{\alpha^3}{3} + \alpha; \end{cases}$$

$$(S_1) \quad \begin{cases} X_1 = \alpha^2 \dfrac{1+\mu}{1-\mu}, \\ Y_1 = \alpha^2 \dfrac{1+\mu+\mu^2}{3\mu}, \\ Z_1 = \alpha^2 \dfrac{1+\mu^3}{3\mu(1-\mu)} - \dfrac{\sqrt{2}\,\alpha^3}{3} + \alpha\sqrt{2}. \end{cases}$$

19. Le mécanisme V conduit à des résultats semblables. Supposons la conique (a) à centre. Les formules du Tableau (17) montrent que l'on doit avoir à la fois

$$B_3^2 = b_1^2\left(1 - \frac{1}{h_1^2}\right) + b_2^2\left(1 - \frac{1}{h_2^2}\right) + b_3^2 + C,$$

$$B_3'^2 = b_2'^2\left(1 - \frac{1}{h_1^2}\right) + b_2'^2\left(1 - \frac{1}{h_2^2}\right) + b_3'^2.$$

La courbe (b_1, b_2, b_3) est donc l'arête de rebroussement Γ d'une développable D circonscrite à la quadrique Q

$$x^2\left(1 - \frac{1}{h_1^2}\right) + y^2\left(1 - \frac{1}{h_2^2}\right) + z^2 + C = 0.$$

Si l'on remplace h_1 par $\dfrac{\sqrt{\alpha^2 - C}}{\alpha}$, h_2 par $\dfrac{\sqrt{\beta^2 - C}}{\beta}$, on voit que la conique (a) étant donnée par l'équation

$$\frac{a_1^2}{\alpha^2} + \frac{a_2^2}{\beta^2} = 1, \tag{119}$$

α et β étant soit réels, soit imaginaires pures, on doit fixer C et circon-

scrire une développable à la quadrique Q

$$(120)\qquad \frac{x^2}{\alpha^2-C}+\frac{y^2}{\beta^2-C}-\frac{z^2}{C}-1=0,$$

d'où l'on déduit (b) et par suite (A) et (B). On remarquera que la quadrique Q est l'une quelconque de celles qui appartiennent au faisceau homofocal déterminé par la conique (a) et le cercle de l'infini; la conique (A) est la section de Q par le plan $z=0$. La courbe (B) est arête de rebroussement d'une certaine développable circonscrite à la quadrique Q'

$$(121)\qquad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{C}-1=0.$$

Il est facile, comme plus haut, d'avoir deux surfaces S et S_1 algébriques. Les formules donnant S et S_1 sont :

$$(S)\quad \begin{cases} X=A\,b_1-\int a_1\,dA,\\ Y=A\,b_2-\int a_2\,dA,\\ Z=A\,b_3;\end{cases}$$

$$(S_1)\quad \begin{cases} X_1=A\dfrac{b_1}{h_1}-h_1\int a_1\,dA,\\ Y_1=A\dfrac{b_2}{h_2}-h_2\int a_2\,dA,\\ Z_1=AB_3.\end{cases}$$

Remarquons que l'on peut supposer $C>0$, sinon on renverserait le rôle de (a) et (A). Nous supposons d'abord (a) et (A) coniques homofocales non sécantes de façon que h_1 et h_2 soient réelles. Alors, si (a) est une ellipse, Q' est un ellipsoïde réel et Q un hyperboloïde à une nappe; tout point réel de S_1 a un homologue réel sur S, mais il peut y avoir des points réels de S sans homologue réel sur S_1 à cause du radical qui donne B_3, la courbe (b) pouvant couper la quadrique Q en des points réels, pour la raison donnée au Chapitre précédent, tandis que Q' n'étant pas à génératrices réelles la courbe (B) ne peut couper Q' en des points réels. Si (a) est une hyperbole, toujours

avec $C > 0$, Q est un hyperboloïde à deux nappes, Q′ un hyperboloïde à une nappe; cette fois les rôles de S et S_1 dans la correspondance par points réels ou imaginaires sont renversés.

Si l'on suppose les coniques (a) et (A) réelles, mais de genre opposé, donc sécantes, en général l'une des surfaces S étant réelle, l'autre S_1 sera complètement imaginaire : supposons, en effet, α et β réels, $\alpha > \beta > 0$ et $\alpha^2 > C > \beta^2$; h_1 est réel, h_2 imaginaire pure; à un point réel de S correspond un point de S_1 pour lequel X_1 et Z_1 sont réelles et Y_1 imaginaire pure (Q est ici un hyperboloïde à deux nappes); mais, si l'on s'arrange pour que la courbe (b_1, b_2, b_3) ait le plan xOz pour plan de symétrie et admette des points à coordonnées b_1 et b_3 réelles mais b_2 imaginaire pure, en prenant sur (a) les points à coordonnée a_1 réelle et a_2 imaginaire pure, on obtient des points réels de S_1, de sorte que S_1 est néanmoins réelle et l'on a de nouveau un exemple de correspondance par point réel pour point imaginaire entre deux surfaces réelles applicables.

Dans le cas où la conique (a) est une parabole, on a des résultats analogues; j'adopterai le Tableau

$$(122)\qquad \left\{\begin{array}{llll} (a) & a_1 & a_2 & 0 \\ (b) & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{llll} (A) & a_1 + \dfrac{m}{2} & h_2 a_2 & 0 \\ (B) & b_1 - \dfrac{m}{2} & \dfrac{b_2}{h_2} & B_3 \end{array}$$

d'où

$$a_2^2(1 - h_2^2) - 2ma_1 = B_2^2(1 - h_2^2) + B_3^2 - 2mB_1 - b_3^2 = 0.$$

L'égalité

$$b_3'^2 = B_2'^2(1 - h_2^2) + B_3'^2$$

entraîne que la courbe (B_1, B_2, B_3) soit arête de rebroussement d'une développable circonscrite au paraboloïde

$$y^2(1 - h_2^2) + z^2 - 2mx = 0.$$

En posant $p = \dfrac{m}{1 - h_2^2}$, on voit que (B) est arête de rebroussement d'une développable circonscrite au paraboloïde

$$y^2 + z^2\frac{p}{m} - 2px = 0,$$

et alors tout est parfaitement déterminé. On s'arrangera encore comme précédemment pour avoir des surfaces algébriques.

Pour avoir un exemple simple emprunté au mécanisme V, je prendrai

$$\alpha^2 = \beta^2 = 2, \qquad C = 1, \qquad h_1 = h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ce qui fait intervenir des cercles au lieu d'ellipses, ce qui ne gêne pas. Je prends pour courbe (b) la cubique déjà obtenue, puisque la quadrique Q est encore $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. J'ai

$$b_1 = \frac{-1-\mu}{1-\mu}, \qquad b_2 = \frac{1+\mu+\mu^2}{3\mu}, \qquad b_3 = \frac{1+\mu^3}{3\mu(1-\mu)},$$

$$B_1 = \sqrt{2}\,\frac{-1-\mu}{1\mu}, \qquad B_2 = \sqrt{2}\,\frac{1+\mu+\mu^2}{3\mu}, \qquad B_3 = \frac{4\sqrt{2}\sqrt{-\mu}}{3(1-\mu)};$$

et, en prenant

$$A = \cos^2\varphi, \qquad a_1 = \sqrt{2}\cos\varphi, \qquad a^2 = \sqrt{2}\sin\varphi,$$

$$S \left\{ \begin{aligned} X &= \cos^2\varphi\,\frac{1+\mu}{1-\mu} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos^3\varphi, \\ Y &= \cos^2\varphi\,\frac{1+\mu+\mu^2}{3\mu} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin^3\varphi, \\ Z &= \cos^2\varphi\,\frac{1+\mu^3}{3\mu(1-\mu)}; \end{aligned} \right.$$

$$S_1 \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \sqrt{2}\cos^2\varphi\,\frac{1+\mu}{1-\mu} + \frac{2}{3}\cos^3\varphi, \\ Y_1 &= \sqrt{2}\cos^2\varphi\,\frac{1+\mu+\mu^2}{3\mu} + \frac{2}{3}\sin^3\varphi, \\ Z_1 &= \cos^2\varphi\,\frac{4\sqrt{2}\sqrt{-\mu}}{3(1-\mu)}. \end{aligned} \right.$$

Conformément aux prévisions, S_1 ne recouvre S que sur la région $\mu < 0$.

20. Il résulte de ce qui précède que toute développable circonscrite à une quadrique Q permettra, si l'on prend pour axes de coordonnées les axes de Q, de déterminer trois séries de couples du type V dépendant d'une fonction arbitraire (A avec les notations de ce travail); il

faut, en effet, indiquer celui des trois axes de Q qui s'appelle Oz. Si cette quadrique Q est de révolution, ces trois séries se réduisent à deux, mais on aura une nouvelle série du type IV en prenant l'axe de révolution pour Oz; si cette quadrique est même un hyperboloïde de révolution à une ou deux nappes de cône asymptotique $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, on peut en déduire de plus une famille de couples du type III. Mais nous n'obtenons à chaque fois qu'un couple pour les types IV ou V. Il résulte de là que les développables intéressantes seront celles de quatrième classe circonscrites à un faisceau tangentiel de quadriques et les développables de troisième classe, circonscrites, comme on sait, à toutes les quadriques d'un réseau tangentiel ayant une génératrice commune; il suffira d'ailleurs de se donner l'arête de rebroussement, qui est une cubique. Ces développables de quatrième classe ou troisième classe pourront être successivement associées à chaque quadrique inscrite, mais nous n'obtenons à chaque fois qu'un couple.

21. Le problème que j'ai traité en détail se trouve, par une coïncidence curieuse, identique au problème suivant :

Déterminer toutes les surfaces dont les lignes de courbure sont sphériques dans les deux systèmes.

Je renvoie au Tome IV de la *Théorie des Surfaces* de Darboux, pages 26 et suivantes. Avec un léger changement de notations, le résultat est le suivant : *on détermine de la manière la plus générale six fonctions* A_i *de* α *et six fonctions* B_i *de* β *vérifiant identiquement la relation*

$$\sum_1^6 (A_i - B_i)^2 = 0, \tag{123}$$

puis on prendra l'enveloppe de la sphère variable définie en coordonnées pentasphériques par l'équation

$$\sum_1^5 (A_i - B_i)\, x_i = 0.$$

Les deux nappes de l'enveloppe seront les surfaces les plus générales cherchées.

L'équation (123) est celle à laquelle se réduit le problème traité dans ce Mémoire en remplaçant ia_1 par A_4, ia_2 par A_5, ia_3 par A_6, et de même ib_1, ib_2, ib_3 par B_4, B_5, B_6.

La méthode esquissée par Darboux consiste à introduire une substitution orthogonale dans l'espace à six dimensions de façon que les fonctions A_i satisfassent à 1, 2, ou 3 relations telles que :

1° Chaque relation ait la forme

$$A'_h = 0 \qquad \text{ou} \qquad A'_h + iA'_k = 0;$$

2° La même dérivée A'_h ne figure que dans une relation.

Cette méthode est peut-être plus intuitive pour remarquer que les quadriques, coniques, droites et plans joueront un rôle prépondérant; mais, au point de vue de la réalité, pour le problème des mécanismes, elle serait peut-être un peu plus pénible; cet inconvénient disparaît, au contraire, si l'on se borne aux coordonnées pentasphériques. Je dois signaler, d'ailleurs, une omission dans l'exposé de Darboux : Darboux écarte le cas d'une seule relation de la forme $A'_h = 0$, ce qui est exact, mais il écarte aussi le cas d'une seule relation de la forme $A'_h + iA'_k = 0$, ce qui n'est plus exact. En effet, la solution définie par les relations

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 = 0, \qquad A_5 + iA_6 = 0,$$
$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 0, \qquad B_5 + iB_6 = 0$$

correspond précisément au mécanisme I de ce travail, constitué par une droite et une surface de révolution autour de la droite.

Sur les séries de polynomes à une variable complexe;

PAR N. ABRAMESCO.

1. Considérons *une série de M. Appell* (¹),

$$\sum \frac{a_n}{P_n(x)}, \tag{1}$$

où les a_n sont des quantités données et où les polynomes donnés $P_n(x)$ ont leurs racines intérieures à une courbe (C). *Proposons-nous de trouver la région de convergence de ces séries, quand les polynomes* $P_n(x)$ *sont liés par des relations données.*

2. Considérons le cas où les polynomes $P_n(x)$ sont donnés par une relation récurrente de *Poincaré* (²)

$$R_k(x)P_{n+k}(x) + R_{k-1}(x)P_{n+k-1}(x) + \ldots + R_0(x)P_n(x) = 0 \tag{2}$$
$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

k étant un nombre donné et $R_s(x)$ des fonctions données qui dépendent de x et du rang n.

Posant $v_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$, la relation (2) s'écrit

$$v_{n+k-1}v_{n+k-2}\ldots v_n + \frac{R_{k-1}}{R_k}v_{n+k-2}v_{n+k-3}\ldots v_n + \ldots + \frac{R_1}{R_k}v_n + \frac{R_0}{R_k} = 0,$$

(¹) *Voir* P. APPELL, *Sur les développements en série suivant les inverses de polynomes donnés* (*Comptes rendus*, t. 157, p. 5 et 1042; *Bulletin des Sciences mathématiques*, novembre 1913; *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 58, 1920, p. 1). — N. ABRAMESCO, *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 649.

(²) POINCARÉ, *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (*American Journal*, vol. VII).

et si, pour $n \to \infty$, le rapport v_n a une limite, cette limite est une racine de l'équation

$$(3) \qquad F(\lambda) \equiv \lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + A_0 = 0,$$

où

$$A_s = \lim_{n\to\infty} \frac{R_s}{R_k}.$$

Par un procédé analogue à celui employé par Poincaré [1] pour le cas $k = 3$, on montre que le rapport $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ tend, en général, vers la racine $\alpha(x)$ de plus grand module de l'équation (3).

La *série de Poincaré*,

$$\sum a_n P_n(x),$$

qui est une série de polynomes $P_n(x)$ liés par la relation (2), *a sa région de convergence* [2] *limitée par la courbe*

$$|\alpha(x)| = \rho,$$

$\alpha(x)$ étant la racine de plus grand module de l'équation (3), *et*

$$\frac{1}{\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

3. Considérons *une série de M. Appell*,

$$\sum \frac{a_n}{P_n(x)},$$

les polynomes $P_n(x)$ étant liés par la relation (2), et les polynomes $P_n(x)$ ayant leurs racines intérieures à une courbe (C). Pour trouver la région de convergence de cette série, considérons la série

$$(4) \qquad a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots,$$

convergente à l'extérieur du cercle $|z| = \rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

---

(1) Poincaré, *loc. cit.* — Voir aussi Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 420.
(2) Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 420.

Laissant de côté certains cas exceptionnels, nous supposerons que l'équation (3) a toutes ses racines distinctes et que $\alpha(x)$ est la racine de plus grand module de cette équation.

Supposons premièrement $|\alpha| > \rho$ et considérons un nombre ρ_1, tel que $\rho < \rho_1 < |\alpha|$. Nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \alpha, \qquad \left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| > \rho_1 > \rho;$$

et si, pour fixer les idées, nous supposons que l'on a cette inégalité en partant de $n = 0$, nous aurons

$$\left|\frac{P_1}{P_0}\right| > \rho_1, \quad \left|\frac{P_2}{P_1}\right| > \rho_1, \quad \ldots, \quad \left|\frac{P_n}{P_{n-1}}\right| > \rho_1;$$

$$|P_n| > |P_0|\rho_1^n; \qquad \left|\frac{a_n}{P_n}\right| < \frac{1}{|P_0|}\frac{|a_n|}{\rho_1^n}.$$

Donc, si $|\alpha| > \rho$, la série de M. Appell est valable, comme ayant les modules de ses termes plus petits que ceux de la série convergente (4) ($\rho_1 > \rho$).

Supposons, au contraire, que $|\alpha| < \rho$ et que $|\alpha| < \rho_2 < \rho$. Nous aurons

$$\left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| < \rho_2 < \rho$$

et, si cette inégalité existe depuis $n = 0$, on a

$$|P_n| < |P_0|\rho_2^n, \qquad \left|\frac{a_n}{P_n}\right| > \frac{1}{|P_0|}\frac{|a_n|}{\rho_2^n}.$$

Donc, si $|\alpha| < \rho$, la série (1) est divergente comme ayant les modules de ses termes plus grands que ceux d'une série divergente

$$\sum \frac{a_n}{\rho_2^n}, \qquad (\rho_2 < \rho).$$

Il en résulte que la *courbe de convergence de la série de M. Appell, où les polynomes* $P_n(x)$ *sont liés par la relation* (2), *est donnée par l'équation* $|\alpha(x)| = \rho$, $\alpha(x)$ *étant la racine qui a le plus grand module de l'équation* (3).

La courbe (Γ), $|\alpha| = \rho$, $(x = X + iY)$, du plan XOY, sépare le

plan en deux régions, l'une intérieure à la courbe, et l'autre extérieure où se trouvent les points à l'infini. Pour une de ces régions, on a $|\alpha(x)| - \rho > 0$ et, pour l'autre, $|\alpha| - \rho < 0$; donc, d'après ce que nous avons vu, dans la première région, $|\alpha(x)| - \rho > 0$, la série de M. Appell converge, dans l'autre elle diverge. Or, la série (1) converge pour x tendant vers l'infini, qui est dans la région extérieure à la courbe (Γ) et donc *la série de M. Appell sera convergente dans la région extérieure à la courbe* $|\alpha(x)| = \rho$, *qui est en même temps extérieure à la courbe* $(\mathfrak{C})$, *où se trouvent les racines des polynomes* $P_n(x)$.

4. *Exemples.* — 1° $P_n(x) = (x-a)^n$. La relation (2) et l'équation (3) sont

$$P_n(x) = (x-a)P_{n-1}(x), \qquad \lambda = x - a.$$

La série de M. Appell est dans ce cas $\sum \frac{a_n}{(x-a)^n}$, et la région de convergence est le domaine extérieur au cercle $|\alpha| = \rho$, ou $|x-a| = \rho$, et l'on retrouve les résultats connus.

2° Supposons que $P_n(x)$ soit le *polynome de Legendre*,

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

qui a toutes ses racines réelles et sur le segment $(-1, +1)$. La relation (2) et l'équation (3) sont

$$nP_n - (2n-1)xP_{n-1} + (n-1)P_{n-2} = 0, \qquad \lambda^2 - 2\lambda x + 1 = 0.$$

Faisant la transformation conforme

$$x = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right),$$

les racines λ' et λ'' de l'équation (3) sont ξ et $\frac{1}{\xi}$. Dans l'hypothèse $|\xi| > 1$, la région de convergence est le domaine extérieur à l'ellipse

$$x = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right), \qquad |\xi| = \rho,$$

de foyers -1, $+1$.

3° Considérons les *polynomes orthogonaux* [1] $P_n(x)$, qui généralisent les polynomes de Legendre et qui sont définis par les relations

$$\int_a^b \varphi(x) P_m(x) P_n(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n);$$

$$\int_a^b \varphi(x) P_n^2(x)\, dx = I_n = \text{const.},$$

où $\varphi(x)$ est une fonction positive et intégrable dans l'intervalle (a, b). On sait que les polynomes $P_n(x)$ ont leurs racines réelles et sur le segment (a, b). Dans le cas $a = -1$, $b = 1$, $\varphi(x) = 1$, on a les polynomes de Legendre.

Posant, dans le cas général,

$$I_n = \frac{D_n(\varphi)}{D_{n-1}(\varphi)}, \qquad D_n(\varphi) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n & g_{n+1} & \cdots & g_{2n} \end{vmatrix}, \qquad g_s = \int_a^b \varphi(t)\, t^s\, dt,$$

le polynome $P_n(x)$ est donné par

$$P_n(x) = \frac{1}{D_{n-1}(\varphi)} \begin{vmatrix} xg_0 - g_1 & xg_1 - g_2 & \cdots & xg_{n-1} - g_n \\ xg_1 - g_2 & xg_2 - g_3 & \cdots & xg_n - g_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ xg_{n-1} - g_n & xg_n - g_{n+1} & \cdots & xg_{2n-2} - g_{2n-1} \end{vmatrix},$$

$$P_n(x) = \frac{D_{n-1}(F)}{D_{n-1}(\varphi)}, \qquad F = (x - t)\,\varphi(t),$$

$$xg_s - g_{s+1} = \int_a^b (x - t)\,\varphi(t)\, t^s\, dt = \int_a^b F(t)\, t^s\, dt,$$

et l'on voit que $D_{n-1}(F)$ et $D_{n-1}(\varphi)$ sont respectivement les détermi-

---

(1) *Voir* Darboux, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IV, 1878, p. 411).

nants des formes [1] quadratiques

$$\int_a^b (x-t)\varphi(t)(y_0+y_1t+\ldots+y_{n-1}t^{n-1})^2dt=\sum\sum(xg_{p+q}-g_{p+q+1})y_py_q,$$

$$\int_a^b \varphi(t)(y_0+\ldots+y_{n-1}t^{n-1})^2dt=\sum\sum g_{p+q}y_py_q \qquad [p,q=0,1,\ldots(n-1)].$$

La relation de récurrence connue [2], entre trois polynomes consécutifs, est

$$P_{n+1}-(x-u_n)P_n+\frac{I_n}{I_{n-1}}P_{n-1}=0,$$

et, avec les notations employées, on trouve

$$u_n=\frac{\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-1} & g_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n & g_{n+1} & \cdots & g_{2n-1} & g_{2n+1} \end{vmatrix}}{D_n(\varphi)}-\frac{\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-2} & g_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n-1} & g_n & \cdots & g_{2n-3} & g_{2n-1} \end{vmatrix}}{D_{n-1}(\varphi)},$$

et pour $n\to\infty$, l'équation (3) devient

$$\lambda^2-\frac{4}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\lambda+1=0.$$

---

(1) Étudiées par M. Szegö dans son Mémoire *A Hankel-féle formákról* (Les formes de Hankel) dans le bulletin hongrois *Mathematikai és Termeszettudomanyi értesitö*, 1918, p. 497. M. Szegö considère les polynomes $P_n(x)$ qui sont égaux aux déterminants des formes de Hankel et démontre que ces polynomes satisfont aux conditions des polynomes orthogonaux; il obtient une relation (incomplète) de récurrence (d'ailleurs trouvée par *Darboux* en 1878) entre trois polynomes consécutifs (sans dire un mot des grands géomètres *Stieltjes* et *Darboux*, qui ont étudié ces polynomes); il démontre que la limite pour $n\to\infty$ de $\sqrt[n]{P_n(x)}$ est égale à

$$e^{\int_a^b \log(x-t)\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}}$$

et enfin, que les courbes de convergence des séries $\sum c_nP_n(x)$ sont des ellipses de foyers a et b.

(2) *Voir* aussi le *Cours d'Analyse supérieure* fait, à la *Sorbonne*, par M. E. Picard, en 1918.

La région de convergence de la série (¹) de M. Appell est le domaine extérieur à l'ellipse

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right), \qquad |\alpha| = \rho,$$

de foyers a et b.

4° Considérons les *polynomes électrosphériques* $P_n(x)$ qui admettent la fonction génératrice

$$\frac{1}{1 - 2tx + t^2} = \sum t^n P_n(x).$$

Ces polynomes ont été rencontrés par MM. *Guillet* et *Aubert* (¹) dans leurs recherches sur l'attraction mutuelle de deux sphères électrisées ou d'une sphère et d'un plan; la capacité commune des deux armatures en présence est donnée, à un facteur près, par la série de M. Appell

$$(5) \qquad \sum \frac{1}{P_n(x)}.$$

La relation (2) est

$$P_{n+1} - 2xP_n + P_{n-1} = 0.$$

On voit, de cette relation, que la suite de Sturm : $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$, devient respectivement pour -1, $+1$,

$$1, \quad -2, \quad 3, \quad \ldots, \quad (-1)^n(n+1); \qquad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad (n+1);$$

donc la suite perd, entre -1 et $+1$, n variations, et donc les polynomes $P_n(x)$ ont leurs racines réelles sur le segment $(-1, +1)$.

L'équation (3) est $\lambda^2 - 2\lambda x + 1 = 0$, et la région de convergence de la série (5), où $\rho = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$, est limitée par le segment $(-1, +1)$,

$$x = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right), \qquad |\xi| = 1,$$

et donc cette série est valable dans tout le plan XOY ($x = X + iY$), sauf sur la coupure $(-1, +1)$.

(¹) *Comptes rendus*, t. 155, 1912, p. 139, 204, 708, 820; t. 157, 1913, p. 367.

3. *Considérons la série*

$$\sum \frac{a_n}{P_n(x)} + \sum b_n P_n(x), \tag{6}$$

qui généralise la série de Laurent. La région de convergence de cette série, quand les polynomes $P_n(x)$ *sont liés par la relation* (2), *est le domaine intérieur à la courbe* $|\alpha(x)| = \rho_1$ *et extérieur à la courbe* $|\alpha(x)| = \rho$, *et qui est en même temps extérieur à la courbe* (C) *où se trouvent les racines des polynomes* $P_n(x)$; $\alpha(x)$ *étant la racine de plus grand module de l'équation* (3) *et* $\rho = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$, $\frac{1}{\rho_1} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|b_n|}$.

Exemple. — Dans le cas des polynomes orthogonaux, le domaine de convergence de la série (6) est une couronne formée par deux ellipses homofocales.

Sur la « séparation » des points singuliers d'une fonction analytique;

PAR J. SOULA.

Soit une fonction analytique $F(x)$ pour laquelle les points d'un ensemble E sont singuliers; l'ensemble E est supposé à distance finie, il est entouré par une courbe simple C sur laquelle $F(x)$ est régulière. Admettons encore que $F(x)$ possède d'autres points singuliers; peut-on alors, trouver une fonction $\varphi(x)$ n'admettant pas d'autre point singulier que ceux de E et telle que $F(x) - \varphi(x)$ soit régulière en tous les points de E?

Dans le cas où $F(x)$ reste uniforme pour un déplacement sur la courbe C, on doit, comme il est bien connu, répondre par l'affirmative. La fonction $\varphi(x)$ n'est autre que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)\,dz}{z-x}.$$

Je dirai dans ce cas (et dans les cas analogues) que l'ensemble des points singuliers E est « séparable » et qu'il a été séparé par la construction de la fonction $\varphi(x)$.

Dans le cas où la fonction $F(x)$ n'est pas uniforme, le problème ne saurait admettre une solution aussi simple : si par exemple $F(x)$ n'a que deux points singuliers à distance finie ou à l'infini, il est impossible de les séparer. Une fonction qui n'a qu'un point singulier à toute distance est en effet uniforme, $F(x)$ ne peut être égale à la somme de deux telles fonctions.

On peut se demander, toutefois, s'il n'est pas possible d'obtenir des résultats en portant son attention sur une détermination de la fonction étudiée. C'est ce qu'a fait M. Faber dans un intéressant Mémoire [1] consacré aux fonctions multiformes; mon but est d'appliquer ses résultats à la recherche de points singuliers de fonctions définies par des séries de Taylor.

Dans un Mémoire où ce dernier problème est étudié dans certains cas particuliers [2], je n'ai pas fait état du travail de M. Faber : certaines démonstrations ne paraissaient pas convaincantes et certains énoncés étaient trop généraux. J'ai reconnu, depuis lors, l'exactitude des résultats de M. Faber, mais je crois qu'il faut modifier légèrement ses démonstrations et préciser ses énoncés. Les cas qu'il étudie ne sont pas d'ailleurs exactement ceux dont j'ai besoin. Pour toutes ces raisons, étant donnée aussi l'importance de la question, je crois devoir reprendre l'exposé de M. Faber. J'en donne ensuite l'application annoncée.

1. Soit une fonction $f(x)$ holomorphe à l'intérieur d'un domaine simplement connexe Δ. Une ligne L, sans point double et pourvue d'une tangente qui varie d'une manière continue, partage Δ en deux régions. Toutefois, les extrémités a et b de L sont sur la frontière de Δ, a et b sont donc peut-être, points singuliers de $f(x)$. Il existe alors une fonction $G(x)$ holomorphe dans tout le plan (y compris l'infini) sauf en a et b et possédant les propriétés suivantes : la ligne L n'est pas pour elle une coupure essentielle, $G(x)$ est prolongeable au delà de L dans les deux sens, $G(x)$ reste uniforme si l'on fait le tour de L, mais elle n'est pas uniforme si l'on fait le tour de a seul (ou de b), la différence des deux valeurs des deux côtés de L est $f(x)$. C'est là le lemme fondamental que nous allons établir.

Supposons d'abord que $\int_L f(x)\,dx$ ait un sens, bien que les points a et b puissent être singuliers et que, de plus, cette intégrale soit abso-

---

(1) Faber, *Math. Annalen*, t. LX, 1905, p. 386 et suiv.

(2) *Journ. de Math. pures et appliquées*, 1921, p. 97.

lument convergente. Il n'y a qu'à prendre

$$G(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_L \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

$G(x)$ existe partout ailleurs que sur L. Les propriétés énoncées ont été souvent démontrées, je renverrai par exemple au Cours de M. Goursat [1].

2. Si $\int_L f(z)\,dz$ n'est pas absolument convergente, $G(x)$ sera définie d'une manière plus compliquée. Nous choisirons deux suites de points $a_1 a_2 \ldots a_\nu \ldots$ qui tendent vers a, et $b_1 b_2 \ldots b_\nu \ldots$ qui tendent vers b, les a_ν se rapprochant constamment de a, les b_ν de b. Désignons par J_ν l'arc $a_\nu a_{\nu+1}$, par J'_ν l'arc $b_\nu b_{\nu+1}$. Soit M_ν une borne supérieure du module de $f(z)$ lorsque z est sur J_ν ou J'_ν. A chacun des arcs J_ν (ou J'_ν) nous attacherons un entier n_ν (ou n'_ν) défini par la règle suivante : soit ρ un nombre fixe, positif, inférieur à 1. Si, lorsque z est sur J_ν, on a pour une valeur de z au moins

$$|z-a| \geqq \rho,$$

je prendrai $n_\nu = 0$.

Si, quel que soit z sur J_ν, on a

$$|z-a| < \rho,$$

je prendrai n_ν tel que

$$\rho^{n_\nu} M_\nu < 1, \tag{1}$$

d'où je déduis

$$|z-a|^{n_\nu} M_\nu < 1.$$

Je poserai ensuite

$$r(z, x) = \frac{(z-a)^{n_\nu}}{(x-a)^{n_\nu}(z-x)},$$

z étant sur J_ν et x n'importe où dans le plan. On définirait de même le nombre n'_ν attaché à J'_ν en remplaçant a par b dans ce qui précède.

---

[1] Tome II, fin du Chapitre XVI. M. Faber donne un calcul direct. On peut aussi écrire $G(x)$ sous forme de somme de potentiels et tirer de là la démonstration.

On posera encore

$$r(z, x) = \frac{(z-b)^{n'_\nu}}{(x-b)^{n'_\nu}(z-x)},$$

pour z sur J'_ν et x dans le plan.

La fonction $r(z, x)$ est ainsi définie pour toute valeur de z sur L et pour toute valeur de x. Elle est holomorphe par rapport à x partout ailleurs que sur L.

Nous prendrons

$$G(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_L r(z, x) f(z)\, dz = S(x) + S'(x)$$

avec

$$S(x) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{J_\nu} f(z) r(z, x)\, dz; \qquad S'(x) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{J'_\nu} f(z) r(z, x)\, dz.$$

Les propriétés de $G(x)$ seront étudiées dans un domaine D répondant aux conditions suivantes : D est limité par une courbe simple et est coupé par L qui le partage en deux régions. Les points a et b sont extérieurs à D. Soient d une borne inférieure de la distance de a et de b aux points de D, α un nombre positif inférieur à d. Les intervalles J_ν seront classés en deux catégories :

1° J_ν sera de la première catégorie si l'on a les inégalités suivantes quel que soit z sur l'arc qui va de a à J_ν et sur J_ν lui-même et quel que soit x dans D

$$|z-a| < \rho, \qquad |z-a| < d.\rho, \qquad |z-x| > \alpha;$$

2° Les autres arcs J_ν forment la deuxième catégorie.

Comme les a_ν tendent vers a, les intervalles de la première catégorie sont en nombre illimité, ils forment un arc continu L_1 dont a est une extrémité et qui est extérieur à D. Les intervalles de la deuxième catégorie sont en nombre limité et forment un arc continu L_2. Nous désignerons par $S_1(x)$ la somme des termes de la série $S(x)$ pour lesquels J_ν est de la première catégorie, par $S_2(x)$ la somme des autres termes

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x).$$

Si J_ν est de la première catégorie

$$|r(z, x)| = \left|\frac{z-a}{x-a}\right|^{n_\nu} \frac{1}{|z-x|} < \frac{\rho^{n_\nu}}{\alpha},$$

car

$$\left|\frac{z-a}{x-a}\right| < \frac{|z-a|}{d} < \rho.$$

On en déduit

$$\left|\int_{J_\nu} r(z, x) f(z)\, dz\right| < \frac{\rho^{n_\nu}}{\alpha} M_\nu \int_{J_\nu} |dz| < \frac{1}{\alpha} \int_{J_\nu} |dz|,$$

d'après l'inégalité (1). Donc la série $S_1(x)$ admet comme majorante

$$\frac{1}{2i\pi} \cdot \frac{1}{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{J_\nu} |dz|$$

et celle-ci converge bien, $S_1(x)$ est donc fonction holomorphe de x dans D.

La somme $S_2(x)$ n'a qu'un nombre fini de termes. Soit un terme

$$T_\nu(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{J_\nu} \left(\frac{z-a}{x-a}\right)^{n_\nu} \frac{f(z)}{z-x}\, dz;$$

or

$$\left(\frac{z-a}{x-a}\right)^{n_\nu} \frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-x} - \frac{z-a}{(x-a)^2} - \ldots - \frac{(z-a)^{n_\nu-1}}{(x-a)^{n_\nu}},$$

$T_\nu(x)$ est donc la somme d'une intégrale

$$\int_{J_\nu} \frac{f(z)}{z-x}\, dz$$

et d'un nombre fini de fonctions méromorphes de pôle unique a.

On a donc

$$S_2(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{J_2} \frac{f(z)\, dz}{z-x} + F\left(\frac{1}{x-a}\right),$$

où $F(t)$ est un polynome en t.

L'intégrale $S'(x)$ se laisse transformer d'une façon analogue et l'on

a finalement

$$G(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{L_2+L_3} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + F\left(\frac{1}{x-a}\right) + F'\left(\frac{1}{x-a}\right) + S_1(x) + S'_1(x);$$

L'_2 est un arc analogue à L_2, c'est-à-dire que L est partagée en quatre arcs qui sont en allant de a vers b : L_1, L_2, L'_2, L'_1. Le point commun à L_1 et L_2 et le point commun à L'_2 et L'_1 sont extérieurs à D. $F'(t)$ est un polynome, $S'_1(x)$ une fonction holomorphe dans D.

La formule obtenue permet d'établir les propriétés indiquées pour $G(x)$ au n° **1**, en supposant x dans D : $G(x)$ est la somme de cinq fonctions toutes holomorphes dans D. Toutefois l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{L_2+L_3} \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

n'est pas définie aux points de L qui font partie de D, mais ici encore il n'y a qu'à appliquer des résultats connus pour voir que $L_1 + L_2$ n'est pas coupure essentielle et que la différence des deux valeurs de l'intégrale des deux côtés de L est $f(x)$. Il en est de même des deux valeurs de $G(x)$.

Comme le domaine D peut contenir tout point du plan autre que a ou b, comme $G(x)$ ne dépend pas du domaine D, le théorème est établi [1].

On peut supposer que l'un des points a ou b, b par exemple, est à l'infini sur une ligne L. On choisit les points b_ν s'éloignant indéfiniment sur L.

Si $\left|\frac{1}{z}\right| > \rho$ sur J_ν, on prend $n'_\nu = 0$; si $\left|\frac{1}{z}\right| \geq \rho$, on prend n'_ν tel que

$$\left|\frac{1}{z}\right|^{n'_\nu - 2} M_\nu < 1 \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{1}{z}\right|^{n'_\nu} M_\nu < \frac{1}{|z|^2},$$

et l'on pose

$$r(z, x) = \frac{x^{n_\nu}}{z^{n_\nu}(z-x)}$$

pour x sur J_ν. La démonstration se poursuit comme précédemment.

---

[1] M. Faber avait pris les n_ν et n'_ν dépendant de x ou du domaine de variation de x, $G(x)$ en dépendait aussi.

3. La fonction $G(x)$ que l'on vient de déterminer, ne paraît pas posséder de point singulier autre que a et b. Mais si l'on effectue le prolongement analytique en traversant la ligne L, on rencontrera d'autres singularités. Supposons par exemple que nous soyons dans le cas du n° **1**

$$G(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_L \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

On peut remplacer L par un chemin voisin L′ situé dans le domaine Δ où $f(z)$ est régulière sans changer la valeur de $G(x)$ en un point x non situé sur L ou L′. C'est de là que résulte l'holomorphie de $G(x)$ sur L et dans Δ. Mais nous ne savons pas si $G(x)$ est holomorphe hors de ce domaine.

4. Soit une fonction analytique $F(z)$ dont une branche admet les points singuliers isolés a et b. Si l'on trouve toujours la même détermination de $F(z)$ quand on décrit un contour simple qui contient ces deux points singuliers (et pas d'autres) à son intérieur, on peut, comme on l'a vu, séparer ces deux points des autres points singuliers.

Je suppose qu'il n'en soit plus ainsi, je suppose qu'il existe une ligne L joignant a et b et pouvant être contenue dans un domaine où la branche de fonction considérée n'a pas d'autre singularité que a et b. Je suppose que, parti d'un point de L avec la détermination $F_1(x)$, on retrouve une autre détermination $F_2(x)$ après avoir fait le tour de a. Je pose $f(x) = F_1(x) - F_2(x)$, cette fonction est holomorphe sur L (sauf en a et b). Je construis la fonction $G(x)$ des n^{os} **1** ou **2**.

Alors $F(x) - G(x)$ sera uniforme en a, ou du moins restera uniforme si l'on fait le tour du seul point singulier a. On pourra donc trouver $\varphi(x)$ telle que

$$F(x) - G(x) - \varphi(x)$$

soit régulière en a. $G(x) + \varphi(x)$ n'a pas d'autre point singulier que a et b (avec les restrictions indiquées au n° **3**). On pourra exprimer ces remarques en disant que l'on a « séparé » le point singulier a de $F(x)$ pour une détermination seulement de cette fonction.

On pourrait remplacer a par certains ensembles de points singuliers, mais je ne développerai pas ici cette généralisation.

5. Soit une fonction $\varphi(x)$ définie par une série de Taylor

$$\varphi(x) = \Sigma b_n x^n,$$

je me suis proposé [1] de trouver les points singuliers de la fonction

$$F(x) = \Sigma g(b_n) x^n,$$

où $g(t)$ est fonction analytique de t, $\varphi(x)$ et $g(t)$ étant de plus soumises à certaines conditions. Pour préciser, j'indique les hypothèses de l'un des cas étudiés [2] : $g(t)$ est holomorphe pour $t = 0$; $\varphi(x)$ n'a sur son cercle de convergence pas d'autre point singulier que le point 1 isolé et possède d'autres points singuliers $\beta_1, \beta_2, \ldots$; enfin $(x-1)^m \varphi(x)$ a son module borné pour une valeur m inférieure à 1. A ces conditions j'ai cru devoir ajouter la suivante : le point singulier 1 est séparable, il existe des fonctions $\varphi_1(x)$ et $\psi(x)$ telles que

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \psi(x),$$

$\psi(x)$ ayant un cercle de convergence de rayon supérieur à 1 et $\varphi_1(x)$ n'ayant pas d'autre point singulier que 1 et l'infini pour sa première détermination. Plus exactement, soit L la demi-droite dont le prolongement passe à l'origine et qui va du point d'affixe 1 à l'infini, $\varphi_1(x)$ est supposée régulière partout ailleurs que sur L et prolongeable au delà de L dans les deux sens, en tout point de L autre que 1. Cette condition imposée à $\varphi(x)$ paraît assez restrictive, mais en réalité elle est superflue. A l'aide du théorème de M. Faber, on peut montrer que $\varphi_1(x)$ existe toujours.

Supposons d'abord que $\varphi(x)$ soit holomorphe sur L (sauf au point 1). Soit, alors, $G(x)$ la fonction déterminée aux n^{os} **1** ou **2** et relative à la ligne L d'extrémité 1 et l'infini, $f(x)$ étant la différence des deux valeurs de $F(x)$ le long de L. $F(x) - G(x)$ est uniforme autour de 1 et, en retranchant encore un développement de Laurent, on aura effectué la « séparation » du point singulier 1.

Si la ligne L rencontre des points singuliers de $\varphi(x)$, nous désignerons par b le premier point rencontré. On peut construire la fonc-

---

(1) *Journ. de Math. pures et appliquées*, 1921, p. 97-153.

(2) *Ibid.*, p. 146.

tion $h(x)$ telle que $\varphi(x) - h(x)$ soit régulière au point 1, $h(x)$ n'ayant pas d'autre point singulier que 1 et b. On construira ensuite $K(x)$ telle que $h(x) - K(x)$ soit régulière en b, $K(x)$ n'ayant pas d'autre point singulier que b et l'infini. Alors la fonction

$$\varphi_1(x) = h(x) - K(x)$$

répond à la question, $\varphi_1(x)$ existe toujours.

Ainsi, soit

$$\varphi(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)} = \Sigma b_n x^n,$$

la fonction $\Sigma g(b_n) x^n$ n'a pas d'autre point singulier que $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots$, si $g(t)$ est holomorphe pour $t = 0$.

6. Plusieurs autres parties de mon Mémoire pourraient être complétées d'une manière analogue. Je ne donnerai qu'une autre application. Soient deux fonctions définies par

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty a_n x^n, \qquad \psi(x) = \sum_1^\infty \frac{x_n}{a^n} \quad (a_n \neq 0).$$

Je suppose que $\varphi(x)$ n'ait qu'un point singulier β. Il peut arriver alors que $\psi(x)$ n'en ait qu'un $\left(\text{qui est } \frac{1}{\beta}\right)$ et il peut arriver aussi, comme je l'ai montré, que $\psi(x)$ en ait plusieurs. J'ai démontré encore [1] que dans ce dernier cas les points singuliers de $\psi(x)$ ne peuvent être séparés en deux groupes, que l'on n'a pas

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x),$$

ψ_1 et ψ_2 n'ayant pas d'autres points singuliers que ceux de ψ et n'ayant pas de point singulier commun. (Il reste entendu qu'il s'agit toujours de la première détermination des fonctions.)

Il résulte donc, du théorème de M. Faber, que $\psi(x)$ ne possède pas de point singulier isolé, si elle admet d'autre point singulier que $\frac{1}{\beta}$.

---

[1] *Loc. cit.*, p. 141.

Les Théories einsteiniennes et les Principes du Calcul intégral;

Par A. BUHL.

1. *Identités fondamentales.* — Je crois avoir été l'un des premiers à remarquer que l'analyse einsteinienne pouvait être confondue avec celle des formes différentielles étudiées par d'éminents géomètres français, tels que MM. Goursat et Cartan.

L'étude des intégrales multiples, telle qu'elle est présentée par M. E. Picard, dans le premier Chapitre de ses *Fonctions de deux variables*, pourrait également servir de point de départ.

Les choses peuvent d'ailleurs être exposées d'une manière extrêmement brève et synthétique en partant d'identités qui sont à la base même du Calcul intégral, savoir

$$(1)\qquad \int_C X\,dY = \iint_A dX\,dY, \qquad \iint_S X\,dY\,dZ = \iiint_V dX\,dY\,dZ.$$

Il est entendu que A est une aire plane de contour C, et V un volume inclus dans une surface fermée S.

Les identités (1), par des successions de changements de variables et d'additions, donnent d'autres identités qui sont des formules du type stokien [1].

---

[1] *Voir* les démonstrations détaillées dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1911, p. 67 pour (2), et 1920, p. 6 pour (3). Cette formule (3) apparaît pour la première fois dans les *Comptes rendus* du 8 juillet 1912.

Le présent Mémoire développe une Note des *Comptes rendus* du 7 novembre 1921. Un développement plus considérable est publié dans les *Annalse de Toulouse* (1921).

Ainsi, comme *première formule fondamentale*, on a

$$(2)\qquad \int_C A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + A_3\,dx_3 + A_4\,dx_4 = \iint_A \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial x_3} & \frac{\partial G}{\partial x_4} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x_3,x_4)}}.$$

Dans cette formule, A est une cloison à deux dimensions limitée par un contour fermé C; cette cloison est située dans l'espace quadridimensionnel et est définie analytiquement par les équations

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad G(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Cette formule (2) peut servir de base à la théorie des fonctions de deux variables complexes.

La seconde identité (1) donne de même la *seconde formule fondamentale*

$$(3)\qquad \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial x_3} & \frac{\partial G}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x_3,x_4)}} = -\iiint_V \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{\frac{\partial F}{\partial x_4}}.$$

Cette fois V est une variété à trois dimensions qui se déforme dans l'espace à quatre en admettant toujours pour frontière la variété fermée S à deux dimensions.

Le premier membre de (3) peut s'écrire

$$(4)\qquad 2\iint_S M_{12}\,dx_1\,dx_2 + M_{13}\,dx_1\,dx_3 + M_{14}\,dx_1\,dx_4 + M_{23}\,dx_2\,dx_3 + M_{24}\,dx_2\,dx_4 + M_{34}\,dx_3\,dx_4.$$

Ainsi l'analogie de (2) et (3) paraît plus évidente.

2. *Champ électromagnétique.* — Ce champ correspond à deux formules (3) aux membres nuls.

D'abord on peut égaler à zéro le déterminant qui figure dans l'intégrale triple de (3), d'où une équation aux dérivées partielles du premier ordre pour la fonction F.

Le système différentiel caractéristique correspondant s'obtiendra en écrivant que

$$dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3 \quad dx_4$$

sont proportionnels aux mineurs correspondants extraits de la matrice

$$(5) \qquad \begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}.$$

On a ainsi un premier groupe de quatre équations.

On peut aussi imaginer que le déterminant du second membre de (3) soit nul parce que les mineurs extraits de la matrice (5) sont nuls. Cela arrive si les M_{ij} sont maintenant de la forme

$$M_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}.$$

D'où un second groupe de quatre équations. Les deux groupes constituent les équations de Maxwell-Lorentz, généralisées par M. Th. De Donder.

Au lieu de raisonner sur le second membre de (3), on doit évidemment pouvoir raisonner sur le premier et notamment sur la forme (4) de ce premier membre. C'est alors employer les formes dites tantôt *différentielles* (Goursat, Cartan, etc.), tantôt *intégrales* (Bateman, De Donder, etc.).

3. *Les potentiels gravifiques d'Einstein g_{ik} naissent d'une symétrie du champ électromagnétique.* — Dans les M_{ij} de la formule (3), introduisons un nouvel indice k de manière à obtenir des M_{ijk}. Dans une même formule (3) l'indice k sera toujours le même et il y aura, de ce fait, quatre formules (3) à considérer. Dans l'une quelconque de ces formules, on peut écrire indifféremment

$$(6) \qquad \pm 2 M_{ijk} \quad \text{ou} \quad \pm 2 M_{ijk} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j},$$

les g_{ij} constituant dix fonctions arbitraires. On a

$$g_{ik} = g_{ki}.$$

Imposons à l'expression trinome (6) d'être symétrique par rapport à tous les indices i, j, k, pris deux à deux, en disposant arbitrairement du double signe. Nous aurons des expressions

$$2\begin{bmatrix} ik \\ j \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j},$$

$$-2\begin{bmatrix} jk \\ i \end{bmatrix} = -\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j},$$

d'où

$$\begin{bmatrix} ik \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} jk \\ i \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}. \tag{7}$$

On retrouve ainsi les *crochets de Christoffel de première espèce.* Il est à remarquer que ces crochets, une fois définis comme nous venons de le faire, existent pour $i = j$, alors même que, dans ce cas, la première expression (6) est nulle.

Employons maintenant le jeu des indices du calcul tensoriel avec les notations de H. Weyl (*Raum, Zeit, Materie*; vierte Auflage, S. 113).

On aura d'abord

$$\begin{bmatrix} kr \\ i \end{bmatrix} = \Gamma_{i,kr} = g_{ij}\Gamma^j_{kr}, \tag{8}$$

d'où

$$\begin{Bmatrix} kr \\ i \end{Bmatrix} = \Gamma^i_{kr} = g^{ij}\Gamma_{j,kr},$$

le second groupe de formules définissant les *crochets de Christoffel de seconde espèce.*

Posons aussi

$$d\gamma_{ik} = \Gamma_{i,kr}\,dx_r \qquad \text{et} \qquad d\gamma^i_k = \Gamma^i_{kr}\,dx_r.$$

Soit un vecteur ξ^1, ξ^2, ξ^3, ξ^4; on aura

$$\xi^i\,d\gamma_{ik} = \xi^i g_{ij}\Gamma^j_{kr}\,dx_r = \xi_j\Gamma^j_{kr}\,dx_r = \xi_j\,d\gamma^j_k = \xi_i\,d\gamma^i_k.$$

Ceci posé, remplaçons (7) par

$$d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki} = dg_{ik}.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} \xi^i \xi^k (d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki}) - \xi^i \xi^k \, dg_{ik} &= 0, \\ 2\xi^i \xi^k \, d\gamma_{ik} - \xi^i \xi^k \, dg_{ik} &= 0, \\ 2\xi^k \xi_i \, d\gamma^i_k - \xi^i \xi^k \, dg_{ik} &= 0. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la variation infiniment petite du vecteur ξ soit définie par

$$d\xi^i = -d\gamma^i_k \xi^k. \tag{9}$$

Alors, en reprenant l'équation précédente, il viendra

$$\begin{aligned} 2\xi_i \, d\xi^i + \xi^i \xi^k \, dg_{ik} &= 0, \\ 2g_{ik} \xi^k \, d\xi^i + \xi^i \xi^k \, dg_{ik} &= 0, \\ g_{ik} \xi^k \, d\xi^i + g_{ik} \xi^i \, d\xi^k + \xi^i \xi^k \, dg_{ik} &= 0, \\ d(g_{ik} \xi^i \xi^k) &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Ainsi nos hypothèses nous ont conduits à un espace à quatre dimensions dans lequel le vecteur ξ varie, conformément à (9), sans que soit altérée l'expression

$$g_{ik} \xi^i \xi^k,$$

qui peut servir de *mesure* à ce vecteur. Un tel espace n'est évidemment pas euclidien en général; son élément linéaire est caractérisé par la formule

$$ds^2 = g_{ik} \, dx_i \, dx_k. \tag{11}$$

4. *Les déplacements parallèles et les géodésiques.* — L'équation (9) définit un mode de variation du vecteur ξ qui, avec la terminologie de Levi-Civita et Weyl, peut être qualifié de *déplacement parallèle;* dans l'espace ordinaire, les crochets de Christoffel sont nuls, il en est de même de $d\gamma^i_k$ et le vecteur modifié avec les conditions (9), réduites à $d\xi^i = 0$, ne subit bien qu'un déplacement parallèle, au sens élémentaire de ces mots, puisque les composantes ξ^i restent les mêmes.

Si ξ est une vitesse, c'est-à-dire si

$$\xi^i = \frac{dx_i}{ds},$$

l'équation (9) s'écrit

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx_i}{ds}\right) + \left\{ {kr \atop i} \right\} \frac{dx_k}{ds}\frac{dx_r}{ds} = 0. \tag{12}$$

Ces équations différentielles définissent les *géodésiques* de l'espace dont le ds^2 est (11). Dans l'espace ordinaire, toujours de par la nullité des crochets de Christoffel, les géodésiques sont des droites.

5. *Courbure.* — Les questions de courbure, qui jouent un rôle essentiel dans la formation des dix équations fondamentales d'Einstein, peuvent être immédiatement rattachées à l'étude de la formule (2) ou de la première identité (1).

Soit un vecteur A_μ et venons, cette fois, aux notations et raisonnements de M. A.-S. Eddington (*Espace, Temps, Gravitation;* trad. Rossignol; partie théorique, p. 44).

Par dérivation immédiate et considération de (12), on a

$$\frac{d}{ds}\left(A_\mu \frac{dx_\mu}{ds}\right) = A_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$$

avec

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\} A_\alpha. \tag{13}$$

Ceci est la *dérivée covariante* qui donne le *rotationnel*

$$A_{\nu\mu} - A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \tag{14}$$

Tout ceci peut se traduire par ce fait que, dans le déterminant de (2), on peut remplacer les deux dernières lignes par

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{matrix}.$$

De même

$$\frac{d}{ds}\left(A_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\right) = A_{\mu\nu\sigma}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{dx_\sigma}{ds}$$

avec

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\} A_{\alpha\nu} - \left\{ \begin{matrix} \nu\sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\} A_{\mu\alpha}. \tag{15}$$

Si, pour les A à deux indices du second membre de (15), on prend les dérivées covariantes (13), on a facilement (Eddington, *loc. cit.*, p. 53)

$$A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu} = B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} A_{\varepsilon}$$

avec

$$B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \varepsilon \end{matrix} \right\}.$$

Ce sont là les composantes du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. Le tenseur « contracté » correspondant à $\varepsilon = \sigma$ permet d'écrire les dix équations fondamentales d'Einstein qui, pour un phénomène physique donné, permettent à leur tour de déterminer les g_{ik} de (11). L'achèvement du problème dépend alors d'une question de lignes géodésiques régie par les équations (12). Bien que cette partie de la question soit évidemment très importante, nous n'y insisterons pas davantage, faute, pour le moment, d'un apport original.

6. *Le champ électromagnétique et la formule* (2). — Revenons au paragraphe **2**. La vitesse de la lumière étant prise pour unité et avec

$$\begin{array}{llll} M_{12} = Z, & M_{14} = -\alpha, & M^*_{12} = \alpha, & M^*_{14} = X, \\ M_{23} = X, & M_{24} = -\beta, & M^*_{23} = \beta, & M^*_{24} = Y, \\ M_{31} = Y, & M_{34} = -\gamma, & M^*_{34} = \gamma, & M^*_{34} = Z, \end{array}$$

les équations de Maxwell-Lorentz sont

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} = -\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}, & \dfrac{\partial \gamma}{\partial y} - \dfrac{\partial \beta}{\partial z} = \dfrac{\partial X}{\partial t} + u, \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} = -\dfrac{\partial \beta}{\partial t}, & \dfrac{\partial \alpha}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma}{\partial x} = \dfrac{\partial Y}{\partial t} + v, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} = -\dfrac{\partial \gamma}{\partial t}, & \dfrac{\partial \beta}{\partial x} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial y} = \dfrac{\partial Z}{\partial t} + w, \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial \beta}{\partial y} + \dfrac{\partial \gamma}{\partial z} = 0, & \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z} = \rho. \end{array} \right. \tag{16}$$

Ceci toujours avec les notations de M. Eddington (*loc. cit.*, p. 117).

De plus, la force électrique (X, Y, Z) et la force magnétique (α, β, γ) sont données par les équations

$$(17)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial t}, & Y = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial t}, & Z = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial t}, \\ \alpha = \dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial z}, & \beta = \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial x}, & \gamma = \dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y}, \end{cases}$$

où Φ est un potentiel scalaire et (F, G, H) un potentiel vecteur.

Or, toujours avec M. Eddington, posons

$$(-F, -G, -H, \Phi) = k_\mu.$$

Le vecteur k_μ, ou k_1, k_2 k_3, k_4, a ses rotationnels au bas du déterminant de la formule (2); on peut leur donner la forme (14). Raisonnons maintenant comme lorsque, au paragraphe **3**, nous avons tiré les g_{ik} de la formule (3).

Dans (2), on peut ajouter aux rotationnels (14) des rotationnels analogues dépendant d'un scalaire arbitraire φ; cela ajoute $d\varphi$ sous l'intégrale de ligne et ne modifie rien. Si les composantes k_μ, c'est-à-dire toutes les expressions (17), étaient nulles, il n'y aurait point de champ électromagnétique et la formule (2) s'évanouirait en l'identité $0 = 0$; *le champ électromagnétique correspond au cas où la formule* (2) *existe sous sa forme générale.*

Cette assertion a été illustrée par Weyl et Eddington en faisant intervenir l'*étalonnement.* La longueur l d'un étalon dépendrait de son déplacement dans l'espace-temps; pour un déplacement infiniment petit, le taux de la variation serait

$$\frac{dl}{l} = k_1\,dx_1 + k_2\,dx_2 + k_3\,dx_3 + k_4\,dx_4.$$

Pour un déplacement fini, cette variation serait, par suite, mesurée par

$$\log\frac{l}{l_0},$$

expression où l_0 correspond au scalaire φ introduit tout à l'heure;

c'est à cette modification d'un étalon, transporté dans l'espace-temps, que correspond le champ électromagnétique.

Dans le cas du champ généralisé de M. De Donder, les formules (17) sont à remplacer par celles qui donnent les $M_{ij}^{\star}$ à la fin du paragraphe **2**. Elles sont toujours au nombre de six et toutes les fois qu'on disposera de six fonctions de cette forme on pourra construire une formule (2) au premier membre de laquelle correspondra un problème d'étalonnement.

7. *Conclusions.* — La notion d'étalonnement qui vient d'être rappelée est, à coup sûr, d'un grand intérêt. Mais ce n'est pas la seule; elle correspond à la formule (2) et aux équations (17). Les phénomènes électromagnétiques correspondent aussi bien à la formule (3) et aux équations (16). Il y a deux formules stokiennes dans l'espace-temps; ce sont (2) et (3).

Il serait invraisemblable que l'une joue un rôle essentiel sans qu'il en soit de même de l'autre. L'ingénieuse image d'étalonnement, spécialement attachée à (2), ne va pas sans une image attachée à (3), image qui pourrait être celle-ci :

Les phénomènes électromagnétiques correspondent à l'invariance d'une intégrale triple attachée à une variété V *tridimensionnelle et déformable dans l'espace-temps, alors que cette variété conserve une frontière* S *bidimensionnelle et invariable.*

Ceci est une image d'invariance; l'image d'étalonnement de Weyl ne fait peut-être pas suffisamment ressortir la chose. Les deux images doivent se compléter mutuellement.

Il faut d'ailleurs remarquer que *cette question d'étalonnement variable,* qui paraît à certains esprits si mystérieuse et si subversive, *repose aussi sur une invariance :* celle de l'intégrale double de la première formule stokienne (2) quand on déforme le champ d'intégration bidimensionnel A, dans l'espace-temps, sans toucher à sa frontière C.

Enfin la formule (3) permet de construire les g_{ik} et le ds^2 d'expression (17); on n'a pas à postuler ce ds^2 comme on le fait ordinairement.

Le champ électromagnétique est ainsi la base universelle; il

correspond lui-même aux identités (1), c'est-à-dire à des identités de principe du Calcul intégral.

Le style bref de ces affirmations n'est pas pour leur conférer un caractère dogmatique qui, à coup sûr, est loin de ma pensée. Mais, pour l'instant et faisant toutes réserves quant à de nouvelles études et de nouvelles réflexions, je pense que les variabilités d'apparence bizarre des théories relativistes (telles la variabilité des étalons) n'excluent nullement des phénomènes physiques la notion d'invariance, à condition que cette invariance soit représentée, au fond, par des invariants intégraux. Ces derniers dominent les équations différentielles des phénomènes et les invariants différentiels. Tout cela, au surplus, n'a-t-il pas été pressenti par Henri Poincaré ?

La Théorie de la Relativité et les faits observés;

PAR S. ZAREMBA.

1. La Théorie de la Relativité (T. R.), imaginée par M. Einstein [1], exerce une séduction considérable par l'ampleur presque illimitée des espérances qu'elle semble autoriser. Mais, il faut bien l'avouer, elle promet trop pour ne pas inspirer quelque défiance, défiance accrue par l'immensité des sacrifices qu'il faudrait consentir pour l'adopter.

Il est donc indiqué d'examiner avec soin si les propositions, confirmées par les observations et présentées par les relativistes comme des conséquences logiques des hypothèses de leur théorie, dérivent réellement de ces hypothèses.

Tel sera précisément l'objet de ce travail.

Notre but n'est donc pas, comme il arrive souvent dans les recherches créatrices relatives à la Physique, de découvrir des propositions assez vraisemblables pour mériter une étude ultérieure approfondie. Nous avons au contraire à résoudre une question qui ressort essentiellement de la logique et qui consiste simplement à vérifier si un certain système donné d'hypothèses entraîne bien certaines propositions données. Donc, sous peine de manquer notre but, nous devons nous efforcer d'atteindre le maximum de précision dans les énoncés et de rigueur dans les démonstrations.

Nous constaterons que, dans tous les cas où les relativistes ont cru avoir démontré qu'une proposition, confirmée par des obser-

---

[1] *Voir* en particulier la série d'articles publiés par M. Einstein dans les *Sitzungsberichte der Berliner Akademie*, depuis 1914.

vations, est une conséquence des hypothèses de la T. R., ils ont appuyé leur thèse par des considérations basées non seulement sur les hypothèses de la T. R., mais encore sur quelque affirmation absolument gratuite ou sur des hypothèses logiquement incompatibles avec celles de la T. R.

On s'assurera en outre que les hypothèses de la T. R. sont insuffisantes pour établir une correspondance entre des opérations de mesure et les valeurs numériques des symboles entrant dans les formules de la théorie. Donc, avant de pouvoir parler de l'accord ou du désaccord de la T. R. avec les faits observés, il faudrait la compléter au moyen d'hypothèses additionnelles. J'ose croire qu'après avoir pris la peine de lire ce travail, on conviendra avec moi qu'un tel perfectionnement de la T. R. est bien loin d'être chose aisée.

Bien entendu, les résultats précédents ne constituent cependant pas une réfutation de la T. R., car nous n'avons nullement prouvé l'impossibilité de compléter les hypothèses de la T. R. de façon à la transformer en une théorie s'accordant réellement avec les données dues à l'observation. Y arrivera-t-on jamais ? Dans l'état actuel des choses, chacun est libre de répondre à cette question selon la nature de sa propre mentalité [1]. Quel que doive être d'ailleurs le sort ultime de la T. R., elle aura dans tous les cas rendu service à la Science, car elle semble avoir fait prévoir l'existence de phénomènes nouveaux et elle a provoqué quelques excellents travaux relatifs à la Géométrie générale, tels que, par exemple, le beau Mémoire de M. Levi-Civita [2] sur la notion de parallélisme.

2. Quels sont les fondements de la T. R.? Telle est la première question à laquelle nous avons à répondre. Elle est quelque peu embarrassante, parce que tous les auteurs n'adoptent pas un même

---

(1) Lire dans le numéro d'octobre 1921 des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, les deux Notes suivantes : Paul Painlevé, *La Mécanique classique et la théorie de la relativité*, p. 677. — Émile Picard, *Quelques remarques sur la théorie de la relativité*, p. 680.

(2) *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1917, fasc. II et III, p. 173.

système d'hypothèses et surtout parce que, trop souvent, les adeptes de la T. R. dédaignent *de propos délibéré* de présenter des énoncés précis et des démonstrations rigoureuses, ainsi que cela résulte en particulier du passage suivant de la conversation entre « un Physicien expérimental, un Mathématicien et un Relativiste, défenseur des plus nouvelles conceptions du temps et de l'espace » imaginée par M. Eddington [1].

« *Le Physicien.* — ...Mais vous-même êtes-vous bien sûr de la définition logique de tous les termes que vous employez ?

» *Le Relativiste.* — Le ciel m'en préserve ! Je ne suis pas naturellement porté à être exigeant sur ce point !... »

Dans ces conditions, il est naturellement souvent bien malaisé de découvrir quelle est au juste la pensée de l'auteur.

Toutefois, comme nous n'avons pas à nous occuper des dernières généralisations de la T. R., proposées successivement par M. Weyl [2] et M. Eddington [3], parce que l'on n'a pas encore essayé de contrôler ces généralisations par l'observation, et comme d'autre part les postulats de la T. R. adoptés par M. Hilbert [4] et clairement formulés par ce distingué mathématicien, interviennent seuls dans les applications que nous avons à discuter, nous nous bornerons à énoncer les fondements de la T. R. d'après M. Hilbert, en nous permettant cependant de préciser bien des choses que M. Hilbert ne fait que sous-entendre dans divers passages de ses deux Mémoires.

Dans la T. R., comme dans toute théorie déductive, il est impossible de se passer d'un certain nombre de termes regardés comme intelligibles sans aucune définition; nous les appellerons *termes*

---

(1) Eddington, *Espace, Temps et Gravitation*, p. 5 (Paris, 1921, chez Hermann). Traduit de l'anglais par M. J. Rossignol.

(2) Hermann Weyl, *Raum, Zeit, Materie*. Berlin, Julius Springer, 1921.

(3) *Voir*, dans l'Ouvrage de M. Eddington, cité plus haut, le paragraphe 50 de la partie théorique, p. 124 et suiv.

(4) D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik*, erste Mitteilung (*Göttinger Nachrichten*, 1915, Heft 3, p. 395) ainsi que zweite Mitteilung (même journal, 1917, Helft 1, p. 53).

primitifs (1) de la théorie et nous dirons que les notions correspondantes en sont les *notions primitives.* Il va sans dire que, pour exposer une théorie avec rigueur, on est tenu à en énumérer les termes primitifs. Observons encore que, s'il est impossible de définir les termes primitifs, il est au contraire possible et même indispensable, quand on tient à la rigueur, de fixer, dans une certaine mesure, le caractère des notions primitives en énonçant toutes celles des propositions supposées être vérifiées par ces termes, sur lesquelles on compte faire reposer la théorie que l'on se propose de développer; les propositions dont il vient d'être question constituent évidemment les hypothèses de la théorie.

En formulant les fondements de la T. R., nous admettrons naturellement en bloc la Logique et l'Analyse mathématique, puisque, en ce qui concerne ces Sciences, il y a accord complet entre relativistes et non relativistes. Nous nous bornerons donc à énumérer les termes primitifs et les hypothèses que l'on ne considère ni en Logique ni dans l'Analyse mathématique.

J'ajoute que nous ne sommes nullement tenus à énumérer *tous* les termes primitifs et à énoncer *toutes* les hypothèses de la T. R.; nous pourrons nous borner aux termes primitifs dont nous aurons à nous servir et aux hypothèses sur lesquelles nous comptons nous appuyer.

On sera sans doute frappé du caractère abstrait et essentiellement mathématique des hypothèses de la T. R. Ce caractère des postulats de la T. R. tient à la structure inusitée de cette théorie. Au lieu de commencer, comme dans les autres théories de la

---

(1) Dans les questions ressortant de la logique et qui seront les seules dont nous aurons à nous occuper, l'expression de *terme primitif* n'implique nullement l'idée qu'au point de vue de la Psychologie, les notions correspondantes soient des notions premières, apparaissant dans l'esprit avant toutes les autres. En réalité, c'est même le contraire qui est ordinairement vrai. Ainsi, par exemple, les géomètres considèrent volontiers le terme de *point* comme terme primitif et, pourtant, on peut affirmer hardiment que la notion correspondante n'apparaît que dans une phase relativement avancée du développement de l'intelligence. Le choix des termes primitifs d'une théorie déductive n'est dicté que par des considérations de clarté et de simplicité relatives à la structure de la théorie.

Physique, par fixer avec netteté le sens physique des symboles mathématiques que l'on se propose d'introduire, M. Einstein et ses disciples adoptent l'ordre inverse : ils construisent leur théorie, sans préciser le sens physique des symboles qu'ils emploient, quitte à en chercher après coup l'interprétation physique précise, laquelle d'ailleurs, comme on s'en convaincra en lisant ce travail, reste encore à trouver. C'est ce qui fait, notons-le en passant, qu'il est impossible de donner une idée adéquate de la T. R. sans faire largement usage de la Mathématique.

Voici les seuls quatre termes primitifs de la T. R. dont nous aurons à nous servir :

Point géométrique; Époque; Point physique, ainsi que le mot *antérieur*, considéré comme le nom d'une relation entre deux époques.

Tous ces termes peuvent être regardés comme des termes primitifs communs à la T. R. et aux autres théories de la Physique; mais, selon le cas, on devra admettre qu'ils vérifient tantôt certaines propositions, tantôt certaines autres.

En passant aux énoncés de celles des hypothèses et définitions de la T. R. sur lesquelles nous aurons à nous appuyer, faisons observer, une fois pour toutes, que nous considérerons *exclusivement* des quantités *réelles*.

Hypothèses et définitions communes [1] *à la T. R. et à toutes les autres théories de la Physique :*

I. *Hypothèse.* — Tout point géométrique peut être considéré à n'importe quelle époque.

II. *Définition.* — L'expression *point-époque* désigne un point géométrique considéré à quelque époque déterminée.

III. *Définition.* — L'ensemble de tous les points-époques s'appellera *hyperespace physique* et l'expression point-époque sera regardée comme équivalente à l'expression *point de l'hyperespace physique.*

---

[1] Je ne crois pas me tromper en affirmant que tous les auteurs adoptent réellement, au fond, toutes ces hypothèses et définitions, bien que, ordinairement, on se borne à les indiquer par de simples allusions plus ou moins claires.

IV. *Hypothèse.* — Il est possible de définir un ensemble (E) de régions de l'hyperespace physique de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

1° Tout point de l'hyperespace physique appartient au moins à l'une des régions de l'ensemble (E).

2° Lorsque deux régions (R) et (R′) appartiennent à l'ensemble (E), elles peuvent toujours être considérées comme les termes extrêmes d'une suite finie de régions appartenant à l'ensemble (E), et telle que deux termes consécutifs de cette suite aient toujours au moins un point commun.

3° Lorsqu'une région (R) de l'hyperespace physique, appartient à l'ensemble (E), on peut toujours établir une correspondance réciproque et biunivoque entre les points de la région (R) et ceux des systèmes de valeurs de quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4 qui forment un certain ensemble (X_r) de points dans l'espace arithmétique à quatre dimensions.

V. *Définition.* — Les régions de l'hyperespace physique, faisant partie d'un ensemble possédant les propriétés énumérées dans l'énoncé précédent, s'appelleront *régions élémentaires* et un tel ensemble lui-même, ensemble *complet* de régions élémentaires ; lorsque les symboles (R), x_1, x_2, x_3, x_4 et (X_r) auront la signification que nous leur avons donnée plus haut, nous dirons que le système x_1, x_2, x_3, x_4 de quatre variables est un *système de coordonnées* relatif à la région (R), l'ensemble (X_r) étant l'*image arithmétique* correspondante de la région considérée.

VI. *Hypothèse.* — Il est possible de constituer un ensemble complet de régions élémentaires de l'hyperespace physique, de telle sorte que chacune d'elles puisse être rapportée à un système de coordonnées x_1, x_2, x_3, t, vérifiant les conditions suivantes :

1° L'ensemble de toutes les valeurs de t correspondant aux divers points de la région élémentaire considérée (R) constitue un certain intervalle ouvert (I).

2° Il correspond à l'intervalle de variabilité (I) de la variable t un certain ensemble d'époques, tel qu'il subsiste entre les époques

de cet ensemble et les valeurs de t, intérieures à l'intervalle (I), une correspondance réciproque et biunivoque.

3° Lorsque deux valeurs inégales t' et t'' de t appartiennent à l'intervalle (I), une *seule* des deux époques correspondantes est, du moins dans le système de coordonnées considéré, *antérieure* à l'autre et c'est celle qui correspond au plus petit des nombres t' et t''.

VII. *Définition.* — Les notations de l'hypothèse précédente étant conservées et t' étant une valeur de t appartenant à l'intervalle (I), nous dirons que l'ensemble des époques qui correspondent aux valeurs de t appartenant à l'intervalle (I) et vérifiant la relation

$$t \leqq t'$$

constitue le temps relatif à la région (R) et au système de coordonnées considéré, défini par la valeur $t = t'$ de la variable t; pour caractériser le rôle de cette variable, nous dirons qu'elle représente le *temps* pour la région (R) et dans le système de coordonnées considéré.

VIII. *Hypothèse.* — Lorsque dans un système de coordonnées x_1, x_2, x_3, t relatif à une région élémentaire (R) de l'hyperespace physique, la variable t représente le temps, tout système de valeurs des trois variables x_1, x_2, x_3, appartenant à l'ensemble de tous ceux des systèmes de valeurs que ces variables peuvent prendre lorsque le point arithmétique (x_1, x_2, x_3, t) ne sort pas de l'image arithmétique de la région (R), définit un point géométrique.

IX. *Définition.* — Les notations de l'hypothèse précédente étant conservées, désignons par t_0 une valeur de t appartenant à l'intervalle de variabilité de cette variable et par (X_{t_0}) l'ensemble de tous ceux des systèmes de valeurs des variables x_1, x_2, x_3 dont chacun définit, conjointement avec la valeur t_0 de t, quelque point de la région (R); nous dirons que l'ensemble de tous les points géométriques correspondant à l'ensemble (X_{t_0}) des systèmes de valeurs des trois variables x_1, x_2, x_3 constitue la région de l'espace relatif au système de coordonnées employé, contenue par la région (R) à l'époque $t = t_0$.

X. *Hypothèse.* — Tout point physique M conserve invariablement son individualité et se trouve à une époque donnée E en un point géométrique déterminé A; pour exprimer la relation précédente entre les éléments M, E et A, nous dirons qu'à l'époque E le point physique M se trouve au point P de l'hyperespace physique, point constitué par le point géométrique A considéré à l'époque E; nous dirons aussi que les coordonnées du point P de l'hyperespace physique sont celles du point physique M à l'époque E.

XI. *Hypothèse.* — Lorsque, à deux époques différentes E_1 et E_2, un *même* point physique se trouve en des points d'une même région élémentaire (R), de la nature considérée dans l'hypothèse VI, une *certaine* des époques E_1 et E_2 est *antérieure* à l'autre dans *n'importe* lequel des systèmes de coordonnées dont l'existence est assurée par l'hypothèse VI.

A ces hypothèses et définitions communes à toutes les conceptions de la Physique, nous adjoindrons l'hypothèse suivante, particulière à la T. R. :

XII. *Hypothèse particulière à la T. R.* (¹). — Il est possible de constituer un ensemble complet de régions élémentaires de l'hyperespace physique (énoncé V, p. 110), régions qui s'appelleront *régions élémentaires régulières*, de façon qu'il corresponde à chacune d'elles une classe particulière de systèmes de coordonnées, systèmes que nous appellerons *systèmes réguliers* de coordonnées et qui sont caractérisés par les propriétés suivantes :

1° Lorsqu'une région régulière de l'hyperespace physique est rapportée à un système régulier de coordonnées, l'image arithmétique (énoncé V, p. 110) de cette région est constituée par un

(¹) L'énoncé qui va suivre contient bien des choses que M. Hilbert ne dit pas d'une façon explicite et que je n'ai pu passer sous silence puisque, ne présentant pas un exposé de la T. R., je n'ai pas eu la ressource de les faire sous-entendre. Toutefois, je ne crois pas m'être écarté de la pensée de M. Hilbert. *Voir* en particulier les passages suivants des deux Mémoires de cet auteur : *Göttinger Nachrichten*, 1915, Heft 3, p. 395, et même journal, 1917, Heft 1, p. 57.

domaine ouvert, simplement connexe, situé dans l'espace arithmétique à quatre dimensions.

2° Il correspond à tout système régulier de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 relatif à une région régulière (R) de l'hyperespace physique un système de dix fonctions

$$g_{ik} = g_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

bien déterminées des variables x_1, x_2, x_3, x_4, définies dans l'image arithmétique (X_r) de la région (R), relative au système de coordonnées considéré; ces fonctions s'appellent, d'après M. Einstein, *potentiels de gravitation* et sont telles que le discriminant de la forme différentielle

$$\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

est négatif.

3° Les potentiels de gravitation g_{ik} admettent des dérivées partielles continues dans tout le domaine (X_r) jusqu'à un certain ordre p inclusivement; nous supposerons $p = 3$, parce que c'est la plus petite valeur que l'on puisse attribuer à p pour légitimer sans peine les calculs que l'on rencontre ordinairement dans la T. R.

4° Pour qu'un système d'équations de la forme

$$(1) \qquad x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où l'ensemble des variables x_1, x_2, x_3, x_4 représente un système régulier de coordonnées relatif à une région élémentaire régulière (R) de l'hyperespace physique, définisse les variables x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 comme un nouveau système régulier de coordonnées relatif à la région (R), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

a. Les fonctions $f_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sont bien déterminées et possèdent des dérivées partielles continues jusqu'au quatrième ordre inclusivement dans tout le domaine (X_r) qui représente l'image arithmétique (énoncé V, p. 110) de la région (R) relative au système de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4.

b. Si l'on désigne par (X'_r) le transformé du domaine (X_r) par la substitution (1), les équations (1) font correspondre à un point de (X'_r) un seul point du domaine (X_r).

c. Dans tout le domaine (X_r), on a

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3, f_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)} \neq 0.$$

5° Lorsque les formules (1) constituent, pour une région élémentaire régulière de l'hyperespace physique, les formules de passage d'un système régulier de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, à un second système régulier x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, ces formules entraînent l'égalité

$$\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\, dx_i\, dx_k = \sum_{i,k=1}^{4} g'_{ik}\, dx'_i\, dx'_k,$$

où les g_{ik} et les g'_{ik} représentent les potentiels de gravitation relatifs aux systèmes de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 et x'_1, x'_2, x'_3, x'_4.

6° Soient (R) une région élémentaire régulière de l'hyperespace physique rapportée à un système régulier de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, et (X_r) l'image arithmétique (énoncé V) correspondante de cette région. Si l'on désigne alors par (X'_r) un domaine ouvert et simplement connexe contenu dans le domaine (X_r) et par (R′) la portion de (R) que le système de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 fait correspondre au domaine (X'_r), le système complet $(\mathcal{E})$ de régions élémentaires régulières dont fait partie la région (R) se transformera en un nouveau système complet de régions élémentaires régulières si l'on adjoint la région (R′) à l'ensemble $(\mathcal{E})$.

7° Désignons par (R_1) et (R_2) deux régions élémentaires régulières de l'hyperespace physique et par $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ les systèmes complets dont ces régions font partie. Sans admettre que les systèmes complets $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ soient forcément distincts, supposons que les régions (R_1) et (R_2) aient un point commun A. Il existera alors une région (R_0) de l'hyperespace physique, contenant le point A et contenue dans chacune des régions (R_1) et (R_2), telle que par l'adjonction de cette région à l'un quelconque des sys-

tèmes $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$, l'on obtienne encore un système complet de régions élémentaires régulières de l'hyperespace physique.

8° Lorsque deux régions (R) et (R′) de l'hyperespace physique font partie d'un même système complet de régions élémentaires régulières, lorsqu'en outre la région (R′) est contenue dans la région (R), tout système régulier de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 relatif à la région (R), ainsi que les potentiels de gravitation correspondants, peuvent être regardés comme formant les éléments analogues relatifs à la région (R′), à condition d'assigner pour domaine au point arithmétique (x_1, x_2, x_3, x_4) celui que le système de coordonnées considéré fait correspondre à la portion (R′) de la région (R).

9° L'ensemble des systèmes réguliers de coordonnées, relatifs à une région élémentaire régulière de l'hyperespace physique, contient une classe particulière de systèmes de coordonnées, que nous appellerons systèmes *normaux* de coordonnées et qui sont tels que, sur les quatre variables qui constituent un système de coordonnées de la classe considérée, l'une représente le temps au sens de la définition VII (p. 111).

10° Les systèmes normaux de coordonnées relatifs à une région élémentaire régulière (R) de l'hyperespace physique sont caractérisés [1] par la propriété suivante :

Les notations étant disposées de façon que, sur les quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4, formant ensemble un système normal de coordonnées relatif à la région (R), la variable x_4 représente le temps, les potentiels de gravitation correspondants g_{ik} satisferont aux conditions que voici :

$$g_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \qquad g_{44} < 0.$$

En rapprochant les propriétés attribuées par l'énoncé précédent aux potentiels de gravitation g_{ik} de la géométrie métrique d'un

---

[1] Hilbert, *Die Grundlagen der Physik*, zweite Mitteilung (*Göttinger Nachrichten*, 1917, Heft 1, p. 57).

espace arithmétique à n dimensions, on sera conduit à donner avec nous le nom de *forme métrique* de la région considérée à la forme différentielle

$$\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Les douze hypothèses et définitions qui viennent d'être énoncées caractérisent la conception relativiste générale de l'hyperespace physique.

En dehors des hypothèses précédentes, nous n'aurons à tenir compte que des deux hypothèses qui seront énoncées plus loin et qui caractérisent le cas particulier de la T. R., appelé la *T. R. restreinte*.

Toutes les autres hypothèses de la T. R. n'étant dans aucun rapport avec les questions que nous aurons à discuter, nous nous dispenserons de les énoncer.

Il est de toute évidence que la possibilité de contrôler la T. R. au moyen des faits observés est subordonnée à l'existence de cas où l'on serait arrivé à déterminer les valeurs numériques des coordonnées de certains points physiques par des mesures effectuées à l'aide d'instruments appropriés. Il nous faut donc examiner si les relativistes ont fait connaître quelque procédé admissible pour établir, dans certains cas, une correspondance entre les valeurs numériques des coordonnées d'un point physique et des opérations de mesure.

3. Avant de passer à l'étude de cette question, il est indispensable d'analyser les bases théoriques des opérations de mesure de coordonnées en Physique non relativiste.

Cette analyse est nécessaire non seulement pour faciliter l'intelligence des considérations ultérieures, mais encore et surtout parce que, comme nous le constaterons plus bas, les relativistes appliquent les méthodes de mesures des non-relativistes.

Nous devons donc commencer par présenter les énoncés qui caractérisent la conception non relativiste de l'hyperespace physique. Il conviendra évidemment d'adopter, non pas l'ordre

d'exposition habituel, mais celui que les relativistes ont choisi pour faire connaître leur façon de concevoir l'hyperespace physique.

Nous avons déjà fait remarquer que les deux conceptions de l'hyperespace physique peuvent être exprimées au moyen des mêmes termes primitifs et que les onze premiers énoncés du numéro précédent sont communs à ces deux conceptions. Il suffira donc de présenter l'énoncé qu'il faut substituer à l'énoncé XII du numéro précédent pour passer de la conception relativiste de l'hyperespace physique à la conception non relativiste.

Pour éviter des complications qui ne contribueraient en rien à éclaircir les questions qui vont nous occuper, nous ne chercherons pas à atteindre le maximum de généralité de la conception non relativiste de l'hyperespace physique et nous supposerons, pour simplifier, que tout l'hyperespace physique peut être regardé comme *une seule région élémentaire* (énoncé V, p. 110).

Toutefois, pour mettre convenablement en évidence les principes sur lesquels reposent les opérations de mesure des coordonnées de points physiques en Physique non relativiste, il sera utile de nous élever au-dessus de la conception courante où l'on admet d'emblée la validité de la Géométrie euclidienne.

En définitive, voici l'énoncé que nous allons adopter :

XII *a*. *Hypothèse spécifique de la conception non relativiste de l'hyperespace physique.* — L'ensemble de tous les systèmes de coordonnées, à chacun desquels l'hyperespace physique peut être rapporté, contient une classe particulière de systèmes de coordonnées, systèmes que nous appellerons systèmes *normaux* de coordonnées et qui sont caractérisés par les propriétés suivantes :

1° L'une des quatre variables formant ensemble un système normal (S) de coordonnées, soit t, représente le temps relatif au système (S) au sens de la définition VII (p. 111).

2° Aux trois autres variables x_1, x_2, x_3, du système (S), correspond une forme différentielle quadratique définie, positive,

$$(1) \qquad \sum_{i,k=1}^{3} h_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (h_{ik} = h_{ki}),$$

dont les coefficients h_{ik} sont des fonctions bien déterminées des seules variables x_1, x_2, x_3, admettant des dérivées partielles continues jusqu'à un certain ordre p inclusivement; nous supposerons $p = 3$, parce que c'est la plus petite valeur que l'on puisse attribuer à p pour légitimer aisément les calculs les plus ordinaires dans la théorie qui nous occupe.

3° La forme (1) représente le ds^2 d'un espace arithmétique à courbure constante; nous l'appellerons *forme métrique* relative au système normal de coordonnées x_1, x_2, x_3, t.

4° Les notations précédentes étant conservées, pour que des formules exprimant quatre nouvelles variables x'_1, x'_2, x'_3, t' en fonctions des variables x_1, x_2, x_3 et t puissent être considérées comme les formules de passage du système normal de coordonnées x_1, x_2, x_3, t à un nouveau système normal de coordonnées x'_1, x'_2, x'_3, t', il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :

a. Les formules considérées doivent être de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3, t) & (i = 1, 2, 3), \\ t' = at + b, \end{cases}$$

où a et b sont deux constantes dont la première est positive, les fonctions $f_i(x_1, x_2, x_3, t)$ étant bien déterminées et admettant des dérivées partielles continues jusqu'au quatrième ordre inclusivement pour tous les systèmes de valeurs des variables x_1, x_2, x_3, t.

b. A tout système de valeurs des variables x'_1, x'_2, x'_3, t', les équations (1) doivent faire correspondre un système unique des valeurs des variables x_1, x_2, x_3, t.

c. On doit toujours avoir

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \neq 0.$$

d. Le résultat de la transformation de la forme (1) au moyen de la substitution définie par les trois premières équations du système (2), dans le cas où l'on pose

$$dt = 0,$$

doit être une forme différentielle

$$\sum_{i,k=1}^{3} f_{ik}\, dx'_i\, dx'_k, \qquad f_{ik} = f_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

dont les coefficients f_{ik} sont des fonctions des variables x'_1, x'_2, x'_3, *indépendantes* de t.

5° Les conditions précédentes étant remplies, les coefficients de la forme métrique

$$\sum_{i,k=1}^{3} h'_{ik}\, dx'_i\, dx'_k,$$

relative au nouveau système normal de coordonnées, seront définis par les formules

$$h'_{ik} = \lambda f_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

où λ représente un nombre positif [1] dont la valeur peut être fixée arbitrairement et qui, après cette opération, et lorsque les formules (2) sont données, achève de déterminer la nature du système de coordonnées x'_1, x'_2, x'_3, t'.

L'hypothèse précédente, conjointement avec les onze premiers énoncés du numéro précédent, caractérise la conception non relativiste de l'hyperespace physique. Les douze énoncés ainsi obtenus ne sont pas logiquement indépendants, mais c'est sans importance pour nous.

4. La conception non relativiste de l'hyperespace physique étant adoptée, examinons dans quelles conditions et de quelle façon des mesures de coordonnées de points physiques pourraient être effectuées.

---

[1] L'introduction du nombre λ offre cet avantage que, après avoir déterminé complètement la correspondance entre les points de l'hyperespace physique et les systèmes de valeurs des quatre variables qui doivent former un système normal de coordonnées, on peut encore choisir arbitrairement l'élément que nous définirons plus tard comme l'étalon de longueur relatif au système de coordonnées considéré.

On nous accordera sans doute que, à titre d'axiome, on peut admettre la proposition suivante :

(A). *Axiome.* — Quelque conception de l'hyperespace physique que l'on adopte, on ne pourra y effectuer des mesures de coordonnées de points physiques qu'après avoir satisfait aux deux conditions suivantes :

1° Présenter les définitions théoriques des instruments de mesure dont on compte se servir, c'est-à-dire définir des systèmes de points physiques qui, s'ils existaient, constitueraient, sous forme parfaite, les instruments nécessaires.

2° Faire connaître des systèmes de points physiques existant réellement et que l'on pourra regarder comme représentant les instruments théoriques avec une approximation suffisante, du moins dans certaines conditions et peut-être moyennant certaines corrections des résultats obtenus en s'en servant.

Voyons comment le non-relativiste satisfait à ces conditions. A cet effet supposons que l'hyperespace physique soit rapporté à un système normal de coordonnées (énoncé XII *a*, p. 117) et soit, sur les quatre variables x_1, x_2, x_3, t qui forment le système considéré, t celle qui représente le temps.

En vertu de l'hypothèse VIII (p. 111) l'ensemble des trois variables x_1, x_2, x_3 pourra être considéré comme formant un système de coordonnées auquel l'ensemble de tous les points géométriques, c'est-à-dire (énoncé IX, p. 111) tout l'espace relatif au système de coordonnées considéré, serait rapporté. Il est donc naturel de dire avec nous que, sur les quatre coordonnées d'un point physique, celles qui représentent les valeurs de x_1, x_2, x_3 et qui définissent le point géométrique où se trouve, à l'époque définie par la quatrième coordonnée t, le point physique, constituent les coordonnées *spatiales* du point physique à l'époque considérée. Le point géométrique défini, à une époque donnée, par les coordonnées spatiales du point physique à cette époque, s'appellera *position* du point physique à l'époque considérée.

Nous appellerons *arc géométrique régulier*, un ensemble (α) de points géométriques, tel que, entre les points géométriques de cet

ensemble et celles des valeurs d'un paramètre λ qui appartiennent à un certain intervalle fermé (λ_1, λ_2), $(\lambda_1 < \lambda_2)$, l'on puisse établir une correspondance réciproque et biunivoque, définie par des équations de la forme

$$x_i = f_i(\lambda) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

où x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées d'un point appartenant à l'ensemble (α), les $f_i(\lambda)$ étant des fonctions continues, définies dans l'intervalle fermé (λ_1, λ_2) et possédant à l'intérieur de cet intervalle des dérivées bornées et continues ne s'annulant jamais à la fois.

La forme

$$\sum_{i,k=1}^{3} h_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

étant la forme métrique relative au système de coordonnées (x_1, x_2, x_3, t), nous regarderons comme *longueur* de l'arc (1), estimé dans le système de coordonnées considéré, le nombre s défini par la formule

$$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\sum_{i,k=1}^{3} h_{ik}\, f_i'(\lambda)\, f_k'(\lambda)}\, d\lambda,$$

où l'on doit prendre la détermination positive du radical.

Les conventions usuelles permettent d'exprimer brièvement la définition précédente en disant que l'espace relatif au système de coordonnées x_1, x_2, x_3, t est considéré comme admettant un ds^2 déterminé, défini par la formule

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} h_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Les mêmes conventions suggèrent assez clairement ce qu'il convient d'entendre par *géodésiques* de l'espace relatif au système de coordonnées x_1, x_2, x_3, t, pour qu'une définition explicite soit superflue.

Nous entendrons par *distance* de deux points géométriques,

estimée dans le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3, t), le minimum de longueur d'un arc géométrique régulier joignant les deux points considérés, en supposant bien entendu que la longueur d'un tel arc soit toujours estimée dans le système de coordonnées x_1, x_2, x_3, t.

Nous appellerons encore *distance* de deux points physiques P et Q à une époque $t = t_0$, estimée dans le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3, t), la distance des points géométriques représentant les positions respectives des points P et Q à l'époque $t = t_0$, cette distance étant, bien entendu, estimée dans le système de coordonnées x_1, x_2, x_3, t.

Continuons à désigner par P et Q deux points physiques; désignons en outre par (x_1, x_2, x_3, t) et (x'_1, x'_2, x'_3, t') deux systèmes normaux de coordonnées relatifs à l'hyperespace physique, par t_0 une valeur de t et par t'_0 la valeur de t' qui, en vertu des formules de passage de l'un des deux systèmes de coordonnées précédents au second, correspond à la valeur t'_0 de t. Cela posé, l'hypothèse XII *a* (p. 117) permettra de démontrer sans peine le théorème suivant :

(B). *Théorème.* — Si l'on désigne par s et s' les valeurs respectives de la distance des points physiques P et Q, estimées dans les systèmes de coordonnées (x_1, x_2, x_3, t) et (x'_1, x'_2, x'_3, t') aux époques t_0 et t'_0, on aura

$$s' = \mu s,$$

où μ représente une constante qui ne dépend que de la nature des deux systèmes de coordonnées.

Voici maintenant une définition fondamentale pour ce qui va suivre.

(C). *Définition.* — L'assertion qu'un système (S) de points physiques est un système de points *rigide* ou un corps *rigide*, exprime que la distance mutuelle de deux points appartenant au système (S), estimée dans un système normal de coordonnées arbitrairement choisi, est toujours indépendante de l'époque à laquelle elle se rapporte.

La propriété de rigidité d'un système de points physiques en est

évidemment une propriété intrinsèque. Il résulte en outre du théorème (B) que, pour être certain qu'un système de points physiques est un système rigide, il suffit de savoir que la condition de rigidité est remplie, ne fût-ce que par rapport à un seul système normal de coordonnées.

Sans nuire à la clarté, nous croyons pouvoir nous dispenser de définir explicitement les systèmes de points physiques que nous appellerons *arcs réguliers* [1] *rigides;* nous croyons pouvoir de même omettre la définition du nombre qui sera considéré comme la *longueur* d'un arc régulier rigide, estimée dans un système normal de coordonnées.

Cela posé, on déduira sans peine de l'hypothèse XII *a* (p. 117) les deux théorèmes suivants :

(D). *Théorème.* — Il correspond à tout ensemble de deux systèmes normaux de coordonnées (S) et (S′) un nombre positif μ [égal à celui que l'on a désigné par la même lettre dans le théorème (B)], tel que si l'on désigne par s et s' les valeurs de la longueur d'un même arc régulier rigide, estimée successivement dans les systèmes (S) et (S′), on ait

$$s' = \mu s.$$

(E). *Théorème.* — Il correspond à tout arc régulier rigide (α) et à un nombre positif s_0, arbitrairement choisi, une classe (C) de systèmes normaux de coordonnées telle que le nombre s_0 représente précisément la longueur de l'arc (α), estimée dans n'importe quel système de coordonnées de la classe (C).

Notons encore qu'en s'appuyant sur la théorie classique des espaces arithmétiques à courbure constante, on peut aisément déduire de l'hypothèse XII *a* le théorème suivant :

(F). *Théorème.* — Le nombre de degrés de liberté d'un corps rigide atteint le maximum compatible avec la définition (C), c'est-à-dire le nombre 6 lorsque les points physiques qui constituent

---

[1] *Voir* p. 120 et 121.

le corps considéré ne se trouvent à aucune époque sur une même géodésique de l'espace.

Pour pouvoir effectuer des mesures de coordonnées dans l'hyperespace physique tel que le conçoivent les non-relativistes, il suffirait de disposer d'un étalon de longueur, d'un goniomètre et d'une horloge. Pour satisfaire à la condition 1° de l'axiome (A) (p. 120), en ce qui concerne un étalon de longueur, on peut adopter la définition suivante :

(G). *Définition.* — On donne le nom d'*étalon* ou d'*unité de longueur* à un arc régulier rigide u dans les conditions suivantes :

1° Lorsque l'hyperespace physique est rapporté à un système normal de coordonnées, l'ensemble des positions occupées à une même époque par les divers points physiques formant l'arc u constitue un arc de géodésique de l'espace.

2° On est convenu de n'estimer les longueurs d'arcs réguliers géométriques et celles d'arcs réguliers rigides que dans les systèmes de coordonnées normaux, dans lesquels la longueur de l'arc u est représentée par le nombre 1; nous dirons que ces systèmes de coordonnées sont ceux qui *correspondent* à l'étalon de longueur considéré.

Notons qu'en vertu du théorème (E), il est permis de choisir arbitrairement pour étalon de longueur n'importe quel arc rigide vérifiant la première condition de la définition précédente.

Pour satisfaire à la deuxième condition de l'axiome (A) (p. 120), les non-relativistes adoptent l'hypothèse suivante :

(H). *Hypothèse.* — Les corps communément appelés « corps peu déformables », tels que des pièces d'acier, de bronze, etc., représentent, au moins dans certaines conditions (absence de forces trop grandes et faibles variations de température), des corps rigides avec un degré d'approximation suffisant.

En vertu de l'hypothèse précédente, il sera possible de façonner un corps réel de manière que l'une de ses arêtes puisse être prise pour étalon de longueur. La définition (G) et l'hypothèse (H) permettront, comme on s'en rendra compte sans peine, de satisfaire

aux deux conditions de l'axiome (A) (p. 120), aussi en ce qui concerne un goniomètre (à la vérité bien rudimentaire). Pour aller plus loin, il convient de remarquer qu'en s'appuyant sur l'hypothèse XII *a* (p. 117) et sur la définition (C) (p. 122), on peut démontrer le théorème suivant : « Le choix de l'étalon de longueur étant arrêté et un corps rigide (R) étant donné, il sera possible de trouver parmi les systèmes normaux de coordonnées correspondant [*voir* la définition (G)] à l'étalon de longueur adopté, un système de coordonnées x_1, x_2, x_3, t tel que, dans ce système, les coordonnées spatiales des points physiques du corps (R) soient constantes. » Considérons alors un corps réel pouvant être regardé comme un corps rigide donné (R) et, après avoir arrêté le choix de l'étalon de longueur, regardons l'hyperespace physique comme rapporté à un système normal de coordonnées (x_1, x_2, x_3, t) vérifiant les conditions du théorème qui vient d'être énoncé. Après avoir marqué sur le corps (R) un triangle géodésique, on mesurera les côtés et les angles de ce triangle de la façon habituelle au moyen de l'étalon de longueur et du goniomètre. On calculera ensuite, au moyen d'une formule connue, la courbure ρ de l'espace correspondant au système considéré de coordonnées.

Connaissant le nombre ρ, on pourra définir parfaitement au moyen du corps (R) le système de coordonnées x_1, x_2, x_3 auquel on voudra rapporter l'espace relatif à un système normal de coordonnées (x_1, x_2, x_3, t) dans lequel les coordonnées spatiales des points physiques qui composent le corps (R) sont constantes. On pourra alors mesurer de la façon ordinaire les coordonnées spatiales de tout point physique au repos dans le système de coordonnées considéré. Pour résoudre complètement le problème de la mesure des coordonnées d'un point physique, il reste à satisfaire à l'axiome (A) (p. 120), en ce qui se rapporte à une horloge. On reconnaît de suite que de nouvelles hypothèses seraient nécessaires. Sans entrer dans aucun détail à ce sujet, nous croyons en avoir dit assez pour faire comprendre de quelle façon le non-relativiste arrive à satisfaire aux conditions de l'axiome (A) (p. 120) à l'effet de rendre possibles des opérations de mesure des coordonnées de points physiques. Ajoutons seulement que, selon que

l'on constaterait des coïncidences ou des divergences entre les résultats des calculs et ceux des mesures effectives, on conclurait que l'expérience confirme ou contredit, *dans leur ensemble* [1], les hypothèses que l'on avait adoptées.

L'examen précédent confirme ce que l'axiome (A) (p. 120) fait prévoir immédiatement, à savoir ceci : *Aucune des deux conceptions de l'hyperespace physique ne rend possibles, à elle seule, des opérations de mesure de coordonnées de points physiques; dans un cas, comme dans l'autre,* des *hypothèses additionnelles,* relatives aux systèmes de points physiques existant *dans la nature, sont indispensables.*

Nous venons de voir que, pour les non-relativistes, l'hypothèse (H) est une hypothèse de ce genre; à la vérité, seule, elle ne suffit pas à tout, mais elle permet d'atteindre le but au moins en partie.

Voyons comment procèdent les relativistes.

5. Il ne semble pas qu'il existe, ne fût-ce qu'une simple tentative de satisfaire aux deux conditions de l'axiome (A) (p. 120), d'une façon compatible avec la conception relativiste générale de l'hyperespace physique.

A la vérité, M. Hilbert [2] définit bien sous les noms de « ruban métrique » (Massfaden) et d' « horloge à lumière » (Lichtuhr) deux instruments qui, s'ils existaient réellement, seraient propres à effectuer des mesures de coordonnées de points physiques et, par cela même, il satisfait à la première condition de l'axiome (A) (p. 120), mais il ne formule aucune hypothèse concernant les systèmes de points physiques existant dans la nature, propre à permettre de satisfaire à la deuxième condition de notre axiome. Donc, dans l'état actuel des choses, la *T. R. générale n'admet aucune vérification expérimentale.* Les relativistes arrivent cependant à la conclusion opposée en opérant comme il suit : ayant

---

(1) Je ne dis pas « chacune d'elles ».

(2) Hilbert, *Die Grundlagen der Physik* (zweite Mitteilung) (*Gottinger Nachrichten*, 1917, Heft. 1, p. 54).

obtenu une formule dont ils veulent tirer un argument en faveur de la T. R., ils admettent, sans tenter aucune justification de leur hypothèse, que, sur les quatre coordonnées du point physique qu'ils envisagent, l'une représente le temps déterminé au moyen d'une horloge ordinaire et les trois autres, suivant le cas, les coordonnées cartésiennes ordinaires ou les coordonnées polaires; s'il arrive alors que la formule considérée s'accorde avec les résultats des mesures effectuées par les méthodes des non-relativistes, ils estiment qu'ils ont constaté un accord de la T. R. avec des faits observés (1). A moins de considérer cette conclusion comme une assertion absolument gratuite, il faut la regarder comme reposant à la fois sur les hypothèses de la conception relativiste et sur celles de la conception non relativiste de l'hyperespace physique. Mais ces deux systèmes d'hypothèses sont, comme on le sait et comme on le vérifie avec la plus grande facilité, logiquement incompatibles. Leur ensemble permettrait donc de démontrer l'exactitude ou la fausseté de n'importe quelle proposition.

Les vues précédentes sont confirmées d'une façon très intéressante par l'ambiguïté indiquée par M. Painlevé (2) dans la théorie relativiste de Mercure, ainsi que par l'incompatibilité relevée, dans la même théorie par M. Le Roux (3), de l'interprétation physique d'une coordonnée de Mercure avec la signification qu'il faudrait, semble-t-il, attribuer à un autre élément; des ambiguïtés ou contradictions de ce genre eussent été impossibles, si le sens physique des symboles employés avait été bien précisé ou, ce qui revient au même, si la correspondance entre les valeurs numériques des coordonnées d'un point physique et des opérations de mesure avait été correctement établie.

---

(1) Pour ne citer que l'un des travaux les plus récents, j'indiquerai les paragraphes 21-32 de l'Ouvrage suivant : Weyl, *Raum, Zeit, Meterie.* Berlin, 1921, chez Springer.

(2) *Loc. cit.*, n° **1**. Comparer avec Hilbert, *Die Grundlagen der Physik* (zweite Mitteilung) *Göttinger Nachrichten*, 1917, Heft 1, p. 67.

(3) J. Le Roux, *La loi de gravitation et ses conséquences* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 13 juin 1921, p. 1671).

En définitive, tout ce que nous avons annoncé au n° 1 est complètement établi en ce qui concerne la T. R. générale.

6. L'observation des faits confirme-t-elle du moins réellement, comme beaucoup de personnes le croient, la T. R. restreinte ?

Cette théorie est un cas particulier de la T. R. générale, caractérisé par les deux postulats suivants :

Postulat I. — Tout l'hyperespace physique peut être regardé comme formant une seule région élémentaire régulière [hypothèse XII (p. 112); *voir* en particulier la partie 9° de cette hypothèse] et, pour certains systèmes normaux de coordonnées auxquels elle peut être rapportée, la forme métrique de l'hyperespace physique est de la forme

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dt^2,$$

où t représente le temps; ces systèmes de coordonnées s'appelleront *systèmes d'Einstein.*

Postulat II (¹). — Lorsqu'un système d'équations de la forme

$$x_i = f_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

représente les relations qui subsistent entre les coordonnées d'Einstein d'un point physique déterminé et, plus généralement, lorsque ces équations expriment la loi de propagation de quelque phénomène, on a

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 - 1 \leqq 0.$$

Commençons par discuter l'application de la T. R. restreinte à un cas particulier, celui-là même qui a fait imaginer cette théorie.

Les célèbres expériences de MM. Michelson et Morley ont fait admettre par des physiciens la proposition suivante :

(¹) Il est aisé de prouver que, en réalité, ce postulat est une conséquence de l'hypothèse XI (p. 112).

(M). *Proposition tirée de l'expérience.* — La lumière issue d'une source invariablement liée à la Terre se propage, par rapport à celle-ci, avec une même vitesse dans tous les sens.

L'énoncé précédent nous fait évidemment connaître l'une des conséquences de l'hypothèse où une source de lumière et la Terre constitueraient un système rigide de points physiques, ou, plus simplement, un corps rigide. Or voici ce que dit l'un des plus chaleureux partisans de la T. R. restreinte (1) : L'existence d'un corps rigide est incompatible avec cette théorie. Nous voici bien embarrassés, car, si M. Laue a raison, le phénomène auquel se rapporte la proposition (M) est impossible et ne peut par conséquent pas servir de confirmation à la T. R. restreinte. Toutefois, bien que M. Laue présente une démonstration de son assertion (2), il est permis de se demander si, après avoir substitué à la conception de corps rigide discutée par cet auteur, une conception différente, on ne pourrait pas parvenir à rendre compatible avec la T. R. restreinte, l'existence de corps rigides et même à prouver ensuite que la proposition (M) est bien une conséquence logique des hypothèses de la théorie considérée.

7. Rendons-nous compte d'abord des difficultés du problème auquel nous venons d'être conduits. A cet effet, il conviendra d'étudier une définition de corps rigide que les relativistes adoptent souvent d'une façon implicite et qui vient à l'esprit très naturellement.

Rapportons l'hyperespace physique aux coordonnées d'Einstein et soit

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dt^2$$

la forme métrique correspondante. Nous dirons que, sur les quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, t d'un point physique, les trois premières en représentent les coordonnées spatiales et définissent la position du point physique à l'époque à laquelle elles se rapportent.

---

(1) Laue, *Das Relativitäts princip*, p. 50. Braunschweig, 1913, chez Fr. Vieveg und Sohn.

(2) *Loc. cit.*, § 27, p. 180.

Appelons encore distance de deux points physiques A et B à une époque $t = t_0$, estimée dans le système de coordonnées d'Einstein considéré, le nombre r défini par les relations

$$r^2 = \sum_{i=1}^{3} (a_i - b_i)^2 \qquad (r \geq 0),$$

où a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 représentent les coordonnées spatiales respectives des points physiques A et B à l'époque $t = t_0$. Cela posé, voici la définition de corps rigide que nous avions en vue.

(R). *Définition.* — L'assertion qu'un système (C) de points physiques est un corps rigide exprime que les distances mutuelles des points physiques du système (C), estimées dans un système de coordonnées d'Einstein arbitrairement choisi, sont indépendantes de l'époque à laquelle on les considère.

(T). *Théorème.* — Étant donné un corps rigide (C), ne se réduisant pas à un point physique unique, ainsi qu'un système de coordonnées d'Einstein, le corps (C) sera ou bien éternellement au repos par rapport au système de référence considéré, ou bien il sera éternellement animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à ce système de référence.

En effet, supposons que deux points physiques distincts A et B forment un système rigide, désignons par x_1, x_2, x_3, t un système de coordonnées d'Einstein et par $x_1^{(A)}$, $x_2^{(A)}$, $x_3^{(A)}$ et $x_1^{(B)}$, $x_2^{(B)}$, $x_3^{(B)}$ les coordonnées spatiales respectives des points A et B à une même époque t. Nous aurons

$$(1) \qquad \begin{cases} x_i^{(A)} = \varphi_i(t) \\ x_i^{(B)} = \psi_i(t) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

En vertu de la définition (R), on aura

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{3} [\varphi_i(t) - \psi_i(t)]^2 = \text{const.} > 0.$$

Considérons maintenant un second système de coordonnées

d'Einstein, y_1, y_2, y_3, s. Les formules de passage du premier système de coordonnées au second seront de la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} y_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k + a_{i4} t + a_i & (i = 1, 2, 3). \\ s = \sum_{k=1}^{3} a_{4k} x_k + a_{44} t + a_4 & (\text{avec } a_{44} > 0), \end{cases}$$

où les a_{ik} et les a_i sont des constantes telles que les équations (3) entraînent l'égalité

$$(3\ bis)\qquad \sum_{i=1}^{3} dx_i^2 - dt^2 = \sum_{i=1}^{3} dy_i^2 - ds^2.$$

Sans écrire toutes les relations que vérifient les a_{ik}, notons seulement que, pour qu'il corresponde à un système donné de valeurs des constantes

$$a_{41},\quad a_{42},\quad a_{43},\quad a_{44},$$

un système de valeurs des autres constantes a_{ik} et a_i, tel que les formules (3) entraînent l'égalité (3 *bis*), il faut et il suffit que l'on ait

$$(4)\qquad -a_{41}^2 - a_{42}^2 - a_{43}^2 + a_{44}^2 = 1, \quad \text{et} \quad a_{44} > 0.$$

Aux coordonnées

$$\varphi_1(t),\quad \varphi_2(t),\quad \varphi_3(t),\quad t$$

du point physique A dans le premier système de référence, les formules (3) feront correspondre certaines valeurs

$$y_1^{(A)},\quad y_2^{(A)},\quad y_3^{(A)},\quad s$$

du même point dans le nouveau système de coordonnées; on aura, en particulier,

$$(5)\qquad s = \sum_{k=1}^{3} a_{4k}\, \varphi_k(t) + a_{44} t + a_4.$$

Considérons maintenant les coordonnées

$$(6)\qquad y_1^{(B)},\quad y_2^{(B)},\quad y_3^{(B)},\quad s$$

du point B dans le second système de coordonnées à l'époque s, définie dans ce système par la formule (5). Aux coordonnées (6) du point B dans le second système, les formules (3) feront correspondre un certain système de valeurs des coordonnées du même point dans le premier système de référence. Eu égard au second système d'équations (1), on reconnaît que les valeurs en question pourront être représentées par

$$\psi_1(t+h), \quad \psi_2(t+h), \quad \psi_3(t+h), \quad t+h,$$

où h représente une certaine fonction de t; on aura en même temps

$$s = \sum_{k=1}^{3} a_{4k}\psi_k(t+h) + a_{44}(t+h) + a_4. \tag{7}$$

Il résulte de (5) et de (7) que la fonction h de t sera déterminée par l'équation

$$\sum_{k=1}^{3} a_{4k}[\psi_k(t+h) - \varphi_k(t)] + a_{44}h = 0. \tag{8}$$

D'autre part, il résulte de la définition (R) que l'on a

$$\sum_{k=1}^{3} [y_k^{(B)} - y_k^{(A)}]^2 = \text{const.} > 0.$$

En portant dans cette relation les valeurs des $y_i^{(A)}$ et $y_i^{(B)}$ exprimées au moyen des formules (3) en fonction des coordonnées des points physiques A et B dans le premier système, aux époques t et $t+h$, on trouve

$$\sum_{k=1}^{3} [\psi_k(t+h) - \varphi_k(t)]^2 - h^2 = \text{const.} > 0. \tag{9}$$

Il est aisé de conclure de ce qui précède que, étant donné un système de valeurs des constantes a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} vérifiant la condition (4), l'équation (8) doit entraîner la constance du premier

membre de (9) pour toutes les valeurs de t. En posant

$$u_k = \frac{a_{ki}}{a_{ii}},$$

on s'assure que la proposition précédente équivaut à la suivante : pourvu que l'on choisisse trois constantes u_1, u_2, u_3 de façon à avoir

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 < 1, \tag{10}$$

l'équation

$$\sum_{k=1}^{3} u_k[\psi_k(t+h) - \varphi_k(t)] + h = 0 \tag{11}$$

entraînera la constance du premier membre de (9) ou, ce qui revient au même, l'équation

$$\sum_{k=1}^{3} [\psi_k(t+h) - \varphi_k(t)] \left[\psi'_k(t+h)\left(1 + \frac{dh}{dt}\right) - \varphi'_k(t)\right] - h\frac{dh}{dt} = 0. \tag{12}$$

L'équation (11) donne

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \left[\psi'_k(t+h)\left(1 + \frac{dh}{dt}\right) - \varphi'_k(t)\right] + \frac{dh}{dt} = 0. \tag{13}$$

Supposons que l'on ait attribué aux u_k un système de valeurs admissible et soit t_0 une valeur particulière de t. Posons

$$(h)_{t=t_0} = l, \qquad \left(\frac{dh}{dt}\right)_{t=t_0} = l'.$$

Il est aisé de déduire des équations (11) et (13) que, à moins d'avoir

$$\left\{\begin{array}{l} \psi'_k(t_0+l)(t+l') - \varphi'_k(t_0) = \lambda[\psi_k(t_0+l) - \varphi_k(t_0)] \qquad (k = 1, 2, 3), \\ l' = \lambda l, \end{array}\right. \tag{14}$$

où λ représente un coefficient de proportionnalité, on pourra trouver un nombre positif δ tel que, à tout système de deux

nombres η et η' vérifiant les inégalités

$$(15) \qquad |\eta - l| < \delta, \qquad |\eta' - l'| < \delta,$$

on puisse faire correspondre une modification telle des valeurs d'abord attribuées aux constantes u_k que, pour les nouvelles valeurs, l'on ait

$$(16) \qquad (h)_{t=t_0} = \eta, \qquad \left(\frac{dh}{dt}\right)_{t=t_0} = \eta'.$$

Supposons en premier lieu que les relations (14) soient vérifiées. En substituant dans (12), après y avoir posé $t = t_0$, aux premiers membres des égalités (14), les seconds membres de ces égalités et en ayant égard à (9), on trouvera

$$\lambda = 0$$

et les équations (14) nous donneront

$$l' = 0,$$

ainsi que

$$(17) \qquad \psi'_k(t_0 + l) - \varphi'_k(t_0) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Supposons maintenant que pour δ assez petit, mais positif, l'on puisse faire correspondre à tout système de valeurs de η et η' vérifiant (15) un système de valeurs des u_i tel que l'on ait les égalités (16). Comme les équations (11) et (13) entraînent dans tous les cas (12), on aura

$$(18) \qquad \sum_{k=1}^{3} [\psi_k(t_0 + \eta) - \varphi_k(t_0)][\psi'_k(t_0 + \eta)(1 + \eta') - \varphi'_k(t_0)] - \eta\eta' = 0,$$

pour tous les systèmes de valeurs de η et η' vérifiant (15). L'équation (18) étant linéaire en η', il résulte de là que l'on aura à la fois

$$\sum_{k=1}^{3} [\psi_k(t_0 + \eta) - \varphi_k(t_0)][\psi'_k(t_0 + \eta) - \varphi'_k(t_0)] = 0$$

et

$$\sum_{k=1}^{3} [\psi_k(t_0 + \eta) - \varphi_k(t_0)][\psi'_k(t_0 + \eta) - \eta] = 0.$$

pourvu que l'on ait

$$|\eta - l| < \delta. \tag{19}$$

Donc, l'inégalité précédente entraînera aussi la relation

$$\sum_{k=1}^{3} [\psi_k(t_0 + \eta) - \varphi_k(t_0)]\,\varphi'_k(t_0) - \eta = 0$$

et, par suite, encore la suivante :

$$\sum_{k=1}^{3} \psi'_k(t_0 + \eta)\,\varphi'_k(t_0) - 1 = 0.$$

Donc, en particulier, on aura

$$\sum_{k=1}^{3} \psi'_k(t_0 + l)\,\varphi'_k(l) - 1 = 0. \tag{20}$$

Mais (postulat II, p. 128), on a

$$\sum_{k=1}^{3} [\psi'_k(t_0 + l)]^2 = 1; \qquad \sum_{k=1}^{3} [\varphi'_k(t_0)]^2 = 1. \tag{21}$$

En s'appuyant sur (20) et (21), ainsi que sur une identité bien connue de Lagrange, on trouve finalement que dans le cas actuel encore les égalités (17) seront vérifiées. Il est donc démontré que l'égalité

$$(h)_{t=t_0} = l \tag{22}$$

entraîne, dans tous les cas, les égalités (17).

Or il suffit de jeter un coup d'œil sur (11) et de considérer que, à cause de (2), les trois différences

$$\psi_i(t) - \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ne peuvent jamais s'annuler à la fois, pour s'assurer que, étant donné arbitrairement une valeur t_0 de t, il sera possible de déter-

miner un nombre positif ρ tel, qu'à tout nombre l vérifiant l'inégalité

$$|l| < \rho, \tag{23}$$

on puisse faire correspondre un système de valeurs des constantes u_i choisi de façon à réaliser l'égalité (22). Donc, pour une valeur assez petite, mais positive de ρ, l'inégalité (23) entraîne les égalités (17), d'où

$$\psi'_k(t_0) = \varphi'_k(t_0),$$
$$\psi''_k(t_0) = 0.$$

Le nombre t_0 étant tout à fait quelconque, on reconnaît de suite que les relations précédentes entraînent l'exactitude du théorème (T).

Il résulte du théorème (T) que des corps rigides au sens de la définition (R) seraient absolument impropres à la construction de n'importe quel instrument de mesure. On voit en même temps qu'il ne serait nullement aisé de substituer à la définition (R) une autre définition de corps rigide, telle que les corps rigides puissent jouer dans la T. R. restreinte un rôle analogue à celui des corps rigides considérés dans la théorie non relativiste de l'hyperespace physique.

8. Il nous suffira d'examiner la dernière tentative, due à M. Weyl, d'introduire la notion de corps rigide dans la T. R. restreinte, car toutes les autres tentatives faites dans ce sens ont déjà été condamnées par les relativistes eux-mêmes.

M. Weyl ne propose à la vérité *aucune* définition de corps rigide, il *admet* seulement qu'il serait possible d'en imaginer une qui conférerait aux corps rigides la propriété suivante [1] : Lorsqu'un corps rigide se déplace par rapport à un système de coordonnées d'Einstein de façon que les accélérations des divers points physiques qui le composent restent en valeur absolue inférieures

---

[1] Hermann Weyl, *Raum, Zeit, Meterie*, p. 159. Berlin, 1921, chez Julius Springer.

à une certaine limite, dans ce cas, toutes les fois qu'il existerait un système de coordonnées d'Einstein par rapport auquel les coordonnées spatiales des divers points du corps considéré conserveraient des valeurs constantes pendant un certain intervalle de temps, les distances mutuelles des points du corps rigide, estimées dans ce système de coordonnées, reprendraient toujours les mêmes valeurs.

Un corps rigide de ce genre pourra-t-il servir d'étalon de longueur? Selon M. Weyl il en serait bien ainsi; je crois au contraire que, sans préciser davantage la nature des corps rigides, il est impossible de répondre à la question posée. En effet, en Physique non relativiste, l'usage d'un étalon de longueur repose essentiellement sur la propriété suivante des corps rigides: Pour amener un corps rigide au repos, il suffit d'amener au repos un point A de ce corps, ainsi que les tangentes en A à deux arêtes non tangentes entre elles en ce point. Or les corps rigides de M. Weyl ne jouiraient certainement pas de cette propriété, car, si cela arrivait, leur existence donnerait lieu aux objections soulevées par M. Laue [1] contre l'existence des corps rigides dans la T. R. restreinte.

La notion de corps rigide envisagée par M. Weyl est donc beaucoup trop incomplète pour fonder sur elle des procédés de mesure de longueurs dans la T. R. restreinte.

D'ailleurs, la fin du paragraphe où M. Weyl présente sa conception de corps rigide prouve que lui-même est conscient de la nécessité de la compléter. J'ose croire d'ailleurs que l'on jugera avec moi que le problème n'est rien moins que facile.

En définitive, la proposition (M) (p. 129), tirée des expériences de MM. Michelson et Morley, loin de pouvoir être déduite des hypothèses de la T. R. restreinte, ne peut même pas être formulée dans le langage de cette théorie parce que l'on ne sait pas ce que signifient les mots « invariablement liée » au point de vue de cette théorie.

---

[1] Laue, *Das Relativitats princip*, § 27, p. 180. Braunschweig, 1913, chez Fr. Vieveg und Sohn.

9. La notion de corps rigide étant impliquée par toutes les autres propositions tirées de l'observation et susceptibles, selon les relativistes, d'être déduites de la T. R. restreinte, nous arrivons forcément à la conclusion que la T. R. restreinte ne donne pas plus lieu à quelque vérification expérimentale que la T. R. générale.

Bien entendu, il n'en est pas moins vrai que les coïncidences constatées par les relativistes, quand on interprète d'une certaine façon (illicite d'après ce qui précède) les symboles qui entrent dans quelques-unes de leurs formules, méritent de fixer l'attention des physiciens, et cela d'autant plus que la raison de ces coïncidences nous échappe actuellement, surtout dans certains cas très remarquables comme celui de l'entraînement partiel des ondes lumineuses par un courant d'eau.

Pour terminer, je voudrais brièvement indiquer pourquoi les objections adressées à la conception non relativiste de la Physique ne me semblent pas fondées.

Selon l'une d'elles, cette conception serait incompatible avec les faits et, selon la seconde, elle impliquerait une notion insoutenable d'absolu.

La première objection est tirée de l'échec de toutes les expériences qui avaient pour but de déceler le mouvement de la Terre par rapport à l'éther. J'ose croire que ces expériences réfutent seulement l'hypothèse selon laquelle les ondes électromagnétiques auraient pour véhicule un milieu non affecté par le mouvement des corps pondérables qui s'y déplacent.

D'après la seconde objection, l'existence des axes de coordonnées appelés communément (mais d'ailleurs improprement) « axes fixes », admise par la Mécanique classique, impliquerait une notion insoutenable d'absolu. Il me semblerait que, admettre l'existence de cette classe particulière de systèmes de référence, n'est qu'une manière de tenir compte de l'influence de l'ensemble de l'Univers sur ce qui se passe dans la région accessible à nos observations. Ce qui confirme cette façon de voir, c'est que, dans la pratique, les « axes fixes » sont ceux par rapport auxquels le

mouvement de l'ensemble des étoiles se réduit sensiblement à un mouvement de translation rectiligne et uniforme.

D'ailleurs, comme l'a très justement fait observer M. Painlevé [1], les relativistes n'échappent pas plus que les non-relativistes à la nécessité d'introduire des systèmes de référence « privilégiés ».

---

[1] *Voir* la Note de M. Painlevé, citée au n° **1**.

Sur les équations de la gravitation d'Einstein;

PAR E. CARTAN.

Les équations de la gravitation d'Einstein expriment les composantes T_{ik} du tenseur-matière au moyen des coordonnées x_i de l'univers (espace-temps), des coefficients g_{ik} de la forme différentielle quadratique fondamentale $\Sigma g_{ik}\,dx_i\,dx_k$ et de leurs dérivées partielles des deux premiers ordres. Ces équations, d'après le principe même de relativité, doivent avoir une signification indépendante du choix des coordonnées. Cela revient à dire que si les équations de la gravitation sont

$$T_{ik} = -G_{ik},$$

la forme différentielle quadratique $\Sigma G_{ik}\,dx_i\,dx_k$ *est covariante de la forme fondamentale vis-à-vis d'un changement de coordonnées arbitraire.*

La recherche des équations de la gravitation revient donc à la recherche de toutes les formes différentielles quadratiques covariantes $\Sigma G_{ik}\,dx_i\,dx_k$. Einstein ajoute deux conditions supplémentaires : la première que les G_{ik} soient *linéaires* par rapport aux dérivées partielles du second ordre des fonctions g_{ik}, la seconde que la loi de conservation soit respectée.

Je me propose, dans les pages qui suivent, de démontrer rigoureusement que la seule solution mathématiquement possible du problème ainsi formulé est celle qui a été indiquée par Einstein. D'une manière plus précise, toutes les formes différentielles covariantes $\Sigma G_{ik}\,dx_i\,dx_k$ dont les coefficients G_{ik} dépendent linéaire-

ment des dérivées partielles du second ordre des g_{ik} se déduisent d'une d'entre elles $\Sigma \overline{G}_{ik} dx_i dx_k$ par la formule générale

$$\Sigma G_{ik} dx_i dx_k = \alpha \Sigma \overline{G}_{ik} dx_i dx_k + (\beta A + \gamma) \Sigma g_{ik} dx_i dx_k,$$

où α, β, γ sont trois constantes arbitraires, A étant la courbure scalaire de Riemann. La condition que la loi de conservation soit respectée ne laisse que deux paramètres arbitraires (homogènes) au lieu de trois.

Étant donnée la difficulté qu'on rencontre à avoir connaissance des Mémoires parus à l'étranger pendant la guerre et depuis la guerre, je ne suis pas absolument sûr qu'aucune démonstration de ce théorème n'ait été donnée. Celle que je vais exposer repose naturellement sur la détermination préalable des invariants d'une forme différentielle quadratique vis-à-vis du groupe général à n variables (quatre dans le cas de la relativité) : c'est le problème même étudié par Christoffel (*Journ. de Crelle*, t. LXX), et en vue duquel a été fondé le calcul différentiel absolu. La méthode que j'emploie n'est que la simple application dans un cas particulier d'une méthode générale que j'ai développée en 1908 [1]. Si l'on imagine la forme différentielle donnée décomposée en carrés

$$ds^2 = -\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2,$$

où ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 sont des expressions différentielles linéaires (non différentielles exactes), le problème revient à trouver les invariants du système de ces quatre formes vis-à-vis des transformations que fait subir à ces formes une substitution linéaire appartenant à un certain groupe (celui qui conserve $\omega_4^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2$). Toute décomposition du ds^2 en carrés revient au fond au choix d'un système de référence euclidien associé à chaque *événement*. La for-

---

[1] *Ann. Éc. norm.*, 3e série, t. XXV, p. 57 et suiv. (Chapitre I du Mémoire). D'une manière générale je renverrai, pour les notations et les éléments essentiels des théories utilisées, à un Mémoire récent du *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLVII, 1919, p. 125-160, et t. XLVIII, 1920, p. 132-208, spécialement les Chapitres I, II et III.

mation des covariants bilinéaires des ω_i fait intervenir les composantes ω_{ij} de la rotation instantanée du système de référence mobile (ce qui entraîne la définition du parallélisme due à Levi-Civita), les covariants bilinéaires des ω_{ij} introduisant à leur tour les symboles de Riemann et ainsi de suite.

Je n'utilise pas du tout le calcul différentiel absolu de Ricci; ce n'est pas que j'en méconnaisse l'importance; mais il n'est pas mauvais, je crois, de montrer que des méthodes absolument générales sont applicables à la théorie des invariants d'une forme différentielle quadratique. Les mêmes méthodes s'appliqueraient à la théorie des variétés généralisées de H. Weyl, définies par un ds^2 et une forme différentielle linéaire, et aussi à la théorie des invariants d'une *équation* différentielle quadratique $\Sigma g_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$, ou même d'une équation de Monge quelconque

$$F(x_i; dx_i) = 0.$$

Il est très remarquable que les équations de la gravitation d'Einstein ne font intervenir que dix combinaisons linéaires des vingt symboles de Riemann; il existe dix autres combinaisons linéaires qui se conservent (ou plutôt dont les rapports mutuels se conservent) lorsqu'on multiplie le ds^2 par une fonction arbitraire des x_i et qui constituent les seuls invariants relatifs du second ordre de *l'équation* $ds^2 = 0$; ces dix combinaisons linéaires *intéressent donc uniquement les lois de propagation de la lumière*, tandis que les dix combinaisons qui entrent dans les équations de la gravitation ne les *intéressent pas*. Il est assez déconcertant que ces dix dernières quantités seules aient été considérées par les physiciens. Je montre qu'elles entrent comme parties réelles et imaginaires des coefficients d'une forme quadratique ternaire covariante.

Je signalerai enfin (n° 55 et suiv.) la forme donnée au tenseur de la gravitation conçu comme un vecteur appliqué à un élément à trois dimensions de l'univers, les composantes de ce vecteur étant des formes différentielles symboliques du troisième degré. La loi de conservation s'exprime d'une manière simple au moyen de l'opération de *dérivation extérieure* qui fait passer d'une inté-

grale multiple étendue à une variété fermée à l'intégrale égale étendue au volume limité par la variété.

Ce Mémoire a été rédigé il y a plus d'un an. Depuis j'ai publié, en février et mars derniers, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 174, p. 437, 593, 734, 857, 1104), des Notes relatives à une conception géométrique nouvelle des espaces non euclidiens. L'idée fondamentale de ces Notes est en germe, sous une forme mi-abstraite, mi-géométrique, dans les premiers et les derniers numéros de ce Mémoire (**1-6**, **35-40**).

J'ajoute que ce Mémoire résout aussi implicitement, d'une manière rigoureuse, le problème de la détermination de tous les systèmes covariants de relations entre les x_i, les g_{ik} et leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, ces relations étant linéaires par rapport aux dérivées partielles du second ordre. Ce problème est lié à celui de la décomposition du tenseur de Riemann-Christoffel en tenseurs *irréductibles;* dans le cas $n = 4$, cette décomposition, possible d'une manière et d'une seule, fournit trois tenseurs irréductibles :

1° Le tenseur scalaire A (courbure totale de Riemann);

2° Un tenseur (G) à neuf composantes G_{ij}, $G_{ii} - G_{jj}$;

3° Un tenseur (H) à dix composantes, celles dont il est question plus haut.

Cela posé, si l'on fait abstraction des relations obtenues en annulant toutes les composantes A_{ij}^{kl} du tenseur de Riemann-Christoffel, relations qui expriment que l'espace est euclidien, les seuls systèmes covariants possibles s'obtiennent, soit en annulant l'un des trois tenseurs irréductibles, soit en annulant simultanément deux de ces trois tenseurs. En particulier, les lois de la gravitation d'Einstein, dans une région vide de matière, s'obtiennent en annulant les deux tenseurs A et (G); au contraire, les lois de la gravitation (à potentiel scalaire) de Mie s'obtiennent en annulant (H).

Ces propriétés se généralisent pour un nombre quelconque de dimensions. Elles se rattachent à la théorie générale des groupes

linéaires qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, et au sujet de laquelle je me permets de renvoyer le lecteur à deux de mes Mémoires [*Bull. Soc. math.*, t. XLI, p. 53-96 (1913), et *Journ. Math. pures et appliquées*, 6e série, t. X, p. 149-186 (1914)].

Préliminaires.

1. Considérons dans l'espace euclidien un système de coordonnées curvilignes quelconques et supposons le ds^2 décomposé en une somme de trois carrés

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2,$$

en désignant par ω_1, ω_2, ω_3 trois expressions linéaires par rapport aux différentielles des coordonnées, avec des coefficients fonctions de ces coordonnées. Effectuer une telle décomposition revient à choisir en chaque point M de l'espace un trièdre trirectangle ayant ce point pour origine; les expressions ω_1, ω_2, ω_3 désignent alors les composantes, suivant les axes de ce trièdre mobile, du vecteur infiniment petit joignant le point M au point infiniment voisin M + dM, ou encore les composantes de la *translation* infiniment petite qui, jointe à une rotation infiniment petite autour d'un axe passant par M, fait passer du trièdre associé au point M au trièdre associé au point M + dM.

Désignons maintenant par $\omega_{23} = -\omega_{32}$, $\omega_{31} = -\omega_{13}$, $\omega_{12} = -\omega_{21}$ les composantes de cette rotation. Il est facile de voir, et c'est du reste un résultat classique, qu'il y a entre les six composantes ω_i, ω_{ij} du déplacement instantané du trièdre mobile de référence des relations nécessaires. Remarquons d'abord, et ceci aura une grande importance plus loin, que si x, y, z désignent les coordonnées d'un point fixe par rapport aux axes mobiles, on a les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} dx + y\omega_{21} + z\omega_{31} + \omega_1 = 0, \\ dy + z\omega_{32} + x\omega_{12} + \omega_2 = 0, \\ dz + x\omega_{13} + y\omega_{23} + \omega_3 = 0. \end{cases}$$

En exprimant les conditions d'intégrabilité des équations (1),

c'est-à-dire en écrivant que les covariants bilinéaires des premiers membres des équations (1) sont nuls en tenant compte de ces équations elles-mêmes, nous obtenons

$$\omega'_1 - [\omega_2\omega_{21}] - [\omega_3\omega_{31}] + y\{\omega'_{21} - [\omega_{23}\omega_{31}]\} + z\{\omega'_{31} - [\omega_{32}\omega_{21}]\} = 0,$$
$$\omega'_2 - [\omega_3\omega_{32}] - [\omega_1\omega_{12}] + z\{\omega'_{32} - [\omega_{31}\omega_{12}]\} + x\{\omega'_{12} - [\omega_{13}\omega_{32}]\} = 0,$$
$$\omega'_3 - [\omega_1\omega_{13}] - [\omega_2\omega_{23}] + x\{\omega'_{13} - [\omega_{12}\omega_{23}]\} + y\{\omega'_{23} - [\omega_{21}\omega_{13}]\} = 0.$$

Ces relations ayant lieu quels que soient x, y, z, on en déduit les relations cherchées

$$(2)\quad \begin{cases} \omega'_1 = [\omega_2\,\omega_{21}] + [\omega_3\omega_{31}], \\ \omega'_2 = [\omega_3\,\omega_{32}] + [\omega_1\omega_{12}], \\ \omega'_3 = [\omega_1\,\omega_{13}] + [\omega_2\omega_{23}], \\ \omega'_{23} = [\omega_{21}\omega_{13}], \\ \omega'_{31} = [\omega_{32}\omega_{21}], \\ \omega'_{12} = [\omega_{13}\omega_{32}]. \end{cases}$$

Ces relations peuvent être interprétées, en introduisant deux symboles de différentiation arbitraires d et δ, comme étant équivalentes aux relations

$$d\omega_1^\delta - \delta\omega_1^d = \begin{vmatrix} \omega_2^d & \omega_{21}^d \\ \omega_2^\delta & \omega_{21}^\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_3^d & \omega_{31}^d \\ \omega_3^\delta & \omega_{31}^\delta \end{vmatrix},$$

$$d\omega_2^\delta - \delta\omega_2^d = \begin{vmatrix} \omega_3^d & \omega_{32}^d \\ \omega_3^\delta & \omega_{32}^\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_1^d & \omega_{12}^d \\ \omega_1^\delta & \omega_{12}^\delta \end{vmatrix},$$

$$d\omega_3^\delta - \delta\omega_3^d = \begin{vmatrix} \omega_1^d & \omega_{13}^d \\ \omega_1^\delta & \omega_{13}^\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_2^d & \omega_{23}^d \\ \omega_2^\delta & \omega_{23}^\delta \end{vmatrix},$$

$$d\omega_{23}^\delta - \delta\omega_{23}^d = \begin{vmatrix} \omega_{21}^d & \omega_{13}^d \\ \omega_{21}^\delta & \omega_{13}^\delta \end{vmatrix},$$

$$d\omega_{31}^\delta - \delta\omega_{31}^d = \begin{vmatrix} \omega_{32}^d & \omega_{21}^d \\ \omega_{32}^\delta & \omega_{21}^\delta \end{vmatrix},$$

$$d\omega_{12}^\delta - \delta\omega_{12}^d = \begin{vmatrix} \omega_{13}^d & \omega_{32}^d \\ \omega_{13}^\delta & \omega_{32}^\delta \end{vmatrix}.$$

2. Les trois premières formules (2) montrent que, *si l'on connaît seulement* ω_1, ω_2, ω_3, c'est-à-dire les composantes de la translation instantanée du trièdre mobile, on peut en déduire *par de*

simples différentiations ω_{23}, ω_{31}, ω_{12}, c'est-à-dire les composantes de la rotation instantanée. Imaginons en effet exprimées les dérivées ω'_1, ω'_2, ω'_3 en fonctions de ω_1, ω_2, ω_3, ce qui est toujours possible, soit

$$\omega'_1 = a_1[\omega_2\omega_3] + b_1[\omega_3\omega_1] + c_1[\omega_1\omega_2],$$
$$\omega'_2 = a_2[\omega_2\omega_3] + b_2[\omega_3\omega_1] + c_2[\omega_1\omega_2],$$
$$\omega'_3 = a_3[\omega_2\omega_3] + b_3[\omega_3\omega_1] + c_3[\omega_1\omega_2].$$

Posons de plus

$$\omega_{23} = \alpha_1\omega_1 + \beta_1\omega_2 + \gamma_1\omega_3,$$
$$\omega_{31} = \alpha_2\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \gamma_2\omega_3,$$
$$\omega_{12} = \alpha_3\omega_1 + \beta_3\omega_2 + \gamma_3\omega_3.$$

Un calcul facile donne, sans ambiguïté,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(a_1 - b_2 - c_3), \qquad \beta_1 = a_2, \qquad \gamma_1 = a_3,$$
$$\alpha_2 = b_1, \qquad \beta_2 = \frac{1}{2}(b_2 - c_3 - a_1), \qquad \gamma_2 = b_3,$$
$$\alpha_3 = c_1, \qquad \beta_3 = c_2, \qquad \gamma_3 = \frac{1}{2}(c_3 - a_1 - b_2).$$

Les composantes de la rotation étant ainsi déterminées, les équations (1) donnent les conditions pour que le point de coordonnées relatives (x, y, z) soit fixe. En particulier, les conditions pour que la *direction* u, v, w soit invariable sont

$$(3) \qquad \begin{cases} du + v\,\omega_{21} + w\omega_{31} = 0, \\ dv + w\omega_{32} + u\,\omega_{12} = 0, \\ dw + u\,\omega_{13} + v\,\omega_{23} = 0; \end{cases}$$

elles indiquent comment doivent varier les paramètres directeurs mobiles u, v, w *d'une droite issue de* M *pour que cette droite reste constamment parallèle à elle-même.*

3. Les considérations précédentes s'étendraient à un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, et même à des espaces euclidiens généralisés, tel que celui de Minkowski, pour lequel le carré de la distance de deux points (x) et (x') serait de

la forme

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i (x'_i - x_i)^2,$$

où les coefficients ε_i sont égaux les uns à $+1$, les autres à -1. Appelons produit géométrique $V \mid V'$ de deux vecteurs V et V′ de projections

$$u_1, \quad \ldots, \quad u_n,$$
$$u'_1, \quad \ldots, \quad u'_n,$$

l'expression

$$V \mid V' = \varepsilon_1 u_1 u'_1 + \varepsilon_2 u_2 u'_2 + \ldots + \varepsilon_n u_n u'_n.$$

Choisissons d'une manière arbitraire en tout point de l'espace un système de vecteurs de référence $V_1, \ldots, V_n$ satisfaisant aux relations

$$(4) \qquad V_i \mid V_i = \varepsilon_i, \qquad V_i \mid V_j = 0 \qquad (i \neq j).$$

En se déplaçant d'un point M à un point infiniment voisin M′, on aura des relations de la forme

$$(5) \qquad \begin{cases} dM = \omega_1 V_1 + \omega_2 V_2 + \ldots + \omega_n V_n; \\ dV_i = \varepsilon_1 \omega_{i1} V_1 + \varepsilon_2 \omega_{i2} V_2 + \ldots + \varepsilon_n \omega_{in} V_n \qquad (i = 1, \ldots, n), \end{cases}$$

où les ω_i et les ω_{ij} sont des expressions linéaires par rapport aux différentielles des coordonnées et satisfaisant aux équations

$$\omega_{ii} = 0, \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

obtenues en différentiant les équations (4). On en déduit, d'abord

$$(6) \qquad ds^2 = \varepsilon_1 \omega_1^2 + \varepsilon_2 \omega_2^2 + \ldots + \varepsilon_n \omega_n^2,$$

puis, en écrivant que les premiers membres de (5) sont des différentielles exactes,

$$(7) \qquad \begin{cases} \omega'_i = \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \, \omega_{ki}], \\ \omega'_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_{ik} \, \omega_{kj}]. \end{cases}$$

Les équations qui expriment qu'un point de coordonnées *rela-*

tives $(x_1, \ldots, x_n)$ est *fixe* sont enfin

$$dx_i + \omega_i + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} x_k \omega_{ki} = 0. \tag{8}$$

Les expressions ω_i sont les composantes de la *translation instantanée*, les expressions ω_{ij} celles de la *rotation instantanée* du système de référence mobile.

4. Supposons inversement que nous ayons décomposé le ds^2 de l'espace euclidien précédent par une formule telle que (6). Cela revient à associer à chaque point de l'espace un système de référence mobile; les expressions ω_i désignent les composantes de la translation instantanée de ce système; *quant aux composantes de la rotation instantanée, elles sont données sans ambiguïté par les n premières formules* (7). Si, en effet, on pose

$$\omega'_i = \sum_{(jk)}^{1,\ldots,n} c_{jki}[\omega_j \omega_k],$$

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ijk}\, \omega_k \qquad (\alpha_{ijk} = -\alpha_{jik}),$$

les coefficients inconnus α_{ijk} sont donnés par les équations

$$\alpha_{kil} - \alpha_{lik} = \varepsilon_i c_{kli},$$

qui conduisent à

$$\alpha_{iji} = \varepsilon_i c_{iji},$$

$$\alpha_{ijk} = \frac{1}{2}(\varepsilon_k c_{ijk} - \varepsilon_i c_{jki} - \varepsilon_j c_{kij}).$$

5. Arrivons maintenant à une forme différentielle quadratique à n variables donnée *a priori* et supposons-la décomposable en une somme de carrés de n formes différentielles linéaires indépendantes. Imaginons même que cette décomposition soit effectuée de la manière *la plus générale possible*, ce qui introduit, comme on sait, $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres arbitraires. Nous désignerons par $x_1, \ldots, x_n$

les variables données et $u_1, \ldots, u_{\frac{n(n-1)}{2}}$ les paramètres arbitraires. Soit alors

$$(9) \qquad ds^2 = \varepsilon_1 \omega_1^2 + \varepsilon_2 \omega_2^2 + \ldots + \varepsilon_n \omega_n^2 \qquad (\varepsilon_i = \pm 1).$$

Les n formes ω_i sont linéaires en $dx_1, \ldots, dx_n$, avec des coefficients fonctions des x et des u. Calculons leurs covariants bilinéaires : chaque terme d'un de ces covariants contiendra en facteur l'une des différentielles $dx_1, \ldots, dx_n$, et par suite on pourra les mettre (d'une infinité de manières) sous la forme

$$(10) \qquad \omega'_i = \varepsilon_i [\omega_1 \omega_{1i}] + \varepsilon_i [\omega_2 \omega_{2i}] + \ldots + \varepsilon_i [\omega_n \omega_{ni}],$$

les ω'_{ij} étant des formes linéaires par rapport aux dx et aux du. Exprimons maintenant que le ds^2 donné ne dépend pas des paramètres u. Pour cela employons deux symboles de différentiation d et δ, le second se rapportant à une différentiation par rapport à l'un quelconque des paramètres u. On aura alors évidemment

$$\omega_i^\delta = 0.$$

D'autre part, en écrivant que $\delta(ds^2)$ est nul, on obtient

$$\varepsilon_1 \omega'_1 \delta\omega'_1 + \varepsilon_2 \omega'_2 \delta\omega'_2 + \ldots + \varepsilon_n \omega'_n \delta\omega'_n = 0.$$

Or on a

$$\delta\omega'_i = \delta\omega'_i - d\omega_i^\delta = \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} (\omega_k^\delta \omega'_{ki} - \omega'_k \omega_{ki}^\delta) = -\varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} \omega_{ki}^\delta \omega'_k;$$

par suite, la relation précédente devient

$$\Sigma \omega_{ki}^\delta \omega'_i \omega'_k = 0,$$

d'où enfin

$$\omega_{ki}^\delta + \omega_{ik}^\delta = 0.$$

Les relations auxquelles nous venons d'arriver prouvent que les *expressions* $\omega_{ij} + \omega_{ji}$ (*ainsi que* ω_{ii}) *sont linéaires en* $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

Tenons compte maintenant de l'indétermination des ω_{ij} : on peut, sans changer les formules (10), remplacer ω_{ij} par

$$\bar{\omega}_{ij} = \omega_{ij} + \sum_{k=1}^{k=n} \beta_{ijk} \omega_k \qquad \text{avec} \qquad \beta_{kil} = \beta_{ilk}.$$

l'expression $\omega_{ij} + \omega_{ji}$ est alors remplacée par

$$\overline{\omega}_{ij} + \overline{\omega}_{ji} = \omega_{ij} + \omega_{ji} + \sum_{k=1}^{k=n} (\beta_{ijk} + \beta_{jik})\omega_k;$$

on pourra disposer des indéterminées β_{ijk} pour annuler tous les seconds membres, *et cela est possible d'une manière et d'une seule*, comme il est facile de s'en rendre compte.

Par suite, *à toute décomposition du ds^2 en n carrés de la forme* (9) *correspondent, d'une manière et d'une seule,* $\frac{n(n-1)}{2}$ *expressions de Pfaff* $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, *linéaires en* $dx_1, \ldots, dx_n, du_1, \ldots, du_{\frac{n(n-1)}{2}}$, *satisfaisant aux relations* (10)

$$\omega'_i = \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \omega_{ki}]. \tag{10}$$

6. Rien ne nous empêche de dire que la décomposition (9) en carrés du ds^2 définit en chaque point de la variété à n dimensions considérée un système de référence euclidien et d'appeler respectivement composantes de la translation instantanée et composantes de la rotation instantanée de ce système de référence les expressions de Pfaff

$$\begin{array}{llll} \omega_1, & \omega_2, & \ldots, & \omega_n, \\ \omega_{12}, & & \ldots, & \omega_{n-1,n}. \end{array}$$

Nous conviendrons également de dire qu'un point ayant pour coordonnées (euclidiennes) $x_1, \ldots, x_n$ par rapport au système de référence mobile a une vitesse absolue nulle pour un déplacement infiniment petit du système de référence si l'on a les relations

$$dx_i + \omega_i + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} x_k \omega_{ki} = 0; \tag{8}$$

nous conviendrons de même de dire qu'une direction issue de M et ayant pour paramètres directeurs $\xi_1, \ldots, \xi_n$ reste parallèle à

elle-même quand on a les relations

$$(8') \qquad d\xi_i + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} \xi_k \omega_{ki} = 0;$$

nous retrouvons ainsi la notion du *parallélisme* de Levi-Civita [1].

Dans une variété euclidienne une demi-droite issue de M et se déplaçant parallèlement à elle-même revient coïncider avec sa position initiale quand le point M décrit un contour fermé quelconque. Analytiquement, cette propriété tient à ce que le système de Pfaff (8) est complètement intégrable : si, en effet, on exprime les conditions d'intégrabilité complète de ce système, on trouve les équations (7).

Il est facile de voir que, réciproquement, les équations (7) ne conviennent qu'aux variétés euclidiennes. Il suffit pour s'en convaincre de montrer qu'il est possible de réduire le ds^2 à la forme

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i \, dX_i^2,$$

en choisissant pour les x et les u des fonctions convenablement choisies des n variables $X_1, \ldots, X_n$. On y arrive en intégrant le système

$$(11) \qquad \begin{cases} \omega_i - dX_i = 0, \\ \omega_{ij} \qquad\quad = 0. \end{cases}$$

Ce système est complètement intégrable, car les covariants bilinéaires des premiers membres, qui sont respectivement

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_k \, \omega_{ki}],$$

$$\sum \varepsilon_k [\omega_{ik} \omega_{kj}],$$

sont nuls en tenant compte des équations du système. La déter-

---

[1] T. Levi-Civita, *Rendic. del Circ. mat. de Palermo*, t. XLII, p. 173-205.

mination demandée des x et des u en fonction des X est donc possible d'une infinité de manières.

Les variétés euclidiennes sont donc les seules pour lesquelles la notion de parallélisme de deux directions issues de deux points quelconques M et M′ a une signification *absolue*, c'est-à-dire indépendante du chemin suivi pour aller de M en M′.

7. Revenons au cas général et partons des équations

$$\omega'_i = \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \omega_{ki}] \tag{10}$$

qui introduisent d'une manière univoque les composantes ω_{ij} de la rotation instantanée de l'espace. *Dérivons* ces équations, c'est-à-dire égalons les covariants trilinéaires des deux membres; nous obtenons

$$0 = \sum_{k=1}^{k=n} [\omega'_k \omega_{ki}] - [\omega_k \omega'_{ki}],$$

ou, en remplaçant les ω'_k par leurs valeurs,

$$\sum [\omega_k \Omega_{ki}] = 0, \tag{12}$$

en posant

$$\Omega_{ij} = \omega'_{ij} - \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_{ik} \omega_{kj}]. \tag{13}$$

On voit que les expressions Ω_{ij}, qui sont nulles dans le cas euclidien, satisfont simplement aux relations (12) dans le cas général. Ces expressions sont des formes en $dx_1, \ldots, dx_n, du_1, \ldots, du_{\frac{n(n-1)}{2}}$, ou, ce qui revient au même, en $\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{ij}$. Posons donc

$$\Omega_{ij} = \sum_{(kl)} A_{ij}^{kl} [\omega_k \omega_l] + \sum_{(k,lm)} B_{ij}^{klm} [\omega_k \omega_{lm}] + \sum_{(kl),(mn)} C_{ij}^{klmn} [\omega_{kl} \omega_{mn}].$$

En portant dans les relations (12), on voit immédiatement que

tous les coefficients C sont nuls. La considération des termes en

$$\omega_h \omega_k \omega_{lm}$$

donne ensuite

$$B_{hi}^{klm} = B_{ki}^{hlm},$$

ce qui montre qu'on peut échanger les premiers indices inférieur et supérieur, sans changer la valeur du coefficient B; d'autre part, l'échange des deux indices inférieurs change manifestement le signe de B. On peut donc écrire les six équations

$$B_{hi}^{klm} = B_{ki}^{hlm}, \qquad B_{kh}^{ilm} = B_{ih}^{klm}, \qquad B_{ik}^{hlm} = B_{hk}^{ilm},$$
$$B_{hk}^{ilm} + B_{kh}^{ilm} = 0, \qquad B_{ki}^{hlm} + B_{ik}^{hlm} = 0, \qquad B_{ih}^{klm} + B_{hi}^{klm} = 0,$$

qui entraînent avec elles la nullité de tous les coefficients B.

Enfin, si l'on annule dans (12) le coefficient du terme en $[\omega_h \omega_k \omega_l]$, on obtient entre les A_{ij}^{kl} la relation

$$A_{hi}^{kl} + A_{ki}^{lh} + A_{li}^{hk} = 0.$$

Il est presque inutile de faire observer d'autre part que l'échange des deux indices inférieurs i, j, ou l'échange des deux indices supérieurs h, l, change le signe de A_{ij}^{hl}.

Finalement, *dans le cas d'une variété non euclidienne, les formules* (10) *sont à compléter par les formules*

$$(14) \qquad \omega'_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_{ik} \omega_{kj}] + \sum_{kl}^{1,\ldots,n} A_{ij}^{kl} [\omega_k \omega_l],$$

où les quantités $A_{ij}^{kl} = -A_{ji}^{kl} = -A_{ij}^{lk}$ *satisfont aux relations*

$$(15) \qquad A_{hi}^{kl} + A_{ki}^{lh} + A_{li}^{hk} = 0 \qquad (i, h, k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Les quantités A_{ij}^{kl} sont les *coefficients de courbure* de Riemann.

8. Pour n'être pas arrêtés plus loin dans nos raisonnements, poursuivons nos calculs. La dérivée (covariant trilinéaire) de Ω_{ij}, calculée d'après la formule (13), est

$$\Omega'_{ij} = -\sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega'_{ik} \omega_{kj}] + \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_{ik} \omega'_{kj}],$$

ou, en remplaçant ω'_{ik} et ω'_{kj} par leurs valeurs tirées de (13),

$$(16)\qquad \Omega'_{ij} = -\sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\Omega_{ik}\omega_{kj}] + \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_{ik}\Omega_{kj}].$$

Cette équation développée à son tour, en remplaçant Ω_{ij} par la valeur $\Sigma A_{ij}^{kl}[\omega_k\omega_l]$, donne les équations

$$(17)\qquad \sum_{(kl)}^{1,\ldots,n} [dA_{ij}^{kl}\omega_k\omega_l] = \sum_{\rho=1}^{\rho=n}\sum_{(kl)}^{1,\ldots,n} \varepsilon_\rho [(A_{\rho j}^{kl}\omega_{i\rho} + A_{i\rho}^{kl}\omega_{j\rho} + A_{ij}^{\rho l}\omega_{k\rho} + A_{ij}^{k\rho}\omega_{l\rho})\omega_k\omega_l].$$

On peut donc écrire

$$(18)\qquad dA_{ij}^{kl} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho (A_{\rho j}^{kl}\omega_{i\rho} + A_{i\rho}^{kl}\omega_{j\rho} + A_{ij}^{\rho l}\omega_{k\rho} + A_{ij}^{k\rho}\omega_{l\rho}) + \sum_{h=1}^{h=n} (A_{ij}^{kl})_h\omega_h,$$

avec de nouveaux coefficients $(A_{ij}^{kl})_h$ satisfaisant aux relations

$$(19)\qquad (A_{ji}^{kl})_h + (A_{ki}^{lj})_h + (A_{li}^{jk})_h = 0,$$

$$(20)\qquad (A_{ij}^{kl})_h + (A_{ij}^{lh})_k + (A_{ij}^{hk})_l = 0,$$

dont les premières proviennent de la dérivation des relations (15) et les dernières de l'égalité des termes en $[\omega_h\omega_k\omega_l]$ dans les deux membres des relations (17).

9. Les équations (18) dérivées donnent à leur tour naissance à des formules qu'on peut écrire

$$(21)\qquad \begin{aligned} d(A_{ij}^{kl})_h = &\sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho [(A_{\rho j}^{kl})_h\omega_{i\rho} + (A_{i\rho}^{kl})_h\omega_{j\rho} + (A_{ij}^{\rho l})_h\omega_{k\rho} + (A_{ij}^{k\rho})_h\omega_{l\rho} + (A_{ij}^{kl})_\rho\omega_{h\rho}] \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\rho=n}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \varepsilon_\rho (A_{\rho j}^{kl}A_{i\rho}^{h\sigma} + A_{i\rho}^{kl}A_{j\rho}^{h\sigma} + A_{ij}^{\rho l}A_{k\rho}^{h\sigma} + A_{ij}^{k\rho}A_{l\rho}^{h\sigma})\omega_\sigma \\ &+ \sum_{m=1}^{m=n} (A_{ij}^{kl})_{hm}\omega_m, \end{aligned}$$

avec de nouveaux coefficients $(A_{ij}^{kl})_{hm}$ ne dépendant pas de l'ordre

des indices inférieurs h, m et satisfaisant aux relations

$$(22)\qquad (A^{kl}_{ji})_{hm} + (A^{lj}_{ki})_{hm} + (A^{jk}_{li})_{hm} = 0,$$

$$(23)\qquad (A^{kl}_{ij})_{hm} + (A^{lh}_{ij})_{km} + (A^{hk}_{ij})_{lm} = 0,$$

conséquences des relations analogues (19) et (20).

Enfin, une nouvelle dérivation des équations (21) permet d'écrire

$$\begin{aligned}(24)\quad d(A^{kl}_{ij})_{hm} = & \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho [(A^{kl}_{\rho j})_{hm}\omega_{i\rho} + (A^{kl}_{i\rho})_{hm}\omega_{j\rho} + (A^{\rho l}_{ij})_{hm}\omega_{k\rho} \\ & \qquad + (A^{k\rho}_{ij})_{hm}\omega_{l\rho} + (A^{kl}_{ij})_{\rho m}\omega_{h\rho} + (A^{kl}_{ij})_{h\rho}\omega_{m\rho}] \\ & + \frac{1}{3}\sum_{\rho=1}^{\rho=n}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \varepsilon_\rho (A^{kl}_{ij})_\rho (A^{m\sigma}_{h\rho} + A^{h\sigma}_{m\rho})\omega_\sigma \\ & + \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\rho=n}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=} \varepsilon_\rho [(A^{kl}_{\rho j})_h A^{m\sigma}_{i\rho} + (A^{kl}_{i\rho})_h A^{m\sigma}_{j\rho} + (A^{\rho l}_{ij})_h A^{m\sigma}_{k\rho} \\ & \qquad + (A^{k\rho}_{ij})_h A^{m\sigma}_{l\rho} + (A^{kl}_{\rho j})_m A^{h\sigma}_{i\rho} \\ & \qquad + (A^{kl}_{i\rho})_m A^{h\sigma}_{j\rho} + (A^{\rho l}_{ij})_m A^{h\sigma}_{k\rho} + (A^{k\rho}_{ij})_m A^{h\sigma}_{l\rho}]\omega_\sigma \\ & + \frac{1}{6}\sum_{\rho=1}^{\rho=n}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \varepsilon_\rho \{ A^{kl}_{\rho j}[(A^{h\sigma}_{i\rho})_m + (A^{m\sigma}_{i\rho})_h] + A^{kl}_{i\rho}[(A^{h\sigma}_{j\rho})_m + (A^{m\sigma}_{j\rho})_h] \\ & \qquad + A^{\rho l}_{ij}[(A^{h\sigma}_{k\rho})_m + (A^{m\sigma}_{k\rho})_h] \\ & \qquad + A^{k\rho}_{ij}[(A^{h\sigma}_{l\rho})_m + (A^{m\sigma}_{l\rho})_h] \}\omega_\sigma \\ & + \sum_{r=1}^{r=n} (A^{kl}_{ij})_{hmr}\omega_r,\end{aligned}$$

où les nouveaux coefficients $(A^{kl}_{ij})_{hmr}$ ne dépendent pas de l'ordre des indices extérieurs h, m, r et satisfont aux relations

$$(25)\qquad (A^{kl}_{ji})_{hmr} + (A^{lj}_{ki})_{hmr} + (A^{jk}_{li})_{hmr} = 0.$$

$$(26)\qquad (A^{kl}_{ij})_{hmr} + (A^{lh}_{ij})_{kmr} + (A^{hk}_{ij})_{lmr} = 0.$$

Nous pourrions continuer indéfiniment ces opérations qui nous conduiraient chaque fois à de nouvelles quantités avec un nombre croissant d'indices.

10. Il ne sera pas mauvais, avant d'aller plus loin, de savoir combien, parmi les quantités A^{kl}_{ij}, $(A^{kl}_{ij})_h$, etc., *regardées comme des*

indéterminées liées par les relations (15), (19), (20), (22), (23), (25), (26), sont indépendantes.

Occupons-nous d'abord des quantités A_{ij}^{kl}. Convenons de désigner par la notation $i \mid hkl$ le premier membre, changé de signe, de la relation (15) :

$$i \mid hkl \equiv A_{ih}^{kl} + A_{ik}^{lh} + A_{il}^{hk}.$$

La relation

$$i \mid hkl - h \mid ikl - k \mid ihl + l \mid ihk = 0$$

donne, après simplifications,

$$A_{ih}^{kl} = A_{kl}^{ih},$$

ce qui montre qu'*on peut échanger les indices inférieurs avec les indices supérieurs.*

Cela posé, on pourra toujours supposer que les indices inférieurs, aussi bien que les indices supérieurs, sont rangés par ordre de grandeur décroissante, et que le plus grand indice inférieur est au moins égal au plus grand indice supérieur; autrement dit, toute quantité A_{ij}^{kl} se ramène à celles pour lesquelles on a

$$i > j, \quad k > l, \quad i \geq k.$$

Les quantités pour lesquelles ces inégalités sont vérifiées ne sont pas elles-mêmes indépendantes, et l'on peut se ramener à celles pour lesquelles on a en même temps

$$j \geq l.$$

En effet, supposons qu'on ait

$$i > j, \quad k > l, \quad i \geq k, \quad j < l,$$

c'est-à-dire

$$i > k > l > j;$$

la relation

$$i \mid jkl \equiv A_{ij}^{kl} + A_{ik}^{lj} - A_{il}^{kj} = 0$$

ramène A_{ij}^{kl} aux deux quantités A_{ik}^{lj} et A_{il}^{kj} pour lesquelles les inégalités exigées sont vérifiées.

Nous conviendrons de dire qu'une expression A_{ij}^{kl} est *normale*

lorsque ses indices satisfont aux inégalités précédentes

$$(27) \qquad i > j, \qquad k > l, \qquad i \leqq k, \qquad j \leqq l.$$

Toute expression A_{ij}^{kl} *se ramène à des expressions normales.*

Il est maintenant facile de voir que les *expressions normales sont indépendantes.* Passons pour cela en revue les différents cas qui peuvent se présenter suivant le nombre des indices i, j, k, l *distincts.*

Si deux seulement des quatre indices sont distincts, on aura une seule quantité normale

$$A_{ij}^{ij} \qquad (i > j).$$

Si trois indices sont distincts, $i > j > k$, on aura trois quantités normales

$$A_{ij}^{ik}, \quad A_{ij}^{jk}, \quad A_{ik}^{jk}.$$

Si enfin les quatre indices sont distincts, $i > j > k > l$, on aura deux quantités normales

$$A_{ij}^{kl}, \quad A_{ik}^{jl}.$$

Remarquons maintenant que toute relation $i \mid hkl = 0$ se réduit à une identité si les indices h, k, l ne sont pas tous distincts; par conséquent *les quantités à deux indices distincts n'entrent dans aucune relation.* Les quantités à trois indices distincts $i > j > k$ figureront dans les relations

$$i \mid ijk = 0, \qquad j \mid ijk = 0, \qquad k \mid ijk = 0,$$

dont chacune exprime la loi d'échange des indices inférieurs avec les indices supérieurs et qui par suite n'entraînent aucune relation entre les quantités normales.

Enfin les relations $i \mid jkl = 0$ où figurent quatre indices distincts donnés n'entraînent, il est facile de le vérifier, aucune relation entre les quantités normales.

Les quantités A_{ij}^{kl} *normales sont donc indépendantes,* et leur nombre total est

$$C_n^2 + 3C_n^3 + 2C_n^4 = \frac{n(n-1)}{2} + 3\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$
$$= \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

11. Passons aux quantités $(A_{ij}^{kl})_h$ que nous conviendrons d'appeler les quantités A *du premier ordre* (les quantités A_{ij}^{kl} étant d'ordre zéro). Convenons encore de dire que $(A_{ij}^{kl})_h$ est *dérivée* de A_{ij}^{kl}. Les relations (19) nous permettent de *ramener les expressions du premier ordre à celles qui sont dérivées d'une expression normale d'ordre zéro.*

Nous dirons qu'une expression $(A_{ij}^{kl})_h$ du premier ordre est *normale* si ses indices, en outre des inégalités (27) qui expriment qu'elle est dérivée d'une quantité normale d'ordre zéro, satisfont à l'inégalité supplémentaire

$$k \geqq h. \tag{28}$$

Toute expression du premier ordre non normale se ramène à des expressions normales avec diminution de l'indice extérieur h. Supposons en effet

$$i > j, \qquad k > l, \qquad i \geqq k, \qquad j \geqq l, \qquad k < h;$$

la relation

$$ij \mid klh \equiv (A_{ij}^{kl})_h + (A_{ij}^{lh})_k + (A_{ij}^{hk})_l = 0$$

ramène l'expression considérée à d'autres expressions pour lesquelles l'indice extérieur est diminué; chacune d'elles peut être ramenée, sans changement de l'indice extérieur, à d'autres dérivées d'expressions normales d'ordre zéro. On raisonnera sur chacune de ces expressions comme sur la première jusqu'à ce qu'on ne puisse plus diminuer l'indice extérieur; on aura donc finalement des expressions toutes normales.

Considérons maintenant une quelconque des relations (20)

$$ij \mid klh \equiv (A_{ij}^{kl})_h + (A_{ij}^{lh})_k + (A_{ij}^{hk})_l = 0,$$

où nous pouvons toujours supposer qu'on a

$$i > j, \quad k > l > h.$$

Cette relation sera dite *normale* si l'on a en même temps

$$i \geqq l, \qquad j \leqq h.$$

On voit qu'à une relation normale correspond une expression A_{ij}^{lh} normale, mais une expression dérivée $(A_{ij}^{lh})_k$ non normale. *Il y a exactement autant d'expressions non normales du premier ordre dérivées d'une expression normale d'ordre zéro qu'il y a de relations normales.*

Remarquons en troisième lieu que *toute relation* (20) *non normale est une conséquence des relations normales.* Prenons en effet une relation non normale

$$ij\,|\,klh = 0 \qquad (i > j,\ k > l > h)$$

et supposons d'abord $j \geqq h$, mais $i < l$; on a donc les inégalités

$$k > l > i > j \geqq h.$$

L'identité facile à vérifier

$$ij\,|\,klh - ki\,|\,ljh + li\,|\,kjh + kl\,|\,ijh - lj\,|\,kih + kj\,|\,lih \equiv 0$$

ramène la relation donnée à des relations normales.

Supposons maintenant $j < h$, c'est-à-dire supposons

$$k > l > h > j, \quad i > j;$$

l'identité facile à vérifier

$$ij\,|\,klh - ik\,|\,lhj - il\,|\,khj + ih\,|\,klj \equiv 0$$

ramène la relation donnée à d'autres qui rentrent dans le premier cas examiné.

De tout ce qui précède il résulte que, les relations (20) se ramenant uniquement aux relations normales, *ces relations normales sont indépendantes;* sinon, en effet, il serait impossible, au moyen des relations (20), de tirer les expressions non normales, qui sont en nombre égal aux relations normales, en fonction des expressions normales. On voit de plus qu'*il n'y a aucune relation entre les expressions normales.*

Le dénombrement des expressions normales du premier ordre

ne présente aucune difficulté. On calcule facilement le nombre des expressions normales formées avec 2, ou 3, ou 4, ou 5 indices distincts : on trouve respectivement les nombres

$$2, \quad 9, \quad 12, \quad 5;$$

par suite le nombre des expressions normales du premier ordre est

$$2C_n^2 + 9C_n^3 + 12C_n^4 + 5C_n^5 = \frac{n^2(n^2-1)(n+2)}{24}.$$

12. Les mêmes raisonnements et les mêmes conclusions s'étendent aux expressions *du second ordre* de la forme $(A_{ij}^{kl})_{hm}$. On peut, en vertu des relations (22), ramener ces expressions à celles qui sont dérivées d'expressions normales d'ordre zéro, et l'on peut aussi les ramener au cas $h \overline{\gtrless} m$. Nous conviendrons de dire qu'une telle expression est normale si, *en outre des conditions précédentes*, elle satisfait à l'inégalité

$$(29) \qquad k \geqq h.$$

1° *Toute expression non normale du second ordre se ramène à des expressions normales avec diminution de l'un au moins des indices extérieurs.* On peut d'abord, en effet, ramener l'expression $(A_{ij}^{kl})_h$ à être normale avec diminution de l'indice h. Les nouvelles expressions qui s'en déduisent par addition du second indice extérieur m seront traitées comme l'expression primitive après échange, s'il y a lieu, de l'ordre des deux indices extérieurs. On continuera ainsi tant que cela sera possible et l'on sera finalement ramené à des expressions toutes normales.

2° Désignons par le symbole $ij|klh|m$, le premier membre de la relation

$$ij|klh|m \equiv (A_{ij}^{kl})_{hm} + (A_{ij}^{lh})_{km} + (A_{ij}^{hk})_{lm} = 0,$$

où l'on peut toujours supposer

$$i > j, \quad k > l > h.$$

Cette relation sera dite *normale* si l'on a

$$i > j, \quad k > l > h, \quad i \neq l, \quad j \neq h, \quad k \neq m,$$

c'est-à-dire si l'expression $(A_{ij}^{lh})_{km}$ est dérivée d'une expression normale d'ordre zéro, mais sans être normale elle-même. *Il y a* évidemment *autant d'expressions non normales dérivées d'expressions normales d'ordre zéro qu'il y a de relations normales.*

3° *Toute relation non normale est une conséquence des relations normales.* On peut en effet, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, ramener la relation donnée, *sans altération du dernier indice m*, à des relations pour lesquelles

$$i > j, \quad k > l > h, \quad i \neq l, \quad j \neq h.$$

Si maintenant $k < m$, on tiendra compte de l'identité, facile à vérifier,

$$ij \,|\, klh \,|\, m - ij \,|\, mkl \,|\, h + ij \,|\, mkh \,|\, l - ij \,|\, mlh \,|\, k = 0,$$

pour se ramener à de nouvelles relations à dernier indice moindre. On raisonnera sur ces nouvelles relations comme sur la première jusqu'à ce qu'on soit ramené à des relations normales.

La conclusion est la même que précédemment. Les relations normales, les seules qu'on peut se borner à considérer, sont indépendantes, *et les expressions normales ne sont liées par aucune relation.*

Ces conclusions s'étendraient aux expressions du troisième ordre $(A_{ij}^{kl})_{hmr}$; une telle expression est normale si l'on a

$$(30) \qquad i > j, \quad k > l, \quad i \neq k, \quad j \neq l, \quad k \neq h \neq m \neq r.$$

Les invariants d'une forme différentielle quadratique.

13. Abordons maintenant le problème des invariants d'un ds^2 vis-à-vis d'un changement de variables arbitraire.

Il s'agit en somme de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux formes différentielles quadratiques à n variables puissent être transformées l'une dans l'autre par un chan-

gement de variables. Décomposons la première de la manière la plus générale possible en une somme $\Sigma\varepsilon_i\omega_i^2$ de n carrés, les ω_i étant linéaires par rapport aux différentielles des n variables données $x_1, \ldots, x_n$, avec des coefficients fonctions de ces variables et de $\frac{n(n-1)}{2}$ variables auxiliaires nouvelles $u_1, \ldots, u_{\frac{n(n-1)}{2}}$. Toute forme *équivalente* à n variables $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ admettra une décomposition correspondante $\Sigma\varepsilon_i\bar{\omega}_i^2$, où interviendront $\frac{n(n-1)}{2}$ variables auxiliaires nouvelles $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{\frac{n(n-1)}{2}}$. On aura

$$\omega_i = \bar{\omega}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

en choisissant pour les $\bar{x}_i$ les valeurs en fonction des x_i qui réalisent le passage de la première forme différentielle à la seconde et en prenant pour les $\bar{u}_i$ des fonctions convenablement choisies des x et des u. Autrement dit, *il existera un changement de variables portant sur les* $\frac{n(n+1)}{2}$ *variables x et u transformant chacune à chacune les n formes linéaires ω_i correspondant au premier ds^2 donné dans les n formes linéaires ω_i correspondant au second ds^2 donné.*

Réciproquement, supposons qu'en décomposant les deux formes quadratiques données, chacune de la manière la plus générale possible, en deux sommes de n carrés

$$\Sigma\varepsilon_i\omega_i^2 \qquad \text{et} \qquad \Sigma\varepsilon_i\bar{\omega}_i^2,$$

il existe un changement de variables portant sur les x et les u et transformant chacune à chacune les formes ω_i dans les formes $\bar{\omega}_i$.

On voit d'abord que *dans ce changement de variables les $\bar{x}$ ne dépendent que des x et non des u.* En effet, les égalités

$$\omega_i = \bar{\omega}_i,$$

où n'interviennent que les différentielles des variables x et $\bar{x}$, peuvent être résolues par rapport à $d\bar{x}_1, \ldots, d\bar{x}_n$, qui sont ainsi exprimées linéairement au moyen de $dx_1, \ldots, dx_n$; par suite,

chacune des variables $\bar{x}$ est bien une fonction des x indépendante des u. Cela étant, le changement des variables x ainsi défini transforme effectivement l'une dans l'autre les deux formes données.

14. La recherche des invariants d'une forme différentielle quadratique va alors être obtenue en deux temps. Considérons d'abord les $\frac{n(n+1)}{2}$ variables x et u; nous chercherons les invariants du système des expressions de Pfaff $\omega_1, \ldots, \omega_n$, vis-à-vis d'un changement de variables quelconque; nous donnerons à ces invariants le nom d'*invariants relatifs. Les invariants absolus, c'est-à-dire ceux qui intéressent le problème primitif, s'obtiendront en cherchant tous les invariants relatifs indépendants des variables u.*

Les expressions ω_i sont elles-mêmes des invariants (ou plutôt, comme on dit d'habitude, des *covariants*) relatifs, tandis que la forme $\Sigma \varepsilon_i \omega_i^2$ est évidemment un covariant absolu. Les expressions ω_{ij} sont aussi des covariants relatifs, puisqu'elles sont déterminées d'une manière unique par les dérivées ω'_i qui sont covariantes au même titre que les ω_i. Enfin les dérivées ω'_{ij} étant aussi covariantes, les formules (14) conduisent à un premier système d'invariants relatifs finis, à savoir les coefficients A_{ij}^{kl} de Riemann; ils sont au nombre de $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$. Ce sont les *invariants fondamentaux.*

Les $\frac{n(n+1)}{2}$ expressions de Pfaff covariantes ω_i, ω_{ij} permettent de déduire d'un invariant fini quelconque I une série d'*invariants dérivés* donnés par la formule

$$dI = I_1\omega_1 + \ldots + I_n\omega_n + \sum_{ij} I_{ij}\omega_{ij};$$

ils sont au nombre de $\frac{n(n+1)}{2}$. Chacun de ceux-ci peut à son tour donner naissance à des invariants dérivés (invariants dérivés du second ordre de I) et ainsi de suite. En employant ce procédé de dérivation aux invariants fondamentaux A_{ij}^{kl}, nous obtenons une infinité d'invariants nouveaux qui sont les $(A_{ij}^{kl})_h$, $(A_{ij}^{kl})_{hm}$, etc.

Nous allons montrer qu'ils constituent le système complet des invariants relatifs.

15. Admettons, ce qui est vrai en général, comme cela sera démontré plus loin, que parmi les $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ invariants fondamentaux, il y en a $\frac{n(n+1)}{2}$ indépendants (c'est-à-dire qui, pour une forme différentielle arbitraire, ne soient liés par aucune relation); appelons-les invariants fondamentaux *principaux*. Les autres invariants fondamentaux (*secondaires*) et les invariants dérivés du premier ordre des invariants principaux seront, pour chaque forme différentielle quadratique, des fonctions déterminées de ces invariants principaux.

Pour deux formes différentielles équivalentes supposées décomposées de la manière la plus générale possible en carrés, ces fonctions sont manifestement les mêmes. Mais *réciproquement*, supposons que pour les deux formes les invariants secondaires et les invariants dérivés du premier ordre des invariants principaux soient *les mêmes fonctions* des invariants principaux. Établissons alors entre les variables x et u d'une part, et les variables $\bar{x}$ et $\bar{u}$ d'autre part, les $\frac{n(n+1)}{2}$ relations indépendantes obtenues en égalant chacun à chacun les invariants fondamentaux principaux des deux formes. Le changement de variables ainsi défini entraîne par hypothèse l'égalité chacun à chacun des invariants fondamentaux secondaires et des invariants dérivés du premier ordre des invariants principaux.

Les formules

$$dI_\alpha = \sum_{k=1}^{k=n} I_{\alpha k}\,\omega_k + \sum_{(kl)}^{1,\ldots,n} I_{\alpha kl}\,\omega_{kl} \qquad \left[\alpha = 1, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}\right],$$

où les I_α sont les invariants principaux, montrent alors que le changement de variables considéré entraîne les égalités

$$\omega_k = \bar{\omega}_k, \qquad \omega_{kl} = \bar{\omega}_{kl},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Les quantités A_{ij}^{kl} et leurs dérivées des différents ordres constituent donc bien le système complet des invariants (relatifs).

16. Il reste, pour être complet, à combler la lacune du raisonnement précédent. Nous allons le faire en recherchant en même temps le *degré d'arbitraire des fonctions qui expriment dans le cas général les invariants non principaux au moyen des invariants principaux.*

Partons pour cela des équations (18) et (21), ou plutôt des équations obtenues en éliminant les ω_i et les ω_{ij} entre ces équations et en y regardant les A_{ij}^{kl}, $(A_{ij}^{kl})_h$, $(A_{ij}^{kl})_{km}$, comme des indéterminées liées par les relations (15), (19), (20), (22), (23); cela revient à dire qu'on y exprime toutes ces quantités au moyen des quantités que nous avons appelées *normales*, et que ces quantités normales sont regardées comme des indéterminées.

Une première remarque importante est qu'on peut trouver $\frac{n(n+1)}{2}$ équations (18) permettant de tirer les ω_i et les ω_{ij}. Il suffit par exemple d'associer à chaque combinaison (ij) de deux indices $1, 2, \ldots, n$ un indice k différent de i, j et n et de considérer celles des équations (18) qui donnent dA_{ij}^{ik}; on adjoindra à ces $\frac{n(n-1)}{2}$ équations les n équations qui donnent les dA_{ni}^{ni} et $dA_{n,n-1}^{n,n-2}$. Les seconds membres de ces $\frac{n(n+1)}{2}$ équations sont linéairement indépendants en ω_i et ω_{ij} : il suffit pour s'en convaincre de remarquer qu'ils le sont *en particulier* lorsqu'on annule toutes les expressions A_{ij}^{kl}, sauf les A_{ij}^{ij}, et toutes les expressions $(A_{ij}^{kl})_h$, sauf les $(A_{ni}^{ni})_i$ et $(A_{n,n-1}^{n,n-2})_n$. Les seules quantités non nulles étant normales sont indépendantes. Or, dans ces conditions, on obtient

$$\begin{aligned} dA_{ik}^{jk} &= (\varepsilon_j A_{jk}^{jk} - \varepsilon_i A_{ik}^{ik})\,\omega_{ij}, \\ dA_{ni}^{ni} &= (A_{ni}^{ni})_i\,\omega_i, \\ dA_{n,n-1}^{n,n-2} &= (A_{n,n-1}^{n,n-2})_n\,\omega_n, \end{aligned}$$

et les seconds membres sont manifestement indépendants.

Cette première remarque étant faite, le système obtenu en éli-

minant les ω_i et les ω_{ij} entre les équations (18) et (21) pourra être considéré comme un système de Pfaff où les variables indépendantes seront les $\frac{n(n+1)}{2}$ quantités A_{ij}^{kl} correspondant aux $\frac{n(n+1)}{2}$ équations qui ont servi à tirer les ω_i et les ω_{ij} (quantités *principales*), et où les variables dépendantes seront les autres quantités A_{ij}^{kl}, les $(A_{ij}^{kl})_h$ et les $(A_{ij}^{kl})_{hm}$, *ces quantités étant toujours supposées exprimées au moyen des quantités normales.*

Il est facile de voir que si l'on calculait les covariants ω'_i et ω'_{ij} des expressions ω_i et ω_{ij}, on retrouverait les expressions (10) et (14). En effet, prenons l'une quelconque des $\frac{n(n+1)}{2}$ équations (18) principales et dérivons-la. D'après la manière même dont on a obtenu les équations (21), nous aurons, en tenant compte de ces équations (21),

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho (A_{\rho j}^{kl} \Pi_{i\rho} + A_{i\rho}^{kl} \Pi_{j\rho} + A_{ij}^{\rho l} \Pi_{k\rho} + A_{ij}^{k\rho} \Pi_{l\rho}) + \sum_{h=1}^{h=n} (A_{ij}^{kl})_h \Pi_h = 0,$$

en posant

$$\Pi_h = \omega'_h - \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_h [\omega_k \omega_{kh}],$$

$$\Pi_{ij} = \omega'_{ij} - \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_{ik} \omega_{kj}] - \sum_{(kl)}^{1,\ldots,n} A_{ij}^{kl} [\omega_k \omega_l].$$

D'après les hypothèses mêmes faites sur les équations principales, on en déduit

$$\Pi_h = 0, \qquad \Pi_{ij} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Revenons maintenant à notre système de Pfaff et dérivons ses différentes équations. Les équations (18) dérivées sont identiquement vérifiées si l'on tient compte des équations (21). Quant à ces dernières, leur dérivation conduit manifestement [*cf.* formule (24)] aux équations

$$(31) \qquad \sum_{m=1}^{m=n} [\omega_m (\varpi_{ij}^{kl})_{hm}] = 0 \qquad (i, j, k, l, h = 1, 2, \ldots, n),$$

en posant

$$
\begin{aligned}
(\varpi_{ij}^{kl})_{hm} &= (\varpi_{ij}^{kl})_{mh} \\
&= d(A_{ij}^{kl})_{hm} - \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho [(A_{\rho j}^{kl})_{hm}\,\omega_{i\rho} + (A_{i\rho}^{kl})_{hm}\,\omega_{j\rho} + (A_{ij}^{\rho l})_{hm}\,\omega_{k\rho} \\
&\qquad + (A_{ij}^{k\rho})_{hm}\,\omega_{l\rho} + (A_{ij}^{kl})_{\rho m}\,\omega_{h\rho} + (A_{ij}^{kl})_{h\rho}\,\omega_{m\rho}] \\
&\quad - \frac{1}{3} \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \varepsilon_\rho (A_{ij}^{kl})_\rho (A_{h\rho}^{m\sigma} + A_{m\rho}^{h\sigma})\,\omega_\sigma \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \varepsilon_\rho [(A_{\rho j}^{kl})_h A_{i\rho}^{m\sigma} + (A_{i\rho}^{kl})_h A_{j\rho}^{m\sigma} + (A_{ij}^{\rho l})_h A_{k\rho}^{m\sigma} \\
&\qquad + (A_{ij}^{k\rho})_h A_{l\rho}^{m\sigma} + (A_{\rho j}^{kl})_m A_{i\rho}^{h\sigma} \\
&\qquad + (A_{i\rho}^{kl})_m A_{j\rho}^{h\sigma} + (A_{ij}^{\rho l})_m A_{k\rho}^{h\sigma} + (A_{ij}^{k\rho})_m A_{l\rho}^{h\sigma}]\,\omega_\sigma \\
&\quad - \frac{1}{6} \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \varepsilon_\rho \{ A_{\rho j}^{kl}[(A_{i\rho}^{h\sigma})_m + (A_{i\rho}^{m\sigma})_h] + A_{i\rho}^{kl}[(A_{j\rho}^{h\sigma})_m + (A_{j\rho}^{m\sigma})_h] \\
&\qquad + A_{ij}^{\rho l}[(A_{k\rho}^{h\sigma})_m + (A_{k\rho}^{m\sigma})_h] + A_{ij}^{k\rho}[(A_{l\rho}^{h\sigma})_m + (A_{l\rho}^{m\sigma})_h] \}\,\omega_\sigma.
\end{aligned}
$$

17. C'est la forme même des équations (31) qui va nous permettre de démontrer que *le système de Pfaff considéré est en involution*. Il importe d'abord de remarquer que les expressions $(\varpi_{ij}^{kl})_{hm}$ sont liées exactement par les mêmes relations que les quantités $(A_{ij}^{kl})_{hm}$. D'autre part, la résolution des équations (31) donne évidemment

$$(\varpi_{ij}^{kl})_{hm} = \sum_{r=1}^{r=n} (a_{ij}^{kl})_{hmr}\,\omega_r,$$

où les $(a_{ij}^{kl})_{hmr}$ sont liés par les mêmes relations que les $(A_{ij}^{kl})_{hmr}$ (ce sont du reste les mêmes quantités).

Appliquons maintenant la théorie des systèmes de Pfaff. Désignons par

s_1 le nombre des expressions indépendantes de la forme $(\varpi_{ij}^{kl})_{h1}$,

$s_1 + s_2$ le nombre des expressions indépendantes de la forme $(\varpi_{ij}^{kl})_{h2}$ et $(\varpi_{ij}^{kl})_{h1}$,

. . . . . .,

$s_1 + s_2 + \ldots + s_i$ le nombre des expressions indépendantes de la forme $(\varpi_{ij}^{kl})_{hm}$ avec $m \leqq i$,

.....,

$s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ le nombre total des expressions indépendantes $(\varpi_{ij}^{kl})_{hm}$.

Comme toute expression $(A_{ij}^{kl})_{hm}$ se ramène à des expressions normales avec diminution soit de l'un des indices h, m, soit de chacun de ces deux indices, on voit immédiatement que :

s_1 est le nombre des expressions normales $(A_{ij}^{kl})_{h1}$,
s_2 est le nombre des expressions normales $(A_{ij}^{kl})_{h2}$,

.....,

s_n est le nombre des expressions normales $(A_{ij}^{kl})_{hn}$.

Pour que le système soit en involution, il faut et il suffit que le nombre des coefficients $(a_{ij}^{kl})_{hmr}$ *indépendants* soit égal à

$$s_1 + 2s_2 + \ldots + ns_n.$$

Or ce nombre est celui des quantités $(A_{ij}^{kl})_{hmr}$ qui sont *normales*. Celles de ces expressions normales pour lesquelles on a $r = 1$ sont en nombre égal aux expressions $(A_{ij}^{kl})_{hm}$ normales, c'est-à-dire

$$s'_1 = s_1 + s_2 + \ldots + s_n;$$

celles des expressions $(A_{ij}^{kl})_{hmr}$ normales pour lesquelles $r = 2$ proviennent des

$$s'_2 = s_2 + s_3 + \ldots + s_n$$

expressions normales $(A_{ij}^{kl})_{hm}$ pour lesquelles $m \geqq 2$, et ainsi de suite. La condition

$$s'_1 + s'_2 + \ldots + s'_n = s_1 + 2s_2 + \ldots + ns_n$$

est effectivement vérifiée et le *système de Pfaff est en involution.*

18. La valeur numérique de s_n est importante parce qu'elle indique le nombre des fonctions arbitraires de n arguments dont dépend la solution générale du système de Pfaff. Or s_n est le nombre

des expressions *normales* $(A_{ij}^{kl})_{hm}$; on a donc nécessairement

$$i = k = h = n,$$

et s_n est par suite le nombre des combinaisons avec répétition (jl) de $n-1$ lettres deux à deux

$$s_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

La solution générale du système de Pfaff considéré dépend donc de $\frac{n(n-1)}{2}$ *fonctions arbitraires de n arguments.*

A toute solution du système de Pfaff correspondent, d'après ce qui a été vu plus haut, $\frac{n(n+1)}{2}$ expressions de Pfaff ω_i, ω_{ij} satisfaisant aux relations (10) et (14). Convenons de dire que deux formes différentielles quadratiques décomposées en carrés appartiennent à la même classe lorsqu'il existe un changement de variables transformant chacune à chacune les expressions ω_i relatives à la première forme dans les expressions ϖ_i relatives à la seconde. Nous voyons qu'à *toute classe de formes différentielles quadratiques décomposées en carrés correspond une solution du système de Pfaff et réciproquement. Les relations qui lient les invariants relatifs d'une forme quadratique arbitraire décomposée en carrés contiennent donc* $\frac{n(n-1)}{2}$ *fonctions arbitraires de n arguments (et naturellement d'autres fonctions arbitraires d'un moindre nombre d'arguments).*

La propriété du système de Pfaff (18) et (21) d'être en involution conduit à une autre conclusion intéressante. Ce système admet en effet au moins une solution correspondant à des valeurs numériques arbitraires des variables, tant dépendantes qu'indépendantes. Il en est de même pour les systèmes de Pfaff prolongés par l'introduction des invariants relatifs des ordres supérieurs. Par conséquent, *il existe toujours au moins une forme quadratique différentielle décomposée en carrés, telle que, pour des valeurs numériques convenablement choisies des variables x et u, les invariants*

relatifs normaux correspondants prennent des valeurs numériques arbitrairement données.

Nous connaissons donc, non seulement le système complet des invariants relatifs, mais encore le système complet des invariants relatifs *indépendants.*

19. Si nous nous donnons une forme différentielle quadratique à n variables sous la forme

$$ds^2 = \sum_{i,j}^{1,\ldots,n} g_{ij}(x)\, dx_i\, dx_j,$$

avec des coefficients g_{ij} fonctions indéterminées des x, sa décomposition en carrés

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i \omega_i^2$$

nous donnera des expressions de Pfaff ω_i linéaires en $dx_1, \ldots, dx_n$, avec des coefficients qui dépendront d'une manière déterminée des g_{ij} et de $\frac{n(n-1)}{2}$ variables auxiliaires u. Les composantes ω_{ij} de la rotation instantanée de l'espace, provenant d'une dérivation, contiendront comme coefficients les dérivées partielles du premier ordre des g_{ij}; quant aux invariants fondamentaux A_{ij}^{kl}, comme ils proviennent de la dérivation des ω_{ij}, ils contiendront linéairement les dérivées partielles du second ordre des g_{ij} (ainsi que leurs dérivées du premier ordre et ces fonctions elles-mêmes, mais non plus linéairement).

De même les $(A_{ij}^{kl})_h$ contiendront linéairement les dérivées partielles du troisième ordre des g_{ij} et ainsi de suite.

Il est important de savoir si les $\frac{n^2(n^2-1)(n+2)}{24}$ invariants normaux $(A_{ij}^{kl})_h$ sont des fonctions *indépendantes* des dérivées partielles du troisième ordre des g_{ij}, et plus généralement si les invariants normaux, pris jusqu'à un certain ordre p, sont des fonctions indépendantes des dérivées partielles des g_{ij} du

$3^{\text{ième}}$ au $(p+2)^{\text{ième}}$ ordre inclus. Cela est vraisemblable, mais il faut le démontrer rigoureusement.

Partons pour cela des expressions ω_i formées comme il a été dit plus haut et *où nous regarderons les g_{ij} comme des indéterminées.* On peut évidemment écrire

$$\omega'_i = \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \omega_{ki}] \tag{32}$$

avec n^2 expressions de Pfaff ω_{ij} qui dépendent linéairement des dx, des du et des dg_{ij}. Ces expressions ne sont pas déterminées d'une manière univoque : *nous les prendrons les plus générales possible*, en introduisant des indéterminées auxiliaires nouvelles qui seront évidemment en nombre $\frac{n^2(n+1)}{2}$, car de tout choix possible des ω_{ij} on déduit le choix le plus général en ajoutant à ω_{ij} l'expression

$$\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{kij} \omega_k,$$

où les indéterminées α_{kij} satisfont aux seules conditions

$$\alpha_{kij} = \alpha_{ikj}.$$

Les équations (32) dérivées conduisent aux formules

$$\omega'_{ji} = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_{jk} \omega_{ki}] + \sum [\omega_k \omega_{kji}] \tag{33}$$

avec de nouvelles expressions de Pfaff $\omega_{kji} = \omega_{jki}$ linéaires par rapport aux dx, du, dg_{ij} et $d\alpha_{kij}$. Ces expressions, si on les choisit de la manière la plus générale possible, font intervenir à leur tour de nouvelles indéterminées α_{lkji} dans lesquelles l'ordre des trois premiers indices est indifférent.

Les équations (33) donnent, par dérivation, comme le montre un calcul facile,

$$\omega'_{kji} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho [\omega_{k\rho} \omega_{\rho ji}] + \varepsilon_\rho [\omega_{j\rho} \omega_{k\rho i}] + \varepsilon_\rho [\omega_{i\rho} \omega_{kj\rho}] + \sum_{l=1}^{l=n} [\omega_l \omega_{lkji}], \tag{34}$$

avec de nouvelles expressions de Pfaff ω_{lkji}, dans lesquelles l'ordre des trois premiers indices l, k, j peut être changé sans altérer l'expression.

Une nouvelle dérivation donne

$$(35)\quad \omega'_{lkji} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho \{ [\omega_{lk\rho}\omega_{\rho ji}] + [\omega_{lj\rho}\omega_{k\rho i}] + [\omega_{li\rho}\omega_{kj\rho}] + [\omega_{l\rho}\omega_{\rho kji}] + [\omega_{k\rho}\omega_{l\rho ji}] + [\omega_{j\rho}\omega_{lk\rho i}] + [\omega_{i\rho}\omega_{lkj\rho}] \} + \sum_{m=1}^{m=n} [\omega_m \omega_{mlkji}]$$

avec de nouvelles expressions ω_{mlkji}, et ainsi de suite.

20. Ces formules générales étant établies, *si l'on suppose maintenant que les g_{ij} sont des fonctions des seules variables x*, on pourra (n° **5**), toujours supposer qu'on a

$$(36)\qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0;$$

les formules (33), comparées aux formules (14), nous donneront ensuite

$$\sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \omega_{kji}] = \sum_{(kl)}^{1,\ldots,n} A_{ji}^{kl} [\omega_k \omega_l],$$

ce qui permettra d'écrire

$$(37)\qquad \omega_{kji} = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^{l=n} (A_{ji}^{kl} + A_{ki}^{jl})\, \omega_l,$$

formule dans le second membre de laquelle les indices k et j entrent bien symétriquement. Ces équations dérivées donnent, en tenant compte des équations (34) et (18),

$$\sum_{l=1}^{l=n} [\omega_l \omega_{lkji}] = \frac{1}{3} \sum_{(lm)}^{1,\ldots,n} [(A_{ji}^{km})_l + (A_{ki}^{jm})_l - (A_{ji}^{kl})_m - (A_{ki}^{jl})_m] [\omega_l \omega_m],$$

ce qui permettra d'écrire

$$(38)\qquad \omega_{kji} = \frac{1}{12}\sum_{m=1}^{m=n}[(A_{ij}^{km})_l + (A_{ik}^{jm})_l + (A_{ij}^{lm})_k - (A_{il}^{jm})_k + (A_{ik}^{lm})_j + (A_{il}^{km})_j]\,\omega_m,$$

formule dans le second membre de laquelle les indices j, k et l entrent symétriquement. Les formules (36), (37), (38) sont compatibles avec des fonctions *arbitraires* g_{ij} des x.

21. Revenons maintenant à notre point de vue primitif du n° **19** où les g_{ij}, α_{kij}, etc. sont des *indéterminées*. Les $\frac{n(n+1)}{2}$ équations

$$(36)\qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

expriment que les indéterminées g_{ij} ne dépendent que de $x_1, \ldots, x_n$; elles sont donc équivalentes à des équations de la forme

$$(36')\qquad dg_{ij} - \sum_{k=1}^{k=n} g_{ij}^{(k)}\,dx_k = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $g_{ij}^{(k)}$ sont des fonctions des indéterminées qui figurent dans les ω_i et ω_{ij}, et *nous savons d'avance que les quantités x, u, g_{ij}, $g_{ij}^{(k)}$ sont indépendantes.*

Les covariants bilinéaires des premiers membres des équations (36′) sont

$$\sum_{k=1}^{k=n}[dx_k\,dg_{ij}^{(k)}],$$

tandis que ceux des premiers membres des équations (36) sont, en tenant compte de ces équations elles-mêmes et utilisant les formules (33),

$$\sum_{k=1}^{k=n}[\omega_k(\omega_{kj} + \omega_{ki})].$$

Il en résulte que les expressions $\omega_{kji} + \omega_{kij}$, à des combinaisons linéaires près des ω_k et des premiers membres des équations (36), c'est-à-dire à des combinaisons linéaires près des dx et des dg_{ij}, doivent être linéaires par rapport aux $dg_{ij}^{(k)}$ et, de plus, que *par*

rapport aux $dg_{ij}^{(k)}$, *il doit y en avoir autant de linéairement indépendantes qu'il y a de différentielles* $dg_{ij}^{(k)}$, *c'est-à-dire* $\frac{n^2(n+1)}{2}$. Or, d'après l'égalité de ω_{kji} et de ω_{jki}, on voit facilement que toutes les expressions ω_{kji} se déduisent linéairement des expressions $\omega_{kji}+\omega_{kij}$, et leur nombre est précisément $\frac{n^2(n+1)}{2}$. Par suite, *chaque expression* ω_{kij} *est linéaire en* dx, dg_{ij}, $dg_{ij}^{(k)}$ *et, par rapport aux* $dg_{ij}^{(k)}$, *les* $\frac{n^2(n+1)}{2}$ *expressions* ω_{kij} *sont linéairement indépendantes.*

Introduisons maintenant $\frac{n^2(n-1)}{12}$ *indéterminées* A_{ij}^{kl} liées par les relations (15) et considérons les équations

$$\omega_{kji} = \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{l=n}(A_{ji}^{kl}+A_{ki}^{jl})\,\omega_l. \tag{37}$$

D'après ce qui vient d'être dit, et d'après ce qui a été vu au numéro précédent, le système formé des équations (36) et (37) est équivalent au système formé des équations (36′) et des nouvelles équations

$$dg_{ij}^{(k)} - \sum_{l=1}^{l=n} g_{ij}^{(kl)}\,dx_l = 0, \tag{37'}$$

où les $g_{ij}^{(kl)} = g_{ij}^{(lk)}$ sont des fonctions des indéterminées qui figurent dans les ω_i, les ω_{ij} et les ω_{kji}, ainsi que des indéterminées A_{ij}^{kl}, et *nous savons d'avance que les* $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ *quantités* $g_{ij}^{(kl)}$ *sont indépendantes entre elles et indépendantes des* x, u, g_{ij} *et* $g_{ij}^{(k)}$.

Les covariants bilinéaires des premiers membres des équations du système (36′) et (37′) se réduisent, en tenant compte de ces équations, à

$$\sum_{l=1}^{l=n}[dx_l\,dg_{ij}^{(kl)}].$$

Si l'on effectue la même opération sur le système (36) et (37), on obtient, en utilisant les formules (34),

$$\sum_{l=1}^{l=n}\left[\omega_l\left(\omega_{lkji} - \frac{1}{3}\varpi_{ji}^{kl} - \frac{1}{3}\varpi_{ki}^{jl}\right)\right],$$

en posant [*cf.* formule (18)]

$$\varpi_{ji}^{kl} = dA_{ji}^{kl} - \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho (A_{\rho i}^{kl}\omega_{j\rho} + A_{j\rho}^{kl}\omega_{i\rho} + A_{ji}^{\rho l}\omega_{k\rho} + A_{ji}^{k\rho}\omega_{l\rho}).$$

Il résulte de là qu'à des combinaisons linéaires près des ω_i et des premiers membres des équations (36) et (37), c'est-à-dire à des combinaisons linéaires près des dx, dg_{ij}, $dg_{ij}^{(k}$, les expressions

$$\omega_{lkji} - \frac{1}{3}\varpi_{ji}^{kl} - \frac{1}{3}\varpi_{ki}^{jl} \tag{39}$$

sont des combinaisons linéaires des $dg_{ij}^{(kl)}$ et, de plus, qu'il y en a exactement autant de linéairement indépendantes qu'il y a de différentielles $dg_{ij}^{(kl)}$, c'est-à-dire $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Or si l'on effectue sur l'expression (39) deux permutations circulaires successives sur les indices j, k, l et qu'on ajoute les deux expressions obtenues à l'expression primitive, on obtient $3\omega_{lkji}$; on voit de même que tous les ϖ_{ji}^{kl}, se déduisent linéairement des expressions (39). Or les expressions ω_{lkji} sont au nombre de

$$\frac{n^2(n+1)(n+2)}{6},$$

les ϖ_{ji}^{kl} au nombre de

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12};$$

les expressions (39) indépendantes sont donc en nombre total

$$\frac{n^2(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n^2(n^2-1)}{12} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Par conséquent, *les expressions* ω_{lkji} *et* ϖ_{ji}^{kl} *sont linéairement indépendantes par rapport aux* $dg_{ij}^{(kl)}$ (et dépendent en outre des dx, dg_{ij}, $dg_{ij}^{(k}$). Si nous portons en particulier notre attention sur les expressions ϖ_{ij}^{kl} et si nous remarquons que ces expressions sont égales à dA_{ij}^{kl}, à des combinaisons linéaires près des ω_{ij}, c'est-à-dire à des combinaisons linéaires près des dx, du et dg_{ij}, nous voyons qu'*il ne peut exister entre les différentielles des invariants relatifs*

fondamentaux, considérés comme fonctions des x, u, g_{ij}, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$, *aucune relation indépendante des dérivées partielles du second ordre* $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$.

Autrement dit, *les invariants fondamentaux (normaux) sont des fonctions indépendantes des dérivées partielles du second ordre des coefficients* g_{ij}.

Introduisons maintenant $\frac{n^2(n^2-1)(n+2)}{24}$ *indéterminées* nouvelles $(A_{ij}^{kl})_h$ assujetties uniquement à satisfaire aux relations (19) et (20) et considérons le système formé des équations (36), (37) et

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi_{ji}^{kl} &= \sum_{h=1}^{h=n} (A_{ji}^{kl})_h \omega_h, \\ \omega_{lkji} &= \frac{1}{12}\sum_{h=1}^{h=n} [(A_{ij}^{kh})_l + (A_{ik}^{jh})_l + (A_{ij}^{lh})_k + (A_{il}^{jh})_k + (A_{ik}^{lh})_j + (A_{il}^{kh})_j]\,\omega_h. \end{aligned}\right.$$

D'après ce qui vient d'être dit et d'après ce qui a été vu au numéro précédent, ce système est équivalent au système formé des équations (36′), (37′) et

$$(38')\qquad dg_{ij}^{(kl)} - \sum_{h=1}^{h=n} g_{ij}^{(klh)}\, dx_h = 0,$$

où les $g_{ij}^{(klh)}$, dans lesquelles l'ordre des indices supérieurs est indifférent, sont des fonctions des indéterminées qui figurent dans les ω_i, les ω_{ij}, les ω_{kji}, les ω_{lkji}, ainsi que des A_{ji}^{kl} et $(A_{ji}^{kl})_h$. Nous savons d'avance que les $\frac{n^2(n+1)^2(n+2)}{12}$ quantités $g_{ij}^{(klh)}$ sont indépendantes entre elles et indépendantes des x, u, g_{ij}, $g_{ij}^{(k)}$ et $g_{ij}^{(kl)}$.

Les covariants bilinéaires des premiers membres des équations (36′), (37′) et (38′) se réduisent, en tenant compte de ces équations, à

$$\sum_{h=1}^{h=n} [dx_h\, dg_{ij}^{(klh)}].$$

La même opération, effectuée sur le système (36, (37) et (38), donne

$$\sum_{h=1}^{h=n} [\omega_h (\varpi_{ji}^{hl})_h]$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} \Big\{ \omega_h \Big[\omega_{hlkji} - \frac{1}{12} (\varpi_{ij}^{kh})_l - \frac{1}{12} (\varpi_{ik}^{jh})_l - \frac{1}{12} (\varpi_{ij}^{lh})_k - \frac{1}{12} (\varpi_{il}^{jh})_k - \frac{1}{12} (\varpi_{ik}^{lh})_j - \frac{1}{12} (\varpi_{il}^{kh})_j \Big] \Big\},$$

en posant

$$(\varpi_{ji}^{kl})_h = d(A_{ji}^{kl})_h - \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho [(A_{\rho i}^{kl})_h \omega_{j\rho} + (A_{j\rho}^{kl})_h \omega_{i\rho} + (A_{ij}^{\rho l})_h \omega_{k\rho} + (A_{ji}^{k\rho})_h \omega_{l\rho} + (A_{ji}^{kl})_\rho \omega_{h\rho}]$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \varepsilon_\rho (A_{\rho i}^{kl} A_{j\rho}^{h\sigma} + A_{j\rho}^{kl} A_{i\rho}^{h\sigma} + A_{ji}^{\rho l} A_{k\rho}^{h\sigma} + A_{ji}^{k\rho} A_{l\rho}^{h\sigma}) \omega_\sigma.$$

Il résulte de là que les expressions

$$\omega_{hlkji} \quad \text{et} \quad (\varpi_{ji}^{kl})_h$$

sont des combinaisons linéaires des dx, des dg_{ij}, des $dg_{ij}^{(k}$, des $dg_{ij}^{(kl)}$ et des $dg_{ij}^{(klm)}$ et que, *considérées par rapport à ces dernières quantités* $dg_{ij}^{(klm)}$, il doit y en avoir exactement $\frac{n^2(n+1)^2(n+2)}{12}$ indépendantes.

Or le nombre des expressions ω_{hlkji} est de

$$\frac{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}{24};$$

les ϖ_{ji}^{kl} sont de leur côté (n° **11**) au nombre de

$$\frac{n^2(n^2-1)(n+2)}{24}.$$

La somme de ces deux derniers nombres est

$$\frac{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}{24} + \frac{n^2(n^2-1)(n+2)}{24} = \frac{n^2(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

Par conséquent, *il n'existe entre les* ω_{mlkji} *et les* $(\varpi_{ji}^{kl})_h$ *aucune relation linéaire indépendante des* $dg_{ij}^{(klm)}$. En particulier, il n'existe

aucune relation pareille entre les $(\varpi_{ji}^{kl})_h$. Autrement dit, il n'existe aucune combinaison linéaire des $d(A_{ji}^{kl})_h$ qui puisse s'exprimer linéairement au moyen des dx, des du, des dg_{ij}, des $dg_{ij}^{(k)}$ et des $dg_{ij}^{(kl)}$. Donc enfin *les invariants normaux* $(A_{ij}^{kl})_h$ *ne sont liés par aucune relation indépendante des dérivées partielles du troisième ordre des coefficients* g_{ij}.

22. Le raisonnement pourrait se poursuivre de proche en proche, mais il exigerait des calculs très fastidieux. Nous allons montrer par un raisonnement *a priori* que *tout invariant relatif formé avec les variables x et u, les fonctions $g_{ij}(x)$ et leurs dérivées partielles des trois premiers ordres est nécessairement une fonction des seuls invariants* A_{ij}^{kl} *et* $(A_{ij}^{kl})_h$. Il en résultera en particulier, d'après ce qui vient d'être vu, que *tout invariant relatif formé avec les variables x et u, les fonctions $g_{ij}(x)$ et leurs dérivées partielles des deux premiers ordres est nécessairement une fonction des seuls invariants fondamentaux* A_{ij}^{kl}.

Revenons, pour la démonstration de ce théorème, au système de Pfaff (18) et (21). Nous savons qu'il admet toujours au moins une solution correspondant à des valeurs numériques arbitrairement données des variables, tant dépendantes qu'indépendantes. Donnons-nous par conséquent des valeurs numériques *arbitraires* $(a_{ij}^{kl})_h$ et a_{ij}^{kl} pour les invariants fondamentaux et leurs dérivés du premier ordre, et considérons une des solutions correspondantes du système de Pfaff. Nous pouvons définir cette solution en prenant pour les variables, indépendantes et dépendantes, certaines fonctions déterminées de $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres ξ. Désignons par $\overline{(A_{ij}^{kl})_h}$ et $\overline{A_{ij}^{kl}}$ les fonctions de ξ obtenues.

Cela posé, partons d'une forme quadratique indéterminée, décomposée en carrés. Désignons par g_{ij} les coefficients de cette forme et par $(A_{ij}^{kl})_h$, A_{ij}^{kl} les fonctions des x, u, g_{ij}, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}$, etc., qui définissent les invariants relatifs. Les équations qui définissent les formes (décomposées en carrés) appartenant à la classe choisie plus haut sont évidemment (n° **15**)

$$(40) \qquad A_{ij}^{kl} = \overline{A_{ij}^{kl}}, \qquad (A_{ij}^{kl})_h = \overline{(A_{ij}^{kl})_h};$$

ce sont des équations où les variables indépendantes sont les ξ et les fonctions inconnues les x, u, g_{ij}, $g_{ij}^{(k)}$, $g_{ij}^{(kl)}$, $g_{ij}^{(klh)}$. On peut évidemment les remplacer par le système de Pfaff

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &\omega_{ij}+\omega_{ji}=0,\\ &\omega_{kji}=\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{l=n}(\overline{A_{ji}^{kl}}+\overline{A_{ki}^{jl}})\,\omega_l,\\ &d\overline{A_{ji}^{kl}}=\sum_{\rho=1}^{\rho=n}\varepsilon_\rho\left(\overline{A_{\rho i}^{kl}}\,\omega_{j\rho}+\overline{A_{j\rho}^{kl}}\,\omega_{i\rho}+\overline{A_{ji}^{\rho l}}\,\omega_{k\rho}+\overline{A_{ji}^{k\rho}}\,\omega_{l\rho}\right)+\sum_{h=1}^{h=n}(\overline{A_{ji}^{kl}})_h\,\omega_h. \end{aligned}\right.$$

En effet, les équations (36), (37) et (38) montrent que les équations (41) entraînent les équations (40) et réciproquement.

Or *le système* (41) *est en involution*, car les équations quadratiques extérieures qui en résultent par dérivation sont, d'après les calculs faits au n° **21**,

$$(42)\qquad \sum_{l=1}^{l=n}[\omega_l\varpi_{lkji}]=0,$$

$$(43)\qquad \sum_{h=1}^{h=n}\left[\omega_l\overline{(\varpi_{ji}^{kl})_h}\right]=0,$$

en posant

$$\varpi_{lkji}=\omega_{lkji}-\frac{1}{12}\sum_{h=1}^{h=n}\left[\overline{(A_{ij}^{kh})_l}+\overline{(A_{ik}^{jh})_l}+\overline{(A_{ij}^{lh})_k}+\overline{(A_{il}^{jh})_k}+\overline{(A_{ik}^{lh})_j}+\overline{(A_{il}^{kh})_j}\right]\omega_h.$$

Or, d'après la discussion qui a été faite du système de Pfaff (18) et (21), les équations (41) écrites à la dernière ligne entraînent pour les $d\overline{(A_{ji}^{kl})_h}$ des expressions de la forme (21), où les quantités seraient surlignées et par suite, d'après la définition même de $\overline{(\varpi_{ij}^{kl})_h}$, les équations (43) sont identiquement vérifiées. Il ne reste donc à considérer que les équations (42) *dont la forme met en évidence la propriété du système de Pfaff* (41) *d'être en involution.*

23. Le système (41) étant en involution admet au moins une solution correspondant à des valeurs numériques *arbitrairement* données des variables indépendantes ξ et des variables dépen-

dantes x, u, g_{ij}, $g_{ij}^{(k)}$, $g_{ij}^{(kl)}$, (g_{ij}^{klm}) *sous la seule condition que ces valeurs numériques satisfassent aux relations* (40). Donnons en particulier aux ξ les valeurs numériques ξ^0 pour lesquelles les invariants A_{ij}^{kl} et $(A_{ij}^{kl})_h$ prennent les valeurs numériques données a_{ij}^{kl} et $(a_{ij}^{kl})_h$, et considérons un invariant relatif quelconque de la forme

$$I\left(x, u, g_{ij}, \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}, \frac{\partial^3 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l \partial x_h}\right);$$

cet invariant gardera sa valeur numérique si l'on change arbitrairement les valeurs numériques de ses arguments, sous la seule condition que les nouvelles valeurs numériques donnent aux invariants A_{ij}^{kl} et $(A_{ij}^{kl})_h$ les mêmes valeurs numériques. Autrement dit, *l'invariant* I *est une fonction des seules quantités* A_{ij}^{kl} *et* $(A_{ij}^{kl})_h$. C'est ce qu'il fallait démontrer. En particulier, comme nous l'avons déjà fait remarquer, *tout invariant relatif contenant les dérivées partielles des* g_{ij} *jusqu'au second ordre au plus est une fonction des seuls invariants fondamentaux* A_{ij}^{kl}.

D'une manière plus particulière encore, *si l'invariant* I *est linéaire par rapport aux dérivées partielles du second ordre des* g_{ij}, *c'est une fonction linéaire à coefficients constants des* A_{ij}^{kl}.

Ce résultat, qu'on pouvait regarder *a priori* comme très vraisemblable, et qui a une très grande importance dans la théorie de la relativité généralisée, est ainsi démontré rigoureusement.

Les invariants absolus d'une forme différentielle quadratique.

24. Arrivons maintenant à la détermination des invariants *absolus*.

Un premier procédé théorique consiste à partir de $\frac{n(n-1)}{2}$ invariants fondamentaux qui soient des fonctions indépendantes des variables auxiliaires u et à particulariser la décomposition en carrés de manière que ces invariants prennent des valeurs numériques fixes données. On obtient ainsi pour les u des fonctions déterminées des x; en portant leurs valeurs dans les autres invariants relatifs, on obtient évidemment le système complet des

invariants absolus. Seulement ils se présentent en général sous forme irrationnelle.

La méthode précédente met en tout cas en évidence ce fait qu'il y a

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n+3)}{12}$$

invariants absolus fonctions des invariants relatifs fondamentaux.

Il nous suffit pour la suite de savoir déterminer ces

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n+3)}{12}$$

invariants absolus. Considérons pour cela la forme différentielle

$$\Phi = \sum [\omega_i \omega_j].\Omega_{ij} = \sum A_{ij}^{kl} [\omega_i \omega_j].[\omega_k \omega_l],$$

où le point indique une multiplication algébrique ordinaire. C'est en somme une forme quadratique ordinaire des $\frac{n(n-1)}{2}$ variables $[\omega_i \omega_j]$.

Les variables u n'entrent que dans les coefficients de cette forme, supposée développée suivant les quantités $[dx_i\, dx_j]$. Calculons la variation de Φ pour une variation arbitraire des u, les x restant fixes. Désignons par δ le symbole de cette variation.

On a, en utilisant une notation déjà employée,

$$\omega_i^\delta = 0,$$

$$\delta\omega_i^d = \delta\omega_i^d - d\omega_i^\delta = -\varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} \omega_{ki}^\delta \omega_k^d,$$

$$\delta[\omega_i \omega_j] = -\sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_j \omega_{kj}^\delta [\omega_i \omega_k] - \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_i \omega_{ki}^\delta [\omega_k \omega_j],$$

puis, d'après (17), et en remarquant que Ω_{ij}^δ est nul,

$$\delta\Omega_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k (\omega_{ik}^\delta \Omega_{kj} - \omega_{kj}^\delta \Omega_{ik}),$$

d'où enfin

$$\partial\Phi = -\sum \varepsilon_j\, \omega_{kj}^{\delta}[\omega_i\omega_k]\Omega_{ij} - \sum \varepsilon_i\, \omega_{ki}^{\delta}[\omega_k\omega_j]\Omega_{ij}$$
$$+\sum \varepsilon_k\, \omega_{ik}^{\delta}[\omega_i\omega_j]\Omega_{kj} - \sum \varepsilon_k\, \omega_{kj}^{\delta}[\omega_i\omega_j]\Omega_{ik}.$$

En échangeant dans la première somme les indices de sommation j et k et dans la seconde les indices i et k, on voit immédiatement que *le second membre est nul.*

Autrement dit, *la forme* Φ *est un covariant absolu* [1].

25. La recherche des invariants absolus, fonctions des invariants relatifs fondamentaux, revient alors à la résolution d'un problème de Géométrie analytique.

Regardons provisoirement $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ comme les coordonnées homogènes d'un point dans un espace projectif à $n-1$ dimensions; nous pouvons alors regarder les $\frac{n(n-1)}{2}$ expressions $[\omega_i\omega_j]$ comme les coordonnées plückériennes d'une droite dans cet espace. *Il s'agit alors de trouver les invariants de la forme quadratique plückérienne*

$$\Phi = \sum A_{ij}^{kl}[\omega_i\omega_j][\omega_k\omega_l], \tag{43}$$

lorsqu'on effectue sur les coordonnées ponctuelles une substitution linéaire conservant la forme $\sum \varepsilon_i\omega_i^2$.

D'une manière moins précise et pas tout à fait exacte, il s'agit de *trouver les invariants d'un complexe quadratique de droites vis-à-vis du groupe des transformations projectives qui laissent invariante la quadrique* $\sum \varepsilon_i\omega_i^2 = 0$.

---

[1] C'est la forme quadrilinéaire classique introduite par E.-B. Christoffel dans son Mémoire : *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* (*Journal de Crelle*, t. 70, 1869, p. 46-70). Les $(A_{ij}^{l})_h$ sont de même les coefficients d'une forme covariante à cinq séries de différentielles, et ainsi de suite.

Analytiquement, on peut remarquer que, pour toute substitution linéaire conservant la forme $\sum \varepsilon_i \omega_i^2$, les coefficients de Φ subissent une substitution linéaire appartenant à un certain groupe. Les transformations infinitésimales de ce groupe sont précisément données par les formules (18), d'après lesquelles on a

$$\delta A_{ij}^{kl} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho (\omega_{i\rho}^{\delta} A_{\rho j}^{kl} + \omega_{j\rho}^{\delta} A_{i\rho}^{kl} + \omega_{k\rho}^{\delta} A_{ij}^{\rho l} + \omega_{l\rho}^{\delta} A_{ij}^{k\rho}).$$

Les $\frac{n(n-1)}{2}$ transformations infinitésimales qui engendrent le groupe sont caractérisées par les valeurs e_{ik} des constantes ω_{ik}^{δ}.

26. Il existe une combinaison linéaire à coefficients constants des A_{ij}^{kl} qui est un invariant absolu, à savoir

$$A = \sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j A_{ij}^{ij},$$

et c'est la seule : c'est la *courbure totale* de Riemann.

Il existe en outre une forme quadratique en ω_i qui est aussi un covariant absolu, c'est la forme

$$\varphi = \sum_{i,j,k} \varepsilon_i A_{ij}^{jk} \omega_j \omega_k,$$

qui se déduit de Φ par saturation des indices (*Verkürzung*) ; il en est de même plus généralement de la forme quadratique

$$\varphi + (\alpha A + \beta) \sum \varepsilon_i \omega_i^2,$$

où α et β désignent deux constantes arbitraires.

Dans le cas général $n > 4$, la théorie que j'ai développée des groupes linéaires ne laissant invariante aucune variété plane permettrait sans trop de difficulté de démontrer qu'on peut trouver

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)(n-3)}{12}$$

combinaisons linéaires des A_{ij}^{kl} indépendantes entre elles et indépendantes des coefficients de la forme φ, qui sont transformées entre elles par le groupe considéré *sans qu'il soit possible d'en trouver un moindre nombre jouissant des mêmes propriétés.*

27. Le cas $n=4$, qui intéresse la théorie de la relativité généralisée, mérite d'être traité en détail. Ici la forme quadratique fondamentale est, comme on sait,

$$-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2+\omega_4^2.$$

Avec l'interprétation géométrique indiquée plus haut, elle définit, égalée à zéro, une *quadrique réelle non réglée* (quadrique fondamentale). Cette quadrique admet deux systèmes de génératrices rectilignes imaginaires conjuguées; chacune des génératrices du premier système, rencontrant trois génératrices fixes du second système, appartient à trois complexes linéaires dont les équations sont faciles à obtenir. Soit en effet

$$\begin{aligned}\omega_1+i\omega_2\ +\lambda(\omega_3+\omega_4)&=0,\\ \lambda(\omega_1-i\omega_2)-\ \ \omega_3+\omega_4&=0\end{aligned}$$

les équations d'une génératrice quelconque du premier système; les coordonnées plückériennes de cette droite sont, avec les notations indiquées plus haut,

$$\frac{[\omega_2\omega_3]}{1-\lambda^2}=\frac{[\omega_3\omega_1]}{i(1+\lambda^2)}=\frac{[\omega_1\omega_2]}{2\lambda}=\frac{[\omega_1\omega_4]}{i(\lambda^2-1)}=\frac{[\omega_2\omega_4]}{\lambda^2+1}=\frac{[\omega_3\omega_4]}{-2i\lambda}.$$

Les trois complexes cherchés sont donc définis par les équations

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned}\xi_1&\equiv[\omega_2\omega_3]-i[\omega_1\omega_4]=0,\\ \xi_2&\equiv[\omega_3\omega_1]-i[\omega_2\omega_4]=0,\\ \xi_3&\equiv[\omega_1\omega_2]-i[\omega_3\omega_4]=0.\end{aligned}\right.$$

Les génératrices rectilignes du second système appartiennent alors aux trois complexes linéaires définis par les équations

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned}\eta_1&\equiv[\omega_2\omega_3]+i[\omega_1\omega_4]=0,\\ \eta_2&\equiv[\omega_3\omega_1]+i[\omega_2\omega_4]=0,\\ \eta_3&\equiv[\omega_1\omega_2]+i[\omega_3\omega_4]=0.\end{aligned}\right.$$

Effectuons maintenant un changement de coordonnées plückériennes de la droite en prenant pour nouvelles coordonnées les six quantités ξ_i et η_i. La relation à laquelle satisfont les six nouvelles coordonnées d'une même droite est maintenant

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2. \tag{46}$$

Le complexe quadratique des droites tangentes à la quadrique fondamentale est manifestement défini par l'équation

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 0. \tag{47}$$

Cette équation est en effet vérifiée par chaque génératrice de cette quadrique, puisque chaque génératrice, du premier système par exemple, ayant ses coordonnées ξ toutes nulles, la vérifie en vertu de (46). Toute droite tangente à la quadrique en un point défini par l'intersection des deux génératrices

$$(0, 0, 0, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \quad (\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0, 0, 0)$$

a pour coordonnées

$$(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \lambda\xi_3, \mu\eta_1, \mu\eta_2, \mu\eta_3)$$

et par suite satisfait aussi à l'équation (47).

28. Remarquons maintenant que toute substitution linéaire conservant la forme fondamentale $-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2$ se traduit évidemment par une substitution linéaire *orthogonale* sur les ξ et par une substitution linéaire *orthogonale* sur les η (à moins qu'elle n'échange les coordonnées ξ avec les coordonnées η, mais nous ne considérerons que les substitutions qui n'échangent pas entre elles les deux systèmes de génératrices de la quadrique fondamentale). Ces deux substitutions linéaires sont naturellement à coefficients complexes conjugués.

Avec les nouvelles coordonnées de la droite, la forme covariante Φ se décomposera en une somme de trois formes respectivement covariantes :

1° Une forme quadratique $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$;

2° Une forme quadratique (complexe conjuguée) $f'(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$;

3° Une forme d'Hermite $\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3)$ bilinéaire par rapport à chaque série de variables et prenant des valeurs numériques réelles quand on donne aux variables des deux séries des valeurs numériques complexes conjuguées (c'est cette propriété qui définit une forme d'Hermite).

En effectuant le calcul, qui n'offre aucune difficulté, on trouve

$$\begin{aligned}
4f(\xi) = \quad & (A_{23}^{23} - A_{14}^{14} + 2iA_{23}^{14})\xi_1^2 + (A_{31}^{31} - A_{24}^{24} + 2iA_{31}^{24})\xi_2^2 \\
& + (A_{12}^{12} - A_{34}^{34} + 2iA_{12}^{34})\xi_3^2 - 2(A_{12}^{13} + A_{24}^{34} + iA_{21}^{24} - iA_{31}^{34})\xi_2\xi_3 \\
& - 2(A_{23}^{21} + A_{34}^{14} + iA_{32}^{34} - iA_{12}^{14})\xi_3\xi_1 \\
& - 2(A_{31}^{32} + A_{14}^{24} + iA_{13}^{14} - iA_{23}^{24})\xi_1\xi_2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\psi(\xi;\eta) = \quad & (A_{23}^{23} + A_{14}^{14})\xi_1\eta_1 + (A_{14}^{24} - A_{13}^{23} - iA_{13}^{14} - iA_{23}^{24})\xi_1\eta_2 \\
& + (A_{14}^{34} - A_{12}^{32} + iA_{12}^{14} + iA_{32}^{34})\xi_1\eta_3 \\
& + (A_{24}^{14} - A_{23}^{13} + iA_{23}^{24} + iA_{13}^{14})\xi_2\eta_1 \\
& + (A_{31}^{31} + A_{24}^{24})\xi_2\eta_2 + (A_{24}^{34} - A_{21}^{31} - iA_{21}^{24} - iA_{31}^{34})\xi_2\eta_3 \\
& + (A_{34}^{14} - A_{32}^{12} - iA_{32}^{34} - iA_{12}^{14})\xi_3\eta_1 \\
& + (A_{34}^{24} - A_{31}^{21} + iA_{31}^{34} + iA_{21}^{24})\xi_3\eta_2 + (A_{12}^{12} + A_{34}^{34})\xi_3\eta_3.
\end{aligned}$$

Nous remarquerons que la somme des coefficients de $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^3$ dans $f(\xi)$ est *réelle*. On peut alors écrire

$$\Phi = \frac{1}{12}A(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) + \bar{f}(\xi) + \overline{f'}(\eta) + \psi(\xi;\eta),$$

en désignant par A la courbure totale

$$A = A_{23}^{23} + A_{31}^{31} + A_{12}^{12} - A_{14}^{14} - A_{24}^{24} - A_{34}^{34},$$

et en posant

$$\bar{f}(\xi) = f(\xi) - \frac{1}{12}A(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2);$$

la somme des coefficients des termes carrés dans $\bar{f}(\xi)$ est alors nulle.

Quand on effectuera sur les ξ une substitution orthogonale, les cinq coefficients complexes de $\bar{f}(\xi)$ seront échangés linéairement entre eux sans qu'on puisse trouver $h < 5$ combinaisons linéaires indépendantes de ces coefficients qui soient aussi échangées entre elles.

Les invariants fondamentaux relatifs de la forme différentielle donnée peuvent ainsi se distribuer en quatre groupes :

1° L'invariant absolu A;

2° Les cinq coefficients complexes de $f(\xi)$;

3° Les cinq coefficients complexes conjugués de $\overline{f}'(\eta)$;

4° Les neuf coefficients (réels ou deux à deux imaginaires conjugués) de $\psi(\xi;\eta)$.

Toute substitution linéaire sur les ω_i échange entre eux les invariants relatifs de chaque groupe et il est facile de voir que ces groupes sont indécomposables en d'autres dont les éléments soient séparément échangés entre eux.

29. Nous avons introduit dans le cas général, au n° **26**, la forme quadratique covariante

$$\varphi = \sum \varepsilon_i A_{ij}^{ik} \omega_j \omega_k,$$

et plus généralement

$$\varphi' = \sum \varepsilon_i A_{ij}^{ik} \omega_j \omega_k + \alpha A \sum \varepsilon_i \omega_i^2.$$

Si l'on détermine le coefficient α par la condition que la somme des coefficients des termes en $\varepsilon_i \omega_i^2$ soit nulle, ce qui donne

$$n\alpha A = -\sum \varepsilon_i \varepsilon_j A_{ij}^{ij} = 2A, \qquad \alpha = -\frac{2}{n},$$

les $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ coefficients restants sont échangés entre eux sans qu'on puisse en trouver des combinaisons linéaires en moindre nombre qui jouissent de la même propriété.

Ici $\frac{n(n+1)}{2} - 1 = 9$; les coefficients qui restent sont donc nécessairement des combinaisons linéaires indépendantes de la forme d'Hermite $\psi(\xi;\eta)$. On a en effet

$$\begin{aligned}\varphi' = {} & \frac{1}{2}(A_{12}^{12} + A_{13}^{13} - A_{23}^{23} - A_{14}^{14} + A_{24}^{24} + A_{34}^{34})\omega_1^2 + \ldots \\ & + \frac{1}{2}(A_{23}^{23} + A_{31}^{31} + A_{12}^{12} + A_{14}^{14} + A_{24}^{24} + A_{34}^{34})\omega_4^2 \\ & + 2(A_{21}^{31} - A_{24}^{34})\omega_2\omega_3 + \ldots + 2(A_{21}^{24} + A_{31}^{34})\omega_1\omega_4 + \ldots\end{aligned}$$

et l'on retrouve sans difficulté, mais avec d'autres combinaisons, les coefficients de la forme d'Hermite $\psi(\xi; \eta)$.

Il doit y avoir d'après cela une relation géométrique importante entre la forme quadratique φ' et la forme d'Hermite ψ. Cette relation peut être mise en évidence sous différentes formes. D'abord l'équation obtenue en annulant la forme d'Hermite ψ définit un complexe quadratique de droites auquel appartiennent manifestement toutes les génératrices de la quadrique fondamentale (puisque ψ s'annule en même temps que les ξ et aussi en même temps que les η). Considérons une génératrice G du premier système de la quadrique fondamentale $(0; \eta^0)$; l'équation linéaire en ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\psi(\xi; \eta^0) = 0,$$

jointe à l'équation

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0,$$

définit deux génératrices du second système, qui coupent la génératrice donnée G en deux points; ces points jouissent évidemment de la propriété que toute tangente en un de ces points à la quadrique fondamentale appartient au complexe quadratique. Quand la génératrice G varie, ces points engendrent une biquadratique gauche, à laquelle correspond un faisceau de quadriques : la quadrique $\varphi' = 0$ fait partie de ce faisceau.

Mais le complexe quadratique $\psi = 0$ peut être défini par une propriété géométrique simple le rattachant à la quadrique fondamentale et à la quadrique $\varphi' = 0$. Partons en effet *a priori* d'une quadrique

$$a_{11}\omega_1^2 + a_{22}\omega_2^2 + a_{33}\omega_3^2 + a_{44}\omega_4^2 + 2a_{23}\omega_2\omega_3 + \ldots + 2a_{14}\omega_1\omega_4 + \ldots = 0,$$

et cherchons l'équation du complexe des droites qui découpent sur cette quadrique et sur la quadrique fondamentale deux segments formant une division harmonique. Un calcul facile donne pour l'équation de ce complexe

$$\begin{aligned}
& a_{11}\{[\omega_1\omega_2]^2 + [\omega_1\omega_3]^2 - [\omega_1\omega_4]^2\} + \ldots \\
+ \; & a_{44}\{[\omega_1\omega_4]^2 + [\omega_2\omega_4]^2 + [\omega_3\omega_4]^2\} \\
+ \; & 2a_{23}\{[\omega_1\omega_2][\omega_1\omega_3] - [\omega_4\omega_2][\omega_4\omega_3]\} + \ldots \\
+ \; & 2a_{14}\{[\omega_2\omega_1][\omega_2\omega_4] + [\omega_3\omega_1][\omega_3\omega_4]\} + \ldots = 0,
\end{aligned}$$

ou, en introduisant les coordonnées ξ et η,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}+a_{33}-a_{44})(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2)\\
&+\ (a_{22}+a_{33}+a_{44}-a_{11})\xi_1\eta_1-2(a_{12}-ia_{34})\xi_1\eta_2-2(a_{31}+ia_{24})\xi_1\eta_3\\
&-2(a_{12}+ia_{34})\xi_2\eta_1+(a_{33}+a_{11}+a_{44}-a_{22})\xi_2\eta_2-2(a_{23}-ia_{14})\xi_2\eta_3\\
&-2(a_{31}-ia_{24})\xi_3\eta_1-2(a_{23}+ia_{14})\xi_3\eta_2+(a_{11}+a_{22}+a_{44}-a_{33})\xi_3\eta_3=0.
\end{aligned}$$

En identifiant cette équation avec l'équation $\psi=0$, on retrouve pour les a_{ij} les coefficients de la forme φ'.

Par conséquent, la relation géométrique entre la forme quadratique φ' et la forme d'Hermite ψ est la suivante : *le complexe quadratique de droites obtenu en annulant la forme ψ est celui des droites qui découpent sur la quadrique fondamentale et sur la quadrique $\varphi'=0$ deux segments formant une division harmonique.*

30. On peut encore associer les formes $\bar{f}$ et $\bar{f}'$ à des formes *binaires* et la forme ψ à une forme doublement binaire. On peut en effet exprimer les coordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3 d'une génératrice du second système de la quadrique absolue au moyen d'un paramètre, ou de deux paramètres homogènes u_1, u_2, par exemple par les formules

$$\xi_1=u_1^2-u_2^2,\qquad \xi_2=i(u_1^2+u_2^2),\qquad \xi_3=2u_1u_2;$$

on aura de même pour toute génératrice du premier système

$$\eta_1=v_1^2-v_2^2,\qquad \eta_2=-i(v_1^2+v_2^2),\qquad \eta_3=2v_1v_2.$$

Toute substitution orthogonale sur les ξ se traduira par une substitution linéaire *à déterminant égal à* 1 effectuée sur les deux variables u_1, u_2. Quant à la forme $\bar{f}(\xi)$, elle devient une forme biquadratique binaire en u, v; la forme $\bar{f}'(\eta)$ devient la forme biquadratique binaire en v_1, v_2 dont les coefficients sont complexes conjugués de ceux de la première; enfin la forme d'Hermite $\psi(\xi,\eta)$ devient une forme quadratique en (u_1, u_2) et quadratique en (v_1, v_2).

Les vingt coefficients A_{ij}^{kl} de Riemann se répartissent ainsi en quatre groupes dont chacun comprend un certain nombre de combinaisons linéaires de ces coefficients :

1° La courbure totale A;

2° Les cinq coefficients complexes d'une forme biquadratique binaire $F(u_1, u_2)$;

3° Les cinq coefficients complexes conjugués de la forme biquadratique binaire conjuguée $F'(v_1, v_2)$;

4° Les neuf coefficients, réels ou deux à deux complexes conjugués, d'une forme $\Psi(u_1, u_2; v_1, v_2)$ quadratique par rapport à u_1, u_2 et quadratique par rapport à v_1, v_2.

La signification géométrique des variables u_1, u_2 est classique : le rapport $\frac{u_1}{u_2}$ désigne le nombre complexe qui sert à définir la position d'un point réel sur la quadrique fondamentale. Toute transformation projective de la quadrique fondamentale en elle-même se traduit en effet par une transformation projective à coefficients complexes sur $\frac{u_1}{u_2}$. L'équation $\Psi = 0$ définit sur la quadrique fondamentale une courbe qui n'est autre que la biquadratique considérée plus haut.

31. La recherche des invariants *absolus*, fonctions des A_{ij}^{kl}, revient maintenant à un problème classique de la théorie des formes. En particulier, la forme F donnera deux invariants rationnels, l'un du second degré, l'autre du troisième degré; la forme F' donnera les deux invariants complexes conjugués.

Ces invariants s'obtiennent du reste aussi facilement en partant de la forme quadratique $f(\xi)$: il suffit, comme on sait, de considérer la somme des mineurs principaux du discriminant de cette forme, ainsi que ce discriminant lui-même. La forme ψ, ou plutôt la forme φ' qui lui est équivalente, donne de même un invariant quadratique, un invariant cubique et un invariant biquadratique par la considération du discriminant et de ses mineurs principaux : ce sont les coefficients des différentes puissances de λ dans l'équation obtenue en annulant le discriminant de la forme

$$\varphi' + \lambda(-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2).$$

En dehors de ces sept invariants (ou plutôt huit en tenant compte de l'invariant A) fournis par la considération isolée de

chacune des formes f, f', ψ, il y en a six autres (mixtes) formés avec les coefficients de plusieurs de ces formes. Nous n'insisterons pas davantage sur cette question.

32. Ce qui est plus intéressant pour les applications à la théorie de la relativité généralisée, c'est la résolution du problème suivant :

Trouver, de la manière la plus générale possible, dix combinaisons linéaires à coefficients constants R_{ij} *des quantités* A_{ij}^{kl} *qui soient échangées entre elles comme les coefficients d'une forme quadratique quand on effectue sur les* ω_i *une substitution linéaire conservant la forme fondamentale* $-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2$.

Autrement dit, *construire une forme quadratique covariante*

$$\sum R_{ij}\,\omega_i\omega_j$$

dont les coefficients soient des combinaisons linéaires à coefficients constants des A_{ij}^{kl}.

Nous avons déjà obtenu une solution de ce problème, à savoir la forme quadratique

$$\lambda\varphi' + (\alpha A + \beta)(-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2),$$

où λ, α et β sont trois constantes arbitraires.

Il est facile de voir que *le problème ne comporte pas d'autre solution.*

Soit en effet

$$\Phi = \sum R_{ij}\,\omega_i\omega_j$$

une forme quadratique covariante; posons

$$R = -R_{11} - R_{22} - R_{33} + R_{44},$$

$$\overline{R}_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{4}\varepsilon_{ij} R \qquad (\varepsilon_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j;\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -1,\ \varepsilon_{44} = +1);$$

on peut alors écrire

$$\Phi = \frac{1}{4} R(-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) + \sum \overline{R}_{ij}\,\omega_i\omega_j,$$

et l'on a

$$\overline{R_{11}} + \overline{R_{22}} + \overline{R_{33}} - \overline{R_{44}} = 0.$$

La quantité R est, comme on sait, un invariant absolu ; par suite, par sa propriété même d'être une combinaison linéaire des A_{ij}^{hl}, on a

$$R = \alpha A + \beta.$$

Quant aux quantités $\overline{R_{ij}}$, elles dépendent linéairement de neuf d'entre elles que nous pourrons, sans préciser davantage, désigner par

$$\overline{R_1}, \quad \overline{R_2}, \quad \ldots, \quad \overline{R_9}.$$

Elles subissent entre elles une transformation linéaire quand on effectue une substitution linéaire quelconque conservant la forme $-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2$, et il est impossible de trouver $h < 9$ combinaisons linéaires indépendantes des $\overline{R_i}$ jouissant de la même propriété.

Chacune des neuf quantités $\overline{R_i}$ peut se mettre, d'une manière et d'une seule, sous la forme

$$\overline{R_i} = H_i + K_i + L_i + \alpha_i A + \beta_i,$$

où H_i est une combinaison linéaire et homogène des coefficients de la forme $\overline{f}(\xi)$, K_i une combinaison linéaire et homogène des coefficients de la forme $\overline{f'}(\eta)$, L_i une combinaison linéaire et homogène des coefficients de la forme $\psi(\xi; \eta)$, α_i et β_i enfin des constantes.

Quand on effectue sur les ω_i une substitution linéaire conservant la forme $-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2$, les quantités $\overline{R_i}$ subissent entre elles une substitution linéaire ; il en est de même des coefficients de la forme $\overline{f}(\xi)$, de ceux de la forme $\overline{f'}(\eta)$ et de ceux de la forme $\psi(\xi; \eta)$. Si les H_i ne sont pas tous nuls, comme la forme $\overline{f}(\xi)$ contient cinq coefficients indépendants, il y aura un certain nombre $h (4 \leqq h < 9)$ de combinaisons linéaires indépendantes des $\overline{R_i}$ qui ne contiendront pas les coefficients de la forme $\overline{f}(\xi)$: nous pouvons toujours supposer que ces combinaisons sont pré-

cisément $\overline{R_1}, \ldots, \overline{R_h}$. Mais cela est impossible, car si par exemple, par une substitution linéaire arbitraire laissant invariante la forme $-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2$, la forme linéaire $\overline{R_1}$ était changée en

$$\lambda_1 \overline{R_1} + \lambda_2 \overline{R_2} + \ldots + \lambda_9 \overline{R_9},$$

les coefficients $\lambda_{h+1}, \ldots, \lambda_q$ devraient être tous nuls, puisque K_1 est changée dans une combinaison linéaire des coefficients de $f'(\eta)$, L_1 dans une combinaison linéaire des coefficients de $\psi(\xi; \eta)$ et que A est conservée. Il faudrait donc que les quantités $\overline{R_1}, \overline{R_2}, \ldots, \overline{R_h}$ fussent échangées entre elles par une substitution linéaire quelconque du groupe considéré, ce que nous avons vu être impossible.

Le raisonnement précédent montre que tous les termes H_i sont nuls; on verrait de même que tous les K_i sont nuls, ainsi que tous les coefficients α_i et β_i. Par suite, les $\overline{R_i}$ sont des combinaisons linéaires des coefficients de $\psi(\xi; \eta)$ ou, ce qui revient au même, des coefficients de $\varphi'(\omega)$.

Considérons alors la forme quadratique

$$\sum \overline{R}_{ij} \omega_i \omega_j - \lambda \varphi'(\omega)$$

qui est, par hypothèse, covariante quelle que soit la constante λ et dont les coefficients sont des combinaisons linéaires et homogènes des neuf coefficients de $\varphi'(\omega)$. Déterminons la constante λ par la condition que les neuf coefficients de ω_1^2, ω_2^2; ω_3^2, $\omega_i \omega_j$, soient *linéairement dépendants*, ce qui est toujours possible. Si ces nouveaux coefficients n'étaient pas tous nuls, on aurait $h < 9$ combinaisons linéaires indépendantes des coefficients de φ' qui seraient transformés linéairement entre eux, ce que nous savons être impossible. Il faut donc que la forme quadratique écrite ci-dessus devienne identiquement nulle pour une valeur convenablement choisie de la constante λ. *C'est précisément ce que nous voulions démontrer.*

En définitive, *toutes les formes quadratiques covariantes absolues dont les coefficients sont linéaires par rapport aux A_{kl}^{ij} sont données*

par la formule

$$(48)\qquad \lambda\sum_{i,j,k}\varepsilon_i A_{ij}^{ik}\omega_j\omega_k+\left(\alpha\sum_{(ij)}\varepsilon_i\varepsilon_j A_{ij}^{ij}+\beta\right)(-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2+\omega_4^2),$$

avec trois constantes arbitraires α, β, λ.

33. Les équations de la gravitation d'Einstein sont en rapport très étroit avec le problème qui vient d'être résolu. Étant donné un ds^2 à quatre variables

$$ds^2=\sum_{i,k} g_{ik}(x)\,dx_i\,dx_k$$

réductible à la forme $-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2+\omega_4^2$, les équations de la gravitation d'Einstein sont de la forme

$$G_{ik}=-T_{ik},$$

où les G_{ik} sont les coefficients d'une forme différentielle quadratique *covariante*

$$\Phi=\sum G_{ik}\,dx_i\,dx_k.$$

Einstein admet que ces quantités G_{ik} sont des fonctions déterminées des variables x, des fonctions $g_{ik}(x)$ et de leurs dérivées partielles du premier et du second ordre, et qu'elles sont linéaires par rapport aux dérivées partielles du second ordre. La forme

$$\sum G_{ik}\,dx_i\,dx_k$$

doit être covariante : *cela signifie que si l'on effectue sur les* x *une transformation arbitraire*

$$x_i=f_i(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3},\overline{x_4}),$$

et si par cette transformation on a

$$\sum g_{ik}(x)\,dx_i\,dx_k=\sum \overline{g}_{ik}(\overline{x})\,d\overline{x_i}\,d\overline{x_k},$$

on a en même temps

$$\sum G_{ik}\left(x,\ g_{\alpha\beta}(x),\ \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\rho},\ \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\rho\,\partial x_\sigma}\right) dx_i\,dx_k$$
$$=\sum G_{ik}\left(\bar{x},\ \bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{x}),\ \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}_\rho},\ \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}_\rho\,\partial \bar{x}_\sigma}\right) d\bar{x}_i\,d\bar{x}_k.$$

Pour obtenir toutes ces formes quadratiques covariantes, imaginons que nous ayons décomposé, de la manière la plus générale possible, la forme donnée ds^2 en quatre carrés $-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2+\omega_4^2$; les coefficients des quatre expressions de Pfaff seront des fonctions déterminées des $g_{ik}(x)$ et de six variables auxiliaires $u_1, \ldots, u_6$. La forme Φ pourra alors s'exprimer comme forme quadratique en ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, soit

$$\Phi=\sum R_{ik}\,\omega_i\,\omega_k,$$

où les R_{ik} sont des fonctions déterminées des x, des u, des $g_{ik}(x)$, de leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, les dérivées du second ordre entrant linéairement. La forme Φ étant par hypothèse un covariant absolu et les expressions ω_i étant des covariants relatifs, *chacun des coefficients* R_{ik} *est un invariant relatif* et par suite, d'après ce qui a été démontré au n° **25**, *une combinaison linéaire à coefficients constants des invariants fondamentaux* A_{ij}^{kl}.

La forme d'Einstein $\Sigma G_{ik}dx_i dx_k$ *est donc nécessairement de la forme* (48)

$$\sum G_{ik}\,dx_i\,dx_k=\lambda\sum_{i,j,k}^{1,\ldots,4}\varepsilon_i A_{ij}^{ik}\omega_j\omega_k+\left(\alpha\sum_{i,j}^{1,\ldots,4}\varepsilon_i\varepsilon_j A_{ij}^{ij}+\beta\right)(-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2+\omega_4^2).$$

34. Avant de particulariser les coefficients constants α, β, λ par la condition que la loi de conservation soit respectée, faisons quelques remarques sur ceux des invariants fondamentaux qui n'entrent pas dans les équations de la gravitation. Ces équations font intervenir seulement la courbure totale A et les coefficients de la forme d'Hermite $\psi(\xi;\eta)$, mais pas ceux des formes quadratiques $\bar{f}(\xi)$ et $\bar{f}'(\eta)$. Les dix équations, linéaires par rapport aux dérivées partielles du second ordre des g_{ij}, qu'on obtient en annu-

lant les coefficients de ces formes, ont évidemment une signification invariante absolue. Ces équations sont, en se reportant aux expressions de $\bar{f}(\xi)$ données (n° **28**)

$$\begin{aligned}
&A^{23}_{23} - A^{14}_{14} = A^{31}_{31} - A^{24}_{24} = A^{12}_{12} - A^{34}_{34},\\
&A^{21}_{13} = A^{31}_{42} = 0,\\
&A^{13}_{12} + A^{34}_{24} = A^{24}_{23} + A^{14}_{34} = A^{32}_{31} + A^{24}_{14} = 0,\\
&A^{24}_{21} - A^{34}_{31} = A^{34}_{32} - A^{14}_{12} = A^{14}_{13} - A^{24}_{23} = 0.
\end{aligned}$$

On peut démontrer qu'elles expriment la réductibilité du ds^2 à la forme

$$\rho(dX_4^2 - dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2);$$

autrement dit, *elles expriment que la propagation de la lumière se fait suivant les mêmes lois que dans la théorie de la relativité restreinte.*

D'une manière plus générale, les dix invariants fondamentaux fournis par les coefficients de $\bar{f}(\xi)$ et $\bar{f}'(\eta)$ sont des invariants relatifs, non seulement pour la forme $\Sigma g_{ij}dx_i dx_j$, mais encore pour l'*équation* obtenue en l'égalant à zéro.

La loi de conservation et les équations de la gravitation.

35. Le tenseur gravitationnel G_{ik} est considéré arbitrairement comme formé des coefficients d'une forme quadratique covariante $\Sigma G_{ik}dx_i dx_k$. C'est ce que nous avons fait jusqu'à présent. Mais il peut y avoir intérêt à le considérer d'un autre point de vue.

Revenons à l'origine physique de la notion de tenseur. Étant donné un milieu élastique dans l'espace euclidien, sur chaque élément de surface du milieu ayant pour composantes

$$[dy\,dz],\quad [dz\,dx],\quad [dx\,dy]$$

suivant les plans de coordonnées, il agit une tension (un vecteur) dont les composantes suivant les trois axes de coordonnées sont

$$\begin{aligned}
&p_{xx}[dy\,dz] + p_{xy}[dz\,dx] + p_{xz}[dx\,dy],\\
&p_{yx}[dy\,dz] + p_{yy}[dz\,dx] + p_{yz}[dx\,dy],\\
&p_{zx}[dy\,dz] + p_{zy}[dz\,dx] + p_{zz}[dx\,dy].
\end{aligned}$$

Ce tenseur est symétrique si le tableau des coefficients est symétrique.

Au lieu de représenter le tenseur dont les composantes sont les quantités p_{xx}, etc., au moyen de la forme quadratique

$$p_{xx}dx^2 + 2p_{xy}dx\,dy + \ldots,$$

on peut le représenter, d'une manière plus conforme à sa nature, par la projection de la tension elle-même sur un axe de cosinus directeurs indéterminés ξ, η, ζ. On aura alors la forme

$$\begin{aligned}\Omega = \quad & \xi\,\{p_{xx}[dy\,dz] + p_{xy}[dz\,dx] + p_{xz}[dx\,dy]\} \\ & + \eta\,\{p_{yx}[dy\,dz] + p_{yy}[dz\,dx] + p_{yz}[dx\,dy]\} \\ & + \zeta\,\{p_{zx}[dy\,dz] + p_{zy}[dz\,dx] + p_{zz}[dx\,dy]\}.\end{aligned}$$

Au *fond*, Ω *est la quantité sous le signe* $\int\int$ *dans l'intégrale qui exprime la somme des projections sur l'axe* (ξ, η, ζ) *des tensions élémentaires exercées sur une surface donnée.*

Si l'on regarde la direction (ξ, η, ζ) comme *fixe*, et qu'on prenne le covariant trilinéaire de l'expression Ω, on obtient

$$\begin{aligned}\Omega' = \Bigg[\quad & \xi\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\right) \\ & + \eta\left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z}\right) + \zeta\left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right)\Bigg]\,[dx\,dy\,dz],\end{aligned}$$

c'est-à-dire la projection sur l'axe considéré de la force de volume élémentaire équivalente aux tensions du milieu élastique.

Le tenseur Ω est dit *satisfaire à la loi de conservation* si sa dérivée Ω' est nulle, quelle que soit la direction fixe (ξ, η, ζ).

En particulier, si l'on a affaire à un fluide parfait à pression constante,

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p = \text{const.}, \qquad p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0,$$

le tenseur Ω se réduit, à un facteur constant près, à

$$\Omega = \xi\,[dy\,dz] + \eta\,[dz\,dx] + \zeta\,[dx\,dy],$$

et l'on a

$$\Omega' = 0.$$

Le tenseur précédent se déduit très facilement de la forme qui donne le volume élémentaire

$$\Pi = [dx\,dy\,dz];$$

c'est

$$\Omega = \xi \frac{\partial \Pi}{\partial [dx]} + \eta \frac{\partial \Pi}{\partial [dy]} + \zeta \frac{\partial \Pi}{\partial [dz]};$$

sous cette forme sa signification invariante (c'est-à-dire indépendante du choix des axes) est mise en évidence.

36. Revenons au tenseur gravitationnel G_{ik}. Nous regarderons ses composantes comme des coefficients entrant dans l'expression de la projection sur une direction fixe d'une tension appliquée à un élément à trois dimensions de l'univers à quatre dimensions. Soit un en point quelconque ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 les composantes d'une direction.

Considérons d'abord le tenseur obtenu en partant de l'élément de volume (à quatre dimensions) de l'univers

$$\Pi = [\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4],$$

élément qui a une signification invariante, et en formant

$$\begin{aligned}\Omega &= \xi_1 \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_1} + \xi_2 \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_2} + \xi_3 \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_3} + \xi_4 \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_4} \\ &= \xi_1 [\omega_2 \omega_3 \omega_4] + \xi_2 [\omega_3 \omega_1 \omega_4] + \xi_3 [\omega_1 \omega_2 \omega_4] - \xi_4 [\omega_1 \omega_2 \omega_3].\end{aligned}$$

Ce tenseur est analogue à la pression (constante) d'un fluide parfait.

Plus généralement nous considérerons le tenseur

$$\Omega = \xi_1 \Pi_1 + \xi_2 \Pi_2 + \xi_3 \Pi_3 + \xi_4 \Pi_4,$$

où Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 sont des éléments d'intégrales triples.

La *dérivée covariante* de ce tenseur s'obtiendra en prenant la dérivée ordinaire de Ω, *mais en supposant que les différentielles* $d\xi_i$ *satisfont aux relations* (8′) *qui expriment que la direction* (ξ) *reste parallèle à elle-même :*

$$(8') \qquad d\xi_i = -\varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=4} [\xi_k \omega_{ki}].$$

Dans ces conditions, on a

$$\Omega' = \sum_{i=1}^{i=4} \xi_i \left\{ \Pi'_i - \sum_{k=1}^{k=4} \varepsilon_k [\Pi_k \omega_{ki}] \right\}.$$

On pourrait dire que si Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 représentent les composantes d'une tension élastique s'exerçant sur un élément à trois dimensions de l'univers, les quantités

$$\Pi'_i - \sum_{k=1}^{k=4} \varepsilon_k [\Pi_k \omega_{ki}]$$

sont les composantes de la force s'exerçant sur un élément de volume à quatre dimensions de l'univers.

Le *tenseur* Ω *sera dit satisfaire à la loi de conservation si sa dérivée covariante* Ω' *est nulle*, c'est-à-dire si l'on a les relations

$$\Pi'_i = \sum_{k=1}^{k=4} \varepsilon_k [\Pi_k \omega_{ki}].$$

Il en est ainsi par exemple du tenseur particulier

$$\Omega = \xi_1 [\omega_2 \omega_3 \omega_4] + \xi_2 [\omega_3 \omega_1 \omega_4] + \xi_3 [\omega_1 \omega_2 \omega_4] - \xi_4 [\omega_1 \omega_2 \omega_3];$$

on a en effet, par exemple,

$$\begin{aligned}
\Pi'_1 = [\omega_2 \omega_3 \omega_4]' &= [\omega'_2 \omega_3 \omega_4] - [\omega_2 \omega'_3 \omega_4] + [\omega_2 \omega_3 \omega'_4] \\
&- \varepsilon_2 [\omega_1 \omega_{12} \omega_3 \omega_4] - \varepsilon_3 [\omega_2 \omega_1 \omega_{13} \omega_4] + \varepsilon_4 [\omega_2 \omega_3 \omega_1 \omega_{14}] \\
&= \varepsilon_2 [\omega_3 \omega_1 \omega_4 \omega_{21}] + \varepsilon_3 [\omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_{31}] - \varepsilon_4 [\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_{41}] \\
&- \varepsilon_2 [\Pi_2 \omega_{21}] \qquad - \varepsilon_3 [\Pi_3 \omega_{31}] \qquad + \varepsilon_4 [\Pi_4 \omega_{41}].
\end{aligned}$$

57. A chaque tenseur Ω peut être associée une forme quadratique en ω_i. Il suffit pour cela de remarquer que la forme

$$\varepsilon_1 \xi_1 \omega_1 + \varepsilon_2 \xi_2 \omega_2 + \varepsilon_3 \xi_3 \omega_3 + \varepsilon_4 \xi_4 \omega_4$$

est un covariant absolu de $\Sigma \varepsilon_i \omega_i^2$, que par suite les quatre expressions

$$[\omega_2 \omega_3 \omega_4], \quad [\omega_3 \omega_1 \omega_4], \quad [\omega_1 \omega_2 \omega_4], \quad -[\omega_1 \omega_2 \omega_3]$$

sont respectivement covariantes à

$$\varepsilon_1\omega_1, \quad \varepsilon_2\omega_2, \quad \varepsilon_3\omega_3, \quad \varepsilon_4\omega_4.$$

Le tenseur Ω est donc associé à une forme bilinéaire en ξ et ω, et par suite, *si cette forme bilinéaire est symétrique*, à une forme quadratique en ω_i. Le tenseur

$$\Omega = \xi_1[\omega_2\omega_3\omega_4] + \xi_2[\omega_3\omega_1\omega_4] + \xi_3[\omega_1\omega_2\omega_4] - \xi_4[\omega_1\omega_2\omega_3]$$

est ainsi associé à la forme bilinéaire $\Sigma\varepsilon_i\xi_i\omega_i$, et aussi à la forme fondamentale $\Sigma\varepsilon_i\omega_i^2$.

La condition de symétrie d'un tenseur est d'après cela facile à exprimer; le calcul facile donne tout simplement

$$\varepsilon_i[\omega_i\Pi_j] = \varepsilon_j[\omega_j\Pi_i].$$

38. D'après ce qui précède et en nous aidant de l'invariant absolu

$$A = \sum_{i,j}^{1,\ldots,4} \varepsilon_i\varepsilon_j A_{ij}^{ij},$$

il nous est bien facile de former un tenseur symétrique qui soit un covariant absolu. Partons en effet de la forme covariante

$$\begin{aligned}
\Pi = A[\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4] &= \sum_{i,j}^{1,\ldots,4} \varepsilon_i\varepsilon_j A_{ij}^{ij}[\omega_i\omega_j\omega_k\omega_l] \\
&= \sum \varepsilon_i\varepsilon_j[\Omega_{ij}\omega_k\omega_l] \\
&= \varepsilon_2\varepsilon_3[\Omega_{23}\omega_1\omega_4] + \varepsilon_3\varepsilon_1[\Omega_{31}\omega_2\omega_4] + \varepsilon_1\varepsilon_2[\Omega_{12}\omega_3\omega_4] \\
&\quad + \varepsilon_1\varepsilon_4[\Omega_{14}\omega_2\omega_3] + \varepsilon_2\varepsilon_4[\Omega_{24}\omega_3\omega_1] + \varepsilon_3\varepsilon_4[\Omega_{34}\omega_1\omega_2].
\end{aligned}$$

Nous obtenons un tenseur covariant absolu en remplaçant dans Π les expressions $[\omega_i\omega_j]$ par les valeurs $\xi_i\omega_j - \xi_j\omega_i$. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \varepsilon_3\varepsilon_4[\omega_2\Omega_{34}] + \varepsilon_4\varepsilon_2[\omega_3\Omega_{42}] + \varepsilon_2\varepsilon_3[\omega_4\Omega_{23}], \\
\Pi_2 &= \varepsilon_1\varepsilon_4[\omega_3\Omega_{14}] + \varepsilon_4\varepsilon_3[\omega_1\Omega_{43}] + \varepsilon_3\varepsilon_1[\omega_4\Omega_{31}], \\
\Pi_3 &= \varepsilon_2\varepsilon_4[\omega_1\Omega_{24}] + \varepsilon_4\varepsilon_1[\omega_2\Omega_{41}] + \varepsilon_1\varepsilon_2[\omega_4\Omega_{12}], \\
\Pi_4 &= -\varepsilon_2\varepsilon_3[\omega_1\Omega_{23}] - \varepsilon_3\varepsilon_1[\omega_2\Omega_{31}] - \varepsilon_1\varepsilon_2[\omega_3\Omega_{12}].
\end{aligned}$$

Ce tenseur est symétrique, car si l'on forme $\varepsilon_1[\omega_1\Pi_2] - \varepsilon_2[\omega_2\Pi_1]$, on obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon_1[\omega_1\Pi_2] - \varepsilon_2[\omega_2\Pi_1] &= \varepsilon_3[\omega_4(\omega_1\Omega_{13} + \omega_2\Omega_{23})] - \varepsilon_4[\omega_3(\omega_1\Omega_{14} + \omega_2\Omega_{24})] \\ &= \varepsilon_3[\omega_4\Sigma\omega_i\Omega_{i3}] - \varepsilon_4[\omega_3\Sigma\omega_i\Omega_{i4}]\end{aligned}$$

et les deux termes du second membre sont nuls en vertu des relations (12).

Ce tenseur satisfait à la loi de conservation. La vérification par le calcul est facile en se servant des formules (10) et (13).

On remarquera que les composantes du tenseur précédent sont obtenues sans faire intervenir, au moins formellement, les quantités A_{ij}^{kl}; la quantité A elle-même pourrait être laissée de côté dans la formation de l'invariant II en remarquant que les quantités $\varepsilon_i\varepsilon_j\Omega_{ij}$ se comportent comme les coordonnées plückériennes d'une droite, au même titre que les quantités $[\omega_i\omega_j]$; l'expression II représente alors le moment mutuel de ces deux droites.

39. La forme quadratique associée au tenseur qui vient d'être considéré doit nécessairement rentrer dans la formule (48). Un calcul facile donne par exemple

$$\begin{aligned}\Pi_1 = &\ (\varepsilon_2\varepsilon_3 A_{23}^{23} + \varepsilon_2\varepsilon_4 A_{24}^{24} + \varepsilon_3\varepsilon_4 A_{34}^{34})[\omega_2\omega_3\omega_4] \\ &- (\varepsilon_2\varepsilon_3 A_{31}^{32} + \varepsilon_2\varepsilon_4 A_{41}^{42})[\omega_3\omega_1\omega_4] \\ &- (\varepsilon_3\varepsilon_4 A_{43}^{41} + \varepsilon_3\varepsilon_2 A_{23}^{21})[\omega_1\omega_2\omega_4] \\ &+ (\varepsilon_4\varepsilon_2 A_{21}^{24} + \varepsilon_4\varepsilon_3 A_{31}^{34})[\omega_1\omega_2\omega_3].\end{aligned}$$

La forme quadratique cherchée est donc

$$\Phi = \varepsilon_1(\varepsilon_2\varepsilon_3 A_{23}^{23} + \varepsilon_2\varepsilon_4 A_{24}^{24} + \varepsilon_3\varepsilon_4 A_{34}^{34})\omega_1^2 + \ldots - 2(\varepsilon_3 A_{31}^{32} + \varepsilon_4 A_{41}^{42})\omega_1\omega_2 + \ldots.$$

Elle se déduit de l'expression (48) en prenant

$$\lambda = -1, \qquad \alpha = 1, \qquad \beta = 0.$$

40. Si nous voulons maintenant déterminer toutes les formes quadratiques rentrant dans la formule (48) et qui satisfont à la loi de conservation, nous remarquons d'abord que le coefficient β peut être quelconque; la loi de conservation est vérifiée si $\alpha + \lambda$ est nul. *Elle ne peut l'être dans aucun autre cas.* Sinon, en effet,

elle serait vérifiée pour $\lambda = \beta = 0$, $\alpha = 1$, c'est-à-dire pour le tenseur

$$\xi_1 A[\omega_2\omega_3\omega_4] + \xi_2 A[\omega_3\omega_1\omega_4] + \xi_3 A[\omega_1\omega_2\omega_4] - \xi_4 A[\omega_1\omega_2\omega_3].$$

On aurait donc

$$[A\omega_2\omega_3\omega_4]' = \varepsilon_2 A[\omega_3\omega_1\omega_4\omega_{21}] + \varepsilon_3 A[\omega_1\omega_2\omega_4\omega_{31}] - \varepsilon_4 A[\omega_1\omega_2\omega_3\omega_{41}].$$

Cette relation est vérifiée si A est constant; il en résulte donc qu'on devrait avoir

$$[dA\omega_2\omega_3\omega_4] = [dA\omega_3\omega_1\omega_4] = [dA\omega_1\omega_2\omega_4] = [dA\omega_1\omega_2\omega_3] = 0.$$

L'invariant A *serait donc une constante*, ce qui n'a pas lieu en général.

Les seuls tenseurs gravitationnels possibles qui satisfassent à la loi de conservation sont donc donnés par les formules

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \lambda\varepsilon_3\varepsilon_4[\omega_2\Omega_{34}] + \lambda\varepsilon_2\varepsilon_4[\omega_3\Omega_{42}] + \lambda\varepsilon_2\varepsilon_3[\omega_4\Omega_{23}] + \mu[\omega_2\omega_3\omega_4],\\
\Pi_2 &= \lambda\varepsilon_1\varepsilon_4[\omega_3\Omega_{14}] + \lambda\varepsilon_3\varepsilon_4[\omega_1\Omega_{43}] + \lambda\varepsilon_3\varepsilon_1[\omega_4\Omega_{31}] + \mu[\omega_3\omega_1\omega_4],\\
\Pi_3 &= \lambda\varepsilon_2\varepsilon_4[\omega_1\Omega_{24}] + \lambda\varepsilon_1\varepsilon_4[\omega_2\Omega_{41}] + \lambda\varepsilon_1\varepsilon_2[\omega_4\Omega_{12}] + \mu[\omega_1\omega_2\omega_4],\\
\Pi_4 &= -\lambda\varepsilon_2\varepsilon_3[\omega_1\Omega_{23}] - \lambda\varepsilon_3\varepsilon_1[\omega_2\Omega_{31}] - \lambda\varepsilon_1\varepsilon_2[\omega_3\Omega_{12}] - \mu[\omega_1\omega_2\omega_3],
\end{aligned}$$

ce qui correspond à la forme quadratique

$$\sum G_{ik}\,dx_i\,dx_k = -\lambda\sum_{i,j,k}\varepsilon_i A_{ij}^{ik}\,\omega_j\omega_k + (\lambda A + \mu)\sum_{i=1}^{i=4}\varepsilon_i\omega_i^2,$$

avec deux constantes arbitraires λ, μ.

On peut remarquer que, dans la théorie d'Einstein, la forme Π représente l'*élément de matière*, ou plutôt l'élément d'*action* (à quatre dimensions).

Relativité restreinte et Géométrie des systèmes ondulatoires;

PAR J. LE ROUX.

INTRODUCTION.

Le présent Mémoire est une contribution à l'examen critique de la théorie de la Relativité. Après M. Brillouin (1), M. Lecornu (2), avec M. Painlevé (3), et d'autres encore, j'examine quelques-unes des graves objections que soulèvent les constructions d'Einstein (4).

A la suite du résultat négatif de la célèbre expérience de Michelson et Morley, il sembla légitime d'admettre provisoirement, à titre de *postulat*, l'impossibilité de déceler le mouvement de la Terre par rapport à l'éther, et il pouvait être utile d'examiner toutes les conséquences qui découlent de cette hypothèse. C'est le point de vue adopté par Poincaré dans la *Dynamique de l'Électron* (5). Poincaré ne se dissimulait pas le caractère conventionnel et un peu arbitraire de la théorie de la Relativité. Au sujet des hypothèses de Lorentz, il faisait remarquer que, dans cette théorie, deux longueurs égales sont, par définition, deux longueurs que la lumière met le même temps à parcourir, et il ajoutait qu'il suffirait peut-être de renoncer à cette définition pour que la théorie de

(1) *Propos sceptiques au sujet du principe de relativité* (*Scientia*, 1913).

(2) *La Mécanique. Les Idées et les Faits*, 1918, p. 45-54. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 174, p. 337.

(3) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 2e semestre 1921.

(4) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 172, p. 1227 et 1467; t. 173, p. 1074 et 1343; t. 174, p. 924.

(5) *Rendiconti di Palermo*, t. XXI, 1906, p. 129.

Lorentz fût aussi complètement bouleversée que l'a été le système de Ptolémée par l'intervention de Copernic.

Ces réserves de Poincaré paraissent justifiées.

Il y a des inconvénients à abuser des principes. Quand on qualifie de principe une proposition scientifique, on n'ajoute rien à son degré de certitude ni à la précision des observations qu'elle résume.

Le principe de la relativité est très contestable. Il diffère des autres propositions fondamentales de la Science par son caractère négatif. La seule chose que l'on puisse affirmer à propos de l'expérience de Michelson, c'est que les phénomènes se passent autrement qu'on ne l'avait supposé. C'est donc dans une analyse plus exacte et plus complète de ces phénomènes qu'il faut chercher la raison du résultat obtenu. Déclarer d'avance qu'on ne devait rien trouver et qu'on ne trouvera jamais rien dans cet ordre d'idées est une affirmation arbitraire et une façon détournée d'escamoter la difficulté.

Le principe de la relativité restreinte tel qu'il a été énoncé par Einstein [1] peut se formuler à peu près de la manière suivante :

1° *Les lois de la Nature, rapportées à un système de référence auquel s'appliquent les lois de la Mécanique newtonienne, conservent la même forme d'expression dans tout autre système qui se déduit du premier par un mouvement de translation uniforme.*

2° *La vitesse de la lumière est une constante universelle, indépendante de la vitesse de translation uniforme du foyer.*

Quand on examine l'application qui est faite de ce principe, on constate dès le début l'une de ces contradictions et de ces équivoques qui se répètent fréquemment dans les travaux publiés sur la relativité. Après avoir parlé, dans l'énoncé, d'une translation uniforme, on remplace dans l'application cette translation par une transformation de Lorentz. Ce n'est pas la même chose.

---

[1] V. Lorentz, Einstein, Minkowski, *Das Relativitäts Prinzip*. Eine sammlung von Abhandlungen (1920). — Weyl, *Raum, Zeit, Materie* (1921). — Eddington, *Espace, Temps, Gravitation* (Paris, Hermann, 1921). — Becquerel, *Le principe de Relativité et la Théorie de la Gravitation* (Paris, 1922).

On s'aperçoit d'ailleurs que les seules lois naturelles considérées par Einstein dans la relativité restreinte sont celles qui se rapportent à l'équation aux dérivées partielles de la propagation des ondes dans un milieu isotrope quand la vitesse de propagation est égale à celle de la lumière.

Les phénomènes auxquels pourrait s'appliquer la théorie de la relativité restreinte sont en effet ceux dont l'étude se ramène à cette équation. C'est à tort qu'on a voulu les appliquer à tous les phénomènes sans exception.

Les faits extraordinaires, d'apparence paradoxale, qui ont été déduits de la théorie d'Einstein reposent sur cette extension abusive, et principalement sur une confusion entre le temps local de Lorentz et le temps vulgaire.

Comme ce sont deux choses différentes, on n'a pas le droit d'étendre à l'une ce qui n'est vrai que pour l'autre. La même observation s'applique à la vitesse. On prétend démontrer qu'aucune vitesse ne peut dépasser celle de la lumière. Cette proposition est vraie pour la pseudo-vitesse au sens d'Einstein, elle ne s'applique pas à la vitesse au sens ordinaire du mot; il y a là encore deux choses différentes désignées par le même nom. On pourrait multiplier les exemples de confusions de ce genre. Dans la plupart des cas, les mots employés ont un certain sens dans les raisonnements et les calculs, et on leur donne ensuite un sens différent dans l'application physique.

Le principe de relativité restreinte, au sens d'Einstein, paraît complètement inutile. On en a déduit beaucoup d'absurdités. Les faits positifs auxquels il s'applique peuvent s'obtenir beaucoup plus simplement par une étude analytique régulière de l'équation de la propagation des ondes dans un milieu isotrope. On pourrait même soutenir que l'attirail de règles et de chronomètres idéaux qui s'introduit dans les raisonnements d'Einstein constitue un procédé bizarre pour représenter certaines intégrales de l'équation considérée.

L'analyse n'a nul besoin de cet artifice un peu grossier. La détermination des intégrales à pôle mobile fournit une représentation très nette et très simple de la transformation de Lorentz et de la

contraction apparente de Fitz-Gérald. Ces intégrales conduisent à la considération d'ondes d'interférence ellipsoïdales, aplaties comme les électrons de Lorentz.

Pour un observateur en mouvement dans un milieu isotrope vibrant, les phénomènes sont semblables à ceux qui seraient observés dans un milieu en repos, sauf le remplacement de l'onde sphérique de progression par l'onde d'interférence ellipsoïdale aplatie.

C'est l'onde d'interférence qui remplace l'onde de progression dans les phénomènes de réflexion. Dans la propagation d'un train d'ondes planes rapporté à un système de référence mobile, le rayon n'est pas perpendiculaire au front d'onde, il est parallèle au diamètre conjugué de ce front dans l'ellipsoïde d'interférence. C'est encore l'ellipsoïde d'interférence qui intervient comme élément directeur dans la détermination des nappes d'interférence de deux trains d'ondes de même période. Enfin, si l'on mesure les distances en rayons de l'ellipsoïde, les formules analytiques conservent exactement la même forme pour les systèmes mobiles que pour les systèmes en repos.

Ces résultats étant de simples conséquences de l'équation de la propagation des ondes sont applicables dans la mesure où l'équation considérée représente exactement les phénomènes observés. Ils s'étendent aussi bien au son qu'à la lumière. Ils cessent d'être applicables dès que le mouvement de la source produit sur le milieu une action dynamique détruisant l'isotropie.

Les calculs auxquels conduit cette étude sont exactement les mêmes que ceux de la théorie de la relativité restreinte, mais on n'a besoin d'aucun principe nouveau ni même d'aucune hypothèse nouvelle. Si l'on ne perd pas de vue le point de départ, on n'éprouve aucune tentation d'étendre les résultats obtenus à des phénomènes pour lesquels ils ne sont pas démontrés. L'analyse fait voir nettement qu'on n'a pas le droit de déduire de l'expérience de Michelson l'égalité des vitesses relatives de propagation dans tous les sens, et met ainsi en évidence l'erreur de raisonnement qui a été l'origine de la théorie d'Einstein.

Je ne m'occupe pas dans ce premier travail de la théorie de la relativité généralisée qui fera l'objet d'un autre Mémoire.

CHAPITRE I.

LE TEMPS.

1. Pour discuter valablement en matière scientifique, il est nécessaire d'être d'accord sur le sens des mots. Sans cette précaution élémentaire, toute discussion est vaine.

Les symboles du langage n'ont par eux-mêmes aucune signification et l'on n'est généralement pas très sûr que les mêmes formules représentent les mêmes idées chez deux personnes différentes. Les définitions verbales peuvent évidemment déterminer le sens de certains mots, mais c'est toujours en les ramenant à d'autres termes dont la signification est supposée antérieurement connue. En remontant ainsi de proche en proche, on arrive nécessairement à un ensemble de symboles fondamentaux dont la signification ne peut pas être définie par d'autres mots. Nous reconnaissons cependant que l'accord existe sur le sens de ces symboles en constatant qu'on les applique de la même manière aux mêmes faits d'expérience.

Il est d'ailleurs évident que nous avons appris au début à nous servir du langage en attachant constamment le même mot à la considération d'objets ou de faits similaires. L'association constante du signe et de la chose fait que l'audition du signe verbal rappelle à la mémoire l'image de faits expérimentaux antérieurement perçus.

Les définitions initiales se réduisent donc essentiellement à la constatation du rapport qui existe entre les mots fondamentaux et les faits d'expérience commune. D'où il résulte que la méthode la plus sûre, pour reconnaître si l'on est d'accord sur le sens des termes essentiels d'une théorie, consiste à remonter à ce fonds commun d'observations expérimentales.

Certains logiciens, se plaçant au point de vue de la logique formelle, considèrent les mots comme de simples symboles préalablement vidés de tout sens concret. Le raisonnement consiste alors à combiner ces symboles suivant des règles déterminées, comme

des symboles algébriques. Les questions de forme ont leur utilité, comme les règles du calcul algébrique, mais elles ne constituent que l'une des faces du problème. En matière scientifique, il faut toujours partir de l'expérience et y revenir.

Un calcul algébrique peut être exact et conduire néanmoins à des conclusions fausses. Tel sera le cas, par exemple, si l'on désigne par le même symbole deux quantités différentes : erreur assez commune chez des débutants.

C'est précisément l'erreur fondamentale de la théorie d'Einstein. La confrontation avec l'expérience peut seule la révéler.

2. *Le temps dans la Mécanique classique.* — Dans son exposé des principes de la Mécanique, H. Hertz [1] commence par un ensemble de considérations qu'il suppose étrangères à toute expérience et basées uniquement sur les lois de l'intuition interne au sens de Kante. Il y a là évidemment une grande part d'illusion, puisque les mots n'acquièrent de sens transmissible que par leur correspondance avec les faits expérimentaux. La Science n'a pas à se préoccuper des idées de Kant sur le temps et l'espace, auxquelles certains philosophes accordent peut-être beaucoup trop d'importance.

Les considérations métaphysiques n'interviennent ni dans les calculs ni dans l'interprétation des résultats. Ce qu'il importe de connaître, c'est le procédé pratique, effectivement employé pour attacher à la considération du temps une valeur numérique précise sur laquelle tous les observateurs soient d'accord.

Les chronomètres ne sont que des instruments auxiliaires de comparaison dont les indications sont valables seulement pour une durée limitée. On règle les chronomètres d'après les observations astronomiques. La détermination pratique du nombre t revient en définitive à une mesure d'angle horaire. L'observation du mouvement diurne nous fournit donc une sorte de chronomètre commun valable pour tous les observateurs terrestres. Il est prématuré de nous occuper des autres.

3. *L'isochronisme et la simultanéité.* — La correspondance entre

---

[1] *Die Prinzipien der Mechanik*, 1894, p. 53.

le temps et un phénomène physique quelconque a pour base la notion de simultanéité. L'analyse de cette notion ne présente aucune difficulté quand il s'agit de phénomènes se produisant à proximité de l'observateur. Pour les phénomènes qui se produisent à distance, la question nécessite un certain examen, car c'est à ce sujet que nous observons la première divergence entre le langage relativiste et le langage vulgaire. Tout le monde sait que lorsqu'on tire un coup de canon, un observateur éloigné remarque un intervalle de temps très sensible entre la vue de l'éclair et l'audition du son. Ces deux phénomènes sont pourtant simultanés pour un observateur voisin. Il y a donc lieu de distinguer pour deux phénomènes la simultanéité de production et la simultanéité de perception, quand il s'agit d'observateurs éloignés. Il reste à examiner comment nous établissons la correspondance de simultanéité de production, au sens ordinaire du mot, entre des phénomènes qui se passent en des lieux différents.

Un phénomène se passe à New-York (City Hall), le 7 octobre 1921, à $8^h\ 9^m\ 23^s$, temps solaire moyen du méridien du lieu; quelle est *au même moment* l'heure de l'Observatoire de Paris ? L'angle dièdre compris entre les plans méridiens des deux lieux est la différence de longitude. Elle est de $76^\circ\ 20'\ 38''$, correspondant à une différence en temps de $5^h\ 5^m\ 23^s$. L'heure du méridien de Paris qui correspond à l'événement considéré observé à New-York est $13^h\ 14^m\ 46^s$.

La détermination de cette correspondance nécessite simplement la mesure de la différence de longitude, c'est-à-dire d'un angle dièdre. Une fois qu'on a déterminé les éléments nécessaires, on peut donc reconnaître la correspondance de simultanéité entre des événements qui se passent en des lieux différents, et cela avec une précision comparable à celle des mesures physiques les plus délicates.

Il est évident toutefois que la détermination de la simultanéité ou de l'ordre de succession, dans la production des phénomènes, nécessite la connaissance d'un ensemble d'éléments qui fait quelquefois défaut. L'ordre de perception peut différer d'un observateur à un autre et différer par conséquent de l'ordre de produc-

tion. Tout cela est bien connu. Mais l'incertitude qui règne sur l'époque règne également sur la position, et elle est du même ordre. Le fait qu'on ignore une date n'est pas un motif suffisant pour déclarer que la notion de date n'existe pas. Toutes les prédictions de phénomènes astronomiques se résolvent par des questions de simultanéité.

4. *Correspondance des mouvements.* — Si l'on veut rattacher la détermination pratique du temps à une notion plus générale, on peut remarquer que la correspondance de simultanéité entre les positions d'un mobile, d'une part, et les indications d'un chronomètre, d'autre part, se ramène à une correspondance entre deux mouvements.

L'un d'entre eux est un *mouvement type* auquel on compare tous les autres. Supposons que la position du mobile qui définit le mouvement type soit déterminée à l'aide d'un paramètre t. On pourra évidemment déterminer la correspondance de simultanéité en employant le même paramètre pour l'étude des autres mouvements.

5. *Le temps dans l'expression des lois physiques.* — Lorsqu'on n'a en vue que cette simple correspondance de simultanéité, il est évident qu'on dispose d'une grande latitude dans le choix du paramètre. On pourrait par exemple employer indifféremment l'angle horaire du Soleil vrai ou celui du Soleil moyen. Il n'en est plus de même lorsque le temps doit intervenir dans l'énoncé d'une loi physique. Une fonction linéaire de l'angle horaire du Soleil moyen n'est pas linéaire par rapport à l'angle horaire du Soleil vrai. La notion de mouvement uniforme qui intervient dans l'énoncé du principe d'inertie suppose donc une graduation déterminée du temps. L'étude des conséquences de ce principe doit indiquer si l'on peut prendre avec une précision suffisante l'angle horaire du Soleil moyen comme graduation du temps ou s'il y a lieu d'y apporter quelques corrections.

A ce sujet, on peut faire une remarque : si l'on prenait l'angle horaire du Soleil vrai pour graduer le temps, il faudrait remplacer l'énoncé ordinaire du principe de l'inertie par un autre énoncé

d'après lequel la vitesse d'un point mobile, soustrait à toute action extérieure, serait une fonction variable du temps. Les lois de la Mécanique ne sont indépendantes du temps que pour certains choix du paramètre.

6. *Isochronisme dans la théorie d'Einstein.* — Dans la théorie d'Einstein la définition du temps repose sur d'autres considérations. Chaque observateur est supposé muni d'un chronomètre *idéal* auquel il rapporte les phénomènes de son entourage. La définition de la correspondance de simultanéité ne présente de difficulté que pour les observations qui s'effectuent en des lieux différents. Einstein imagine le procédé suivant : Deux observateurs A et B sont entraînés dans le mouvement de translation d'un système d'axes par rapport auquel on puisse appliquer les principes de la Mécanique de Newton. A un instant t_A marqué par le chronomètre de A, on lance de ce point un signal lumineux qui parvient en B à l'époque t_B marqué par le chronomètre de B. Il s'y réfléchit sur un miroir et revient en A à l'époque t'_A. Les deux chronomètres sont dits isochrones *par définition*, si l'on a

$$t_B - t_A = t'_A - t_B, \qquad \text{d'où} \qquad t_B = \frac{t_A + t'_A}{2}.$$

On admet en outre que le rapport $\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A}$ est une constante universelle V, représentant la vitesse de la lumière dans le vide.

L'heure d'un phénomène dans le système de référence considéré est l'heure marquée par un chronomètre idéal situé au lieu où se produit le phénomène. Deux phénomènes sont dits *simultanés* dans le système S s'ils correspondent à des indications identiques des chronomètres placés dans les lieux où ils se produisent. Après avoir ainsi défini la simultanéité, Einstein fait observer que deux chronomètres qui paraissent isochrones dans un système de référence ne le sont plus dans un autre système S′ en mouvement de translation uniforme par rapport au premier, et par conséquent les conditions de simultanéité diffèrent d'un système à l'autre.

Supposons en effet une barre AB qui se déplace uniformément

par rapport à S avec une vitesse v dans sa propre direction. A l'époque t_A, on lance un signal lumineux qui parvient en B à l'époque t_B et, après réflexion, retourne en A à l'époque t'_A. Les heures t_A, t_B, t'_A étant marquées par les chronomètres du système S, on a

$$t_A - t_B = \frac{AB}{V - v}, \qquad t'_A - t_B = \frac{AB}{V + v}.$$

En vertu du déplacement de la barre, ils ne satisfont pas à la condition

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Mais, si l'on considère le système S′ qui participe au mouvement de translation de la barre par rapport au système S, les conditions de l'expérience devront être exactement les mêmes que si le système S′ était au repos. Soient donc θ_A, θ_B, θ'_A les temps analogues à t_A, t_B, t'_A, mais marqués par les chronomètres d'observateurs liés au système S′. La condition d'isochronisme dans le système S′ devra s'exprimer par l'égalité

$$\theta_B - \theta_A = \theta'_A - \theta_B.$$

De plus, la mesure de la longueur AB dans le système S′ devra également satisfaire à la condition

$$\frac{2\,AB}{\theta'_A - \theta_A} = V.$$

V ayant la même valeur *numérique* pour S et pour S′.

Les nombres θ sont donc différents du nombre t, et des valeurs égales de θ ne correspondent pas à des valeurs égales de t.

La définition de l'isochronisme donnée par Einstein est inspirée par l'idée que la vitesse de la lumière doit être une constante universelle, la même dans toutes les directions et la même aussi pour les systèmes S et S′ qui se déduisent l'un de l'autre par un mouvement de translation uniforme.

Des conditions qu'il s'est imposées, Einstein déduit les relations qui doivent exister entre les coordonnées et les temps, envisagés

dans les deux systèmes, pour que ces conditions soient vérifiées. Il obtient ainsi les formules de transformation de Lorentz.

Supposons, pour simplifier les calculs, que les axes Ox et $O'x'$ des deux systèmes coïncident, l'origine O' du système S' décrivant Ox avec la vitesse v. Soient x, y, z, t les coordonnées et le temps du premier système, x', y', z', t' les quantités correspondantes du second; soit en outre c la vitesse de la lumière. Les formules de transformation de Lorentz sont, dans cette hypothèse,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\beta}(x - vt),\\ y' &= y,\\ z' &= z,\\ t' &= \frac{1}{\beta}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right). \end{aligned}\right.$$

On a posé

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Je m'abstiens de reproduire la démonstration d'Einstein. Nous retrouverons plus loin les mêmes résultats par une autre méthode et avec une interprétation précise du paramètre t'.

On sait que les formules de Lorentz sont réversibles. Si l'on résout les équations (1) par rapport à x, y, z, t, on a

$$x = \frac{1}{\beta}(x' + vt'), \qquad t = \frac{1}{\beta}\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right),$$
$$y = y', \qquad z = z'.$$

7. *Comparaison de la définition d'Einstein avec les déterminations expérimentales.* — La définition de l'isochronisme adoptée par Einstein et la condition posée par lui de la conservation de la *valeur numérique* de la vitesse de la lumière entraînent donc cette conséquence nécessaire : le temps n'est pas un élément indépendant du système de référence; il n'a pas, relativement aux changements de coordonnées, le caractère invariant qu'on lui attribue généralement.

Nous nous trouvons, par suite, en face de deux notions diffé-

rentes : celle du temps vulgaire, commun à tous les observateurs quel que soit le déplacement relatif des uns par rapport aux autres, et celle du temps d'Einstein, qui varie avec le système de référence. On est porté à se demander laquelle de ces notions est la plus correcte. Si l'on remonte aux conditions expérimentales réelles ou supposées, on reconnaît immédiatement qu'il s'agit de deux choses différentes et non pas de deux notions différentes d'une même chose. Nous avons fait voir en effet que le temps vulgaire, temps sidéral ou temps solaire moyen, est déterminé par l'observation d'une sorte de chronomètre universel, le même pour tous les observateurs. Dans l'hypothèse d'Einstein, au contraire, chaque observateur a un chronomètre *idéal* et la correspondance d'isochronisme entre deux chronomètres différents se détermine uniquement par la méthode des signaux lumineux. Les conditions ne sont pas les mêmes, et il n'y a aucune raison d'admettre que les nombres déterminés par les deux méthodes soient identiques.

Il est intéressant de rapprocher de cette discussion une argumentation de Pascal à propos des diverses définitions du temps.

En la répétant presque textuellement, nous pouvons dire : « Ensuite de cette définition, il y aura deux choses qu'on appellera du nom de *temps :* l'une est celle que tout le monde entend naturellement par ce mot, et que tous ceux qui parlent notre langue nomment par ce terme; l'autre sera le paramètre t d'Einstein, et que les relativistes désignent aussi sous ce nom, suivant une nouvelle convention. Il faudra donc éviter les équivoques et ne pas confondre les conséquences. Car il ne s'ensuivra pas de là que la chose qu'on entend naturellement par le mot *temps*, soit en effet le paramètre d'Einstein. Il a été libre de nommer ces deux choses de même, mais il ne le sera pas de les faire convenir de nature aussi bien que de nom. »

Une grande partie de la théorie de la relativité restreinte repose sur une équivoque constante qui consiste à appliquer au temps solaire moyen des résultats qui sont applicables seulement au pseudo-temps d'Einstein.

8. *Critique de la définition de l'isochronisme.* — La notion d'iso-

chronisme et de simultanéité étant l'origine de toute l'équivoque relativiste, il est indispensable d'insister sur le caractère artificiel et arbitraire des définitions d'Einstein. Il y a des notions que l'on altère en leur appliquant les règles des définitions logiques. Ce sont celles dont l'idée résulte de l'observation concordante d'une grande multiplicité de faits naturels, et qui finissent par nous être tellement familières que nous n'avons plus le souvenir de les avoir acquises. Telle est celle de la simultanéité qui se détermine pratiquement par un ensemble d'observations de formes diverses. La méthode supposée par Einstein n'est jamais appliquée dans les conditions qu'il indique. Les signaux télégraphiques peuvent être utilisés évidemment pour le problème des longitudes, mais seulement dans la mesure où les erreurs qui pourraient en résulter sont inférieures aux erreurs de mesures provenant de l'application des autres méthodes. Les conclusions qu'en tire Einstein sont basées précisément sur la considération de quantités dont l'ordre de petitesse est celui de ces erreurs. Le problème des longitudes pourrait se poser pour une sphère de dimensions beaucoup plus grandes que celles de la Terre, pour laquelle, par conséquent, les résultats fournis par la méthode des signaux lumineux devraient subir une correction très appréciable. Les chronomètres idéaux d'Einstein n'ont aucune existence réelle. Comme ce sont des produits de pure imagination, l'auteur a pu les doter de toutes les qualités qu'il lui a plu, car il en disposait comme de son ouvrage.

Quand on reste en un même lieu, on peut toujours remplacer le temps solaire moyen par un nombre proportionnel, comme par exemple le temps sidéral, et la définition d'Einstein ne présente aucun inconvénient. Il n'en est plus de même dans les déplacements. La formule de transformation de Lorentz suppose une loi de décalage des indications fournies par les chronomètres mobiles. Il est évident qu'il faut une robuste crédulité pour admettre que la marche des chronomètres soit régie par cette loi. Nous verrons d'ailleurs que le décalage en question se présente dans l'étude des systèmes ondulatoires avec une signification toute différente de celle que suppose Einstein.

Il y a une autre critique à formuler à propos de la confusion

établie entre le pseudo-temps d'Einstein et le temps ordinaire. Elle ne concerne pas seulement la différence des valeurs numériques, ce qui serait une question secondaire : elle se rapporte au caractère même de la notion de temps. Les astronomes prennent les précautions les plus minutieuses pour rendre rigoureusement comparables entre elles les observations chronométriques des différents observatoires. Les nombres directement mesurés subissent des corrections diverses destinées à éliminer les circonstances purement locales de l'observation. De cette façon les nombres calculés présentent à l'égard des changements de coordonnées ou d'observateur un véritable caractère invariant. Or, c'est précisément à ce caractère invariant qu'il faut attribuer le rôle spécial du temps en Mécanique. Une durée est une sorte d'invariant intégral. Dans l'expression du théorème des forces vives, on considère le rapport de deux invariants.

Le pseudo-temps d'Einstein ne présentant pas le même caractère, il est abusif de lui conserver le même rôle dans l'expression des lois de la Mécanique. Il y a une conséquence plus grave encore : d'après le raisonnement d'Einstein la constance de la vitesse de la lumière ne serait pas une loi naturelle, une relation entre des faits observés. Elle résulterait simplement de la *convention* arbitraire d'après laquelle les observateurs règlent la correspondance de leurs chronomètres.

9. *Le temps vulgaire et l'intervalle relativiste.* — Dans la théorie de la relativité, l'élément qui jouit des mêmes propriétés d'invariance que le temps ordinaire est la quantité désignée sous le nom d'*intervalle* ou *temps propre* de Minkowski.

L'intervalle élémentaire $d\sigma$ est défini par l'égalité

$$d\sigma^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Il reste inaltéré par la transformation de Lorentz. Dans le mouvement d'un point matériel, l'intégrale $\int d\sigma$, évaluée entre deux positions ou deux états du mobile est également indépendante du

système de référence. Cette propriété correspond au caractère invariant de la durée dans la Mécanique classique.

Si l'on établit entre deux mouvements une correspondance exprimée par une relation entre les intervalles, cette correspondance subsistera donc quand on effectuera un changement de système de référence représenté par une transformation de Lorentz.

Supposons que l'on prenne comme mouvement type un mouvement observable dans les différents systèmes, et que la correspondance de simultanéité soit exprimée par une relation entre les intervalles des divers points mobiles et l'intervalle correspondant du mouvement type : on se trouvera dans un cas analogue à celui de la Mécanique classique. Dans la théorie de la relativité généralisée, c'est en effet l'intervalle qui joue le rôle du temps vulgaire, mais sans en porter le nom.

Les conclusions d'Einstein, en ce qui concerne le temps, ne résultent pas du principe de relativité; elles découlent de la convention spéciale qui sert de base à sa définition de l'isochronisme, et nous avons vu que cette convention est en contradiction avec la détermination de la simultanéité au sens ordinaire du mot. Il aurait pu supposer que les observateurs se déplacent dans un espace jalonné de chronomètres et que chacun d'eux, au lieu de consulter son propre chronomètre idéal, observe l'indication du chronomètre auprès duquel il passe. Ces indications étant indépendantes de la vitesse de l'observateur par rapport à l'espace jalonné, il est évident que les conclusions d'Einstein auraient dû être différentes. Cette hypothèse, sous son apparence paradoxale, est peut-être plus près de la réalité que celle d'Einstein, car les phénomènes astronomiques fournissent précisément une sorte de jalonnage chronométrique de l'espace. On peut rattacher à cette conception la méthode employée en mer pour la détermination des longitudes par l'observation des distances lunaires.

Nous allons voir cependant que l'étude des phénomènes d'ondulations conduit à l'introduction d'un paramètre analogue au temps local de Lorentz et jouissant des mêmes propriétés au point de vue des transformations. Mais ce paramètre n'est pas le temps solaire moyen.

CHAPITRE II.

LES ONDES A PÔLE MOBILE.

10. L'équation de la propagation des ondes dans un milieu homogène et isotrope se ramène, en coordonnées rectangulaires, à la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \tag{3}$$

La constante c est la vitesse de propagation, qui dépend de la constitution du milieu, la variable t est censée désigner le temps ordinaire.

Cette équation admet des intégrales à pôle fixe que l'on obtient facilement par la méthode de Poisson. J'en rappelle sommairement le calcul.

Cherchons, par exemple, les intégrales admettant un pôle fixe à l'origine des coordonnées. Nous posons

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et nous sommes conduits à étudier les intégrales qui dépendent seulement de r et de t. Elles satisfont à la célèbre équation d'Euler et de Poisson dont M. Darboux a fait une étude approfondie :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = 0. \tag{4}$$

Un calcul facile la ramène à la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rV) = 0;$$

d'où

$$rV = f(r - ct) + \varphi(r + ct),$$

f et φ désignant des fonctions arbitraires des variables caractéristiques $r - ct$ et $r + ct$.

On a donc

$$V = \frac{f(r+ct) + \varphi(r-ct)}{r}.$$

Cette intégrale admet les singularités caractéristiques définies par la forme des fonctions f et φ et, en outre, le pôle fixe $r = 0$. Cette dernière singularité peut disparaître pour certaines combinaisons des fonctions arbitraires. Si l'on a, en particulier,

$$f(r+ct) = \frac{1}{r+ct}, \qquad \varphi(r-ct) = \frac{1}{r-ct},$$

l'intégrale V se ramène à l'intégrale fondamentale [1]

$$\frac{1}{r^2 - c^2 t^2}.$$

11. Considérons maintenant le cas d'un pôle qui se déplace le long de l'axe Ox avec la vitesse uniforme v. Pour ramener le problème de l'onde à pôle mobile à celui de l'onde à pôle fixe, il est naturel d'effectuer un changement de coordonnées en posant $x = x_1 + vt$.

L'équation aux dérivées partielles (3) devient alors

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - 2v\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right).$$

L'équation (5) contient un terme en $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial t}$. On le fera disparaître par une nouvelle transformation effectuée sur la variable t. Supposant $v^2 < c^2$, nous avons

$$(6) \qquad \theta = \beta t - \frac{v x_1}{c^2 \beta},$$

β désignant le facteur de Lorentz, $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Prenant v comme nouvelle variable au lieu de t, nous ramenons

---

(1) HADAMARD, *Sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles* (*Annales de l'École Normale*, 1904 et 1905).

l'équation (5) à la forme symétrique

$$(7)\qquad \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=0.$$

Par une dernière transformation

$$(8)\qquad x'=\frac{x_1}{\beta}=\frac{x-vt}{\beta},$$

nous retrouvons enfin la forme de l'équation primitive

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=0.$$

Il est visible que les formules (6) et (8) définissent la transformation de Lorentz. La chose est évidente pour la formule (8). Dans la formule (6), quand on remplace x_1 par sa valeur $x_1=x-vt$, on trouve

$$(10)\qquad \theta=\beta t-\frac{v(x-vt)}{c^2\beta}=\frac{1}{\beta}\left(t-\frac{vx}{c^2}\right).$$

Intégrons l'équation (9) par la méthode de Poisson en posant

$$r'=\sqrt{x'^2+y^2+z^2};$$

nous avons la forme générale de l'intégrale cherchée, avec deux fonctions arbitraires

$$(11)\qquad V=\frac{f(r'-c\theta)+\varphi(r'+c\theta)}{r'}.$$

12. *Module et paramètre de rayonnement.* — Le dénominateur r', exprimé en fonction des variables primitives, prend la forme

$$r'=\sqrt{\frac{(x-vt)^2}{\beta^2}+y^2+z^2}.$$

Nous donnerons à cette quantité le nom de *module* de l'intégrale V.

Les points qui correspondent à une même valeur du module dans le système mobile sont situés sur la surface d'un ellipsoïde de révolution ayant pour axe Ox et pour centre le pôle mobile.

Cette surface est aplatie proportionnellement au facteur de contraction de Lorentz.

Les arguments caractéristiques $v' \pm c\,\theta$, dont dépendent les fonctions arbitraires, correspondent à deux séries d'ondes; les ondes positives qui se dilatent concentriquement autour du pôle et les ondes négatives qui se contractent au contraire en se rapprochant de ce point. Pour les unes, le pôle constitue un foyer d'émission et, pour les autres, un foyer d'absorption.

Dans le mouvement de l'onde, la variation du module est toujours égale à celle de l'argument $c\theta$, en valeur absolue. Nous poserons dans la suite $c\theta = u'$ et nous donnerons à cette quantité le nom de *paramètre de rayonnement.*

Cette désignation semble traduire assez exactement le rôle physique de la variable u'.

L'expression du paramètre de rayonnement ne dépend que de la constante c et de la vitesse d'entraînement du système mobile, cette vitesse étant considérée en grandeur et en direction.

Nous désignerons de même par $u = ct$ le paramètre de rayonnement du système d'axes fixes.

13. *Ondes ellipsoïdales d'interférence.* — Considérons le cas d'un *doublet* constitué par la juxtaposition d'un foyer d'émission et d'un foyer d'absorption correspondant à des ondes périodiques égales.

Soit, par exemple,

$$f = \mathrm{A} \sin \frac{2\pi(r' - u' + \alpha)}{\lambda}, \qquad \varphi = \mathrm{A} \sin \frac{2\pi(r' + u' + \beta)}{\lambda},$$

A, α, β, λ désignant des constantes.

La valeur correspondante de V prend la forme suivante :

$$\mathrm{V} = \frac{2\mathrm{A}}{r'} \sin 2\pi \frac{r' + \dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\lambda} \cos 2\pi \frac{\left(u' + \dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)}{\lambda}. \tag{12}$$

Cette forme met en évidence une série de surfaces d'interférence stationnaires dans le système mobile.

La fonction V s'annule quel que soit le paramètre de rayonnement aux points où le module vérifie la condition

$$r' = n\frac{\lambda}{2} \qquad (n \text{ entier}).$$

En ces points il y a interférence.

Nous donnerons pour cette raison le nom d'*ondes d'interférence* aux ondes ellipsoïdales qui correspondent aux valeurs constantes du module.

Si l'on considère un système d'axes mobiles de mêmes directions que les axes fixes et ayant pour origine le pôle de l'onde, la surface de l'onde d'interférence sera représentée par l'équation

$$\frac{x_1^2}{\beta^2} + y_1^2 + z_1^2 = u^2 = \text{const.}$$

14. *Signification physique de la transformation de Lorentz.* — Nous appellerons *ellipsoïde d'interférence du milieu mobile*, la surface particulière correspondant à $u = 1$.

En vertu de la contraction de l'onde d'interférence dans le sens du déplacement du pôle, les longueurs d'onde d'interférence varient avec la direction. Mais si nous évaluons les distances en rayons de l'ellipsoïde, ou plus exactement si nous les rapportons, dans chaque direction, à une unité qui varie proportionnellement au rayon de l'ellipsoïde d'interférence correspondant à cette direction, les axes de l'ellipsoïde seront mesurés par des nombres égaux. Ce changement d'unité équivaut à la transformation

$$\frac{x_1}{\beta} = x', \qquad y_1 = y', \qquad z_1 = z'.$$

Nous avons maintenant une interprétation physique très simple et très précise des transformations de Lorentz.

Désignons respectivement par u et u' les paramètres de rayonnement pour les ondes attachées aux deux systèmes de référence, et posons $\frac{v}{c} = \alpha$. Les formules de Lorentz prennent alors la forme

suivante :

$$x' = \frac{1}{\beta}(x - \alpha u), \qquad u' = \frac{1}{\beta}(u - \alpha x),$$
$$y' = y, \qquad z' = z, \qquad \beta = \sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Dans chaque système, les distances rectilignes sont mesurées en rayons d'ellipsoïde d'interférence relatif au système considéré. Nous donnerons à ces valeurs des coordonnées le nom de *variables de Lorentz.*

15. *Déphasage* (1) *du paramètre de rayonnement.* — Les valeurs du paramètre de rayonnement sont simplement proportionnelles au temps dans le système fixe. Dans le système mobile ces valeurs se propagent ou se déphasent par ondes planes. En exprimant u' en fonction de t et de x, on a

$$u' = \frac{c}{\beta}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right).$$

La vitesse de déphasage est donc égale à $\frac{c^2}{v}$.

Dans le système de variables x_1, y_1, z, t, relatif à des axes entraînés dans le mouvement de translation du pôle mobile, mais où les longueurs conservent leur signification ordinaire, on a

$$u' = \frac{c}{\beta}\left(\beta^2 t - \frac{vx_1}{c^2}\right).$$

La vitesse de déphasage est égale à $\frac{c^2\beta^2}{v} = \frac{c^2}{v} - v$, résultat qui concorde naturellement avec le premier. Enfin, si l'on exprime u' à l'aide des variables t et x' on a

$$u' = c\left(\beta t - \frac{vx'}{c^2}\right).$$

La vitesse de déphasage mesurée en longueurs d'onde d'inter-

(1) Expression employée par M. Varcollier, *Les déplacements dans les champs de vecteurs et la Théorie de la Relativité* (*Revue générale des Sciences*, 1918, p. 101 à 114 et 135 à 146).

férence et en temps est égale à $\frac{c^2\beta}{v}$. Elle est la moyenne géométrique des deux autres.

16. *Périodes.* — Considérons une fonction périodique du paramètre de rayonnement; soit U′ la période. La période correspondante rapportée au temps ne sera pas la même pour les deux systèmes d'axes. Soit T la période rapportée au système fixe, prise par conséquent dans l'hypothèse x = const. On a

$$T = \frac{U'\beta}{c}.$$

La période T_1 rapportée au système mobile, prise dans l'hypothèse x_1 = const., sera donnée par la formule

$$T_1 = \frac{U'}{c\beta}.$$

Le rapport des périodes $\frac{T}{T_1}$ est égal à

$$\beta^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}.$$

Le produit des périodes TT_1 est égal à $\frac{U'^2}{c^2}$. Le rapport $\frac{U'}{c}$ serait la période rapportée à la variable θ défini par l'équation (10) et correspondant au pseudo-temps d'Einstein dans le cas des ondulations lumineuses.

17. *Ondes de progression.* — Au lieu de nous placer au point de vue des interférences, considérons le lieu des points atteints à une époque t par une perturbation instantanée issue du pôle mobile à une époque antérieure t_0. Le problème revient à chercher le lieu des points pour lesquels l'argument caractéristique, $r' - u'$, de l'onde positive a une valeur constante donnée à l'époque considérée t. La valeur initiale est égale à

$$u'_0 = \frac{\beta}{c}\left(t_0 - \frac{v x_0}{c^2}\right),$$

où l'on peut supposer d'ailleurs $x_0 = vt_0$.

On devra donc avoir, à l'époque t,

$$r' - u' = - u'_0$$

ou

$$r'^2 = (u' - u'_0)^2.$$

On en tire, par un calcul facile,

$$(x - x_0)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (t - t_0)^2.$$

Le lieu est donc, comme il fallait s'y attendre, une sphère ayant pour centre le point d'origine de la perturbation et dont le rayon croît proportionnellement à la durée. Ce résultat est le même que si le pôle était fixe. Pour distinguer ces ondes ordinaires des ondes d'interférence, nous leur donnerons le nom d'*ondes de progression*. Dans le cas d'un pôle fixe, les ondes d'interférence coïncident avec les ondes de progression.

18. *Caractère analytique des fonctions qui représentent le module et le paramètre de rayonnement de l'onde mobile.* — Quand on introduit le paramètre de rayonnement au lieu du temps, l'équation aux dérivées partielles de la propagation des ondes prend la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = 0.$$

Les multiplicités caractéristiques sont définies par l'équation du premier ordre

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 = 0.$$

Nous désignerons par D (φ) le premier membre de cette équation. Le module r' et le paramètre de rayonnement u' satisfont aux relations suivantes :

$$D(r') = 1, \qquad D(u') = -1,$$

$$\frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial r'}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial r'}{\partial z}\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial r'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial u} = 0.$$

La dernière de ces relations, suivant une notation fréquemment

employée, pourrait se représenter par

$$D(r', u') = 0.$$

Il est facile de déduire de ces résultats que les fonctions $r' - u'$ et $r' + u'$ satisfont à l'équation aux dérivées partielles des multiplicités caractéristiques.

En rattachant ainsi la transformation de Lorentz à la théorie des caractéristiques et au mouvement de propagation des ondes à pôle mobile, on voit comment le problème pourrait être généralisé pour des mouvements quelconques. Les difficultés que l'on rencontre sont d'ordre purement analytique, de même nature que pour tous les problèmes relatifs à l'intégration des équations aux dérivées partielles.

19. *Extension au cas des vitesses quelconques.* — Nous avons constamment supposé que la vitesse de translation v est moindre que la vitesse de propagation c. Cette condition restrictive n'est pas obligatoire. Pour des vitesses supérieures à c, les ondes d'interférence sont hyperboliques et le module s'annule sur la surface d'un cône réel. Le coefficient de contraction de Lorentz devrait être remplacé par $\sqrt{\alpha^2 - 1}$; mais, à part ce détail, le calcul est identique. Le cas de $v = c$ est un cas singulier qui nécessiterait une étude spéciale.

Le fait que la transformation de Lorentz peut se présenter dans l'étude des interférences de tout système ondulatoire montre suffisamment que les conclusions qu'on a cru pouvoir en tirer dans le cas spécial de la lumière ne sont pas toutes fondées.

Les théories mathématiques n'ont d'ailleurs aucun pouvoir mystérieux pour régir les phénomènes. La prétention d'Einstein d'édicter *une condition restrictive à laquelle les lois de la nature doivent* SE SOUMETTRE est difficile à admettre.

Les opérations analytiques n'ont ni la signification ni la portée qu'on leur attribue ainsi. Ce ne sont pas les faits qui se plient à nos formules; ce sont nos formules qui doivent s'adapter à l'observation, et nous ne pouvons avoir la prétention d'attribuer au

résultat de nos calculs une précision supérieure à celle des données expérimentales sur lesquelles ils sont fondés.

20. *Systèmes homogènes non isotropes.* — Le fait que les équations de Maxwell conservent leur forme par les transformations de Lorentz semble indiquer que les ondes d'interférence et le paramètre de rayonnement ont une assez grande importance dans l'étude des phénomènes optiques et électromagnétiques, lorsque l'on a à considérer des foyers mobiles. Au point de vue simplement analytique, leur considération nous permet en outre une généralisation facile de nos résultats. Nous pouvons en effet envisager le cas beaucoup plus général de la propagation des ondes dans un milieu homogène non isotrope. Si l'on prend toujours l'ellipsoïde d'interférence comme quadrique directrice pour la mesure des distances, comme nous l'avons indiqué, les équations conservent exactement la même forme que pour les systèmes isotropes. Les calculs et l'expression même de l'intégrale restent identiques. Nous aurons toujours un module elliptique r et un paramètre de rayonnement u, fonction linéaire du temps et des coordonnées.

L'anisotropie des ondes ne peut être révélée que par des mesures faites avec des instruments qui ne participent pas à la déformation apparente des ondes. Si les longueurs sont évaluées en rayons de l'ellipsoïde d'interférence, toute distinction disparaît entre les systèmes isotropes ou anisotropes.

Nous arrivons donc à un résultat d'un très grand intérêt qui explique le rôle de la théorie de la relativité restreinte dans l'étude intrinsèque des systèmes ondulatoires. On ne peut avoir la notion du déplacement du foyer dans le milieu que par la comparaison avec un autre phénomène.

21. *Remarque sur l'expérience de Michelson.* — Dans l'expérience de Michelson, les phénomènes d'interférence sont observés à l'aide d'instruments réputés rigides. On ne se trouve donc pas dans le cas du phénomène homogène dont nous venons de parler. L'étude de l'expérience peut être facilitée dans une certaine mesure par les résultats que nous avons déjà établis.

La discussion ordinaire est évidemment défectueuse et pourrait laisser subsister quelques doutes sur la validité de la conclusion. Nous l'admettrons cependant comme exacte. Les conséquences en sont intéressantes, mais n'ont aucun rapport avec la théorie d'Einstein.

L'expérience devait mettre en évidence l'aplatissement des ondes d'interférence. Les résultats obtenus tendent au contraire à démontrer que, dans les conditions et les limites de l'observation, l'onde d'interférence est rigoureusement sphérique, au sens physique du mot, les mesures étant faites avec des instruments terrestres.

Le module r désigne alors une véritable distance. L'équation de la multiplicité caractéristique à quatre variables

$$r^2 = (u - u_0)^2,$$

interprétée en supposant $u = \text{const.}$, donne l'onde d'interférence que nous venons d'envisager. La même équation, interprétée en supposant $t = \text{const.}$, donne une autre quadrique représentant l'onde de progression. Comme le paramètre de rayonnement u est une fonction linéaire des coordonnées, cette quadrique est en général un ellipsoïde de révolution ayant pour foyer le pôle mobile.

Nous arrivons ainsi à un résultat intéressant indiqué par M. Poincaré (1) sous une forme moins générale, retrouvé par M. Ch.-E. Guillaume (2) et correspondant également aux recherches de M. Sagnac (3).

C'est l'onde de progression qui donne la loi de variation des vitesses relatives de propagation. *D'après ce résultat on n'a donc pas le droit de dire que ces vitesses sont égales dans toutes les directions. L'isotropie de l'onde d'interférence n'entraîne pas l'isotropie de l'onde de progression.*

Nous obtenons en même temps une autre conséquence très importante.

---

(1) *Science et Méthode*, p. 239.

(2) *Comptes rendus du Congrès Int. des Math. de Strasbourg*, p. 602.

(3) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 174, 1922, p. 29.

La forme ellipsoïdale de l'onde de progression ne permet plus de supposer que le champ de propagation soit isotrope dans le domaine restreint où s'effectue l'expérience.

Dans ce domaine *il y aurait donc influence de la Terre sur le champ et, par conséquent, sur la propagation de la lumière.*

Quant à la forme et à la nature de cette influence, le champ des hypothèses est extrêmement vaste. Nous n'en formulerons aucune. La seule conséquence légitime que nous puissions tirer de l'expérience de Michelson, c'est l'isotropie de l'onde d'interférence. Nous n'avons aucun renseignement sur l'expression du paramètre u. Le résultat est d'un très grand intérêt, mais ne présente rien de paradoxal quand on l'examine sans idée préconçue.

Dans nos calculs nous avons supposé que le champ puisse être considéré comme homogène dans le domaine de l'expérience et que les mesures soient effectuées à l'aide d'instruments terrestres.

Pour expliquer le résultat de l'expérience de Michelson, Einstein suppose qu'il existe, outre les observateurs terrestres, d'autres observateurs non entraînés dans le mouvement de la Terre. Ces observateurs seraient munis d'un jeu approprié de règles compressibles et de chronomètres à retardement dont les indications correspondent à celles des instruments terrestres par les formules de Lorentz.

L'intervention de ces personnages hypothétiques ne paraît guère utile dans la question, car nous ne pouvons parler qu'en langage terrestre, de mesures terrestres et d'observateurs terrestres. De plus, dans l'expérience de Michelson, on n'a pas à consulter de chronomètre ni à établir de comparaison avec d'autres chronomètres qui n'existent pas, portés par des observateurs qui n'existent pas davantage. Ce sont des éléments entièrement étrangers à l'interprétation du phénomène.

CHAPITRE III.

GÉOMÉTRIE DES SYSTÈMES ONDULATOIRES.

22. La géométrie des systèmes ondulatoires dans un milieu isotrope se ramène à l'étude des transformations de Lorentz considérées au point de vue le plus général. On rencontre dans cette étude des propriétés géométriques d'un très grand intérêt.

Nous avons donné la signification précise des formules de Lorentz indépendamment de toutes considérations de chronomètres métaphysiques ou de règles enchantées.

Étant donnés deux systèmes d'axes en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre, il correspond à chacun un ellipsoïde d'interférence et un paramètre de rayonnement. Les longueurs étant supposées mesurées en rayons de l'ellipsoïde d'interférence, nous avons les formules de Lorentz sous la forme normale :

$$x' = \frac{1}{\beta}(x - \alpha u); \qquad u' = \frac{1}{\beta}(u - \alpha x); \qquad y' = y; \qquad z' = z.$$

Comme le facteur $\frac{1}{\beta}$ est supérieur à l'unité, nous posons, en introduisant les fonctions hyperboliques,

$$\frac{1}{\beta} = \operatorname{ch}\varphi, \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{sh}\varphi, \qquad \alpha = \operatorname{th}\varphi.$$

Les deux premières formules de Lorentz deviennent

$$(13) \qquad \begin{cases} x' = x \operatorname{ch}\varphi - u \operatorname{sh}\varphi, \\ u' = -x \operatorname{sh}\varphi + u \operatorname{ch}\varphi. \end{cases}$$

Par leur forme elles rappellent les formules de la rotation, avec substitution des fonctions hyperboliques aux fonctions circulaires.

On a identiquement

$$u'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = u^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Entre les différentielles, il existe une relation semblable :

$$du'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = du^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Désignons par $d\sigma^2$ la valeur commune des deux membres de cette identité. La quantité $d\sigma$ que les relativistes appellent l'intervalle élémentaire est un invariant relativement aux transformations de Lorentz. Inversement, le groupe des transformations qui conserve l'invariant $d\sigma$ constitue le groupe de Lorentz le plus général.

23. *Détermination des transformations du groupe de Lorentz.* — Au point de vue géométrique, il est extrêmement facile d'obtenir la transformation la plus générale conservant la forme $d\sigma$.

On sait que les transformations linéaires à coefficients constants sont les seules qui remplacent une forme quadratique de différentielles à coefficients constants par une autre forme de même nature. Nous n'aurons donc à nous occuper que des transformations linéaires. Nous négligerons même les constantes additives pour nous borner au cas des formes homogènes.

L'équation

$$u^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \tag{14}$$

peut être considérée comme représentant en coordonnées homogènes une sphère de rayon égal à l'unité. Toute substitution qui ramènera le premier membre à la forme

$$u'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

s'obtiendra en prenant pour tétraèdre de référence un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère. Inversement, à tout tétraèdre conjugué correspondra une substitution linéaire jouissant de la propriété demandée.

Des quatre sommets d'un tétraèdre conjugué il y en a un seul qui soit intérieur à la sphère; ce sommet sera le point O′, ayant pour coordonnées homogènes $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ dans le nouveau système. Le plan $u' = 0$ sera le plan polaire de O′.

Le trièdre O′ x' y' z' devra être conjugué par rapport au cône imaginaire, de sommet O′ circonscrit à la sphère. Si l'on veut qu'il

soit en même temps trirectangle, il faudra que l'un des nouveaux axes de coordonnées coïncide avec l'axe de révolution OO′ du cône; les deux autres seront seulement assujettis à être perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à OO′. Enfin, pour que la transformation soit réciproque, que le premier système se déduise du second comme le second du premier, avec conservation de l'orthogonalité, il faudra également que l'un des axes du premier système coïncide avec OO′.

Prenons donc cette droite pour axe commun des x et des x'. Soient $u = 1$, $x = \alpha$, $y = 0$, $z = 0$ les coordonnées homogènes du point O′ dans le premier système d'axes. Le plan polaire P′ de ce point a pour équations dans le premier système $u - \alpha x = 0$, et, dans le second, $u' = 0$. Le plan perpendiculaire à OO′ mené par le point O′ est représenté dans les deux systèmes respectivement par les équations

$$x - \alpha u = 0, \qquad x' = 0.$$

On aura donc, en désignant par λ et μ des coefficients constants,

$$u' = \lambda(x - \alpha x), \qquad x' = \mu(x - \alpha u).$$

Les variables u' et x' s'expriment en fonction homogène de u et de x; les variables y' et z' s'expriment également à l'aide des seules variables y, z, puisque les plans de coordonnées correspondants passent par la même droite OO′.

L'identité proposée

$$u'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = u^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

se divise donc en deux autres :

$$u'^2 - x'^2 = u^2 - x^2, \qquad y'^2 + z'^2 = y^2 + z^2.$$

De la première on tire

$$\lambda^2 - \mu^2 = \frac{1}{1 - \alpha^2}.$$

La seconde exprime que les directions des axes O′ x' et O′ z' se déduisent des axes correspondants du premier système par une simple rotation.

Les conditions d'orthogonalité et de réciprocité ont évidemment restreint le nombre des paramètres dont dépendrait la transformation la plus générale. Le résultat obtenu se traduit par une sorte de rotation hyperbolique pour les variables u et x et une rotation circulaire ordinaire pour les variables y et z. En négligeant cette dernière rotation on a la transformation de Lorentz sous la forme ordinaire.

24. *Le module.* — Le cône circonscrit à la sphère (14) et ayant pour sommet le point O′ serait représenté par l'équation

$$(u - \alpha x)^2 - (1 - \alpha^2)(u^2 - x^2 - y^2 - z^2) = 0.$$

Le premier membre de cette équation se réduit à l'expression suivante

$$(1 - \alpha^2)\left[\frac{(x - \alpha u)^2}{1 - \alpha^2} + y^2 + z^2\right] = (1 - \alpha^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

où l'on reconnaît, à un facteur près, le carré du module des ondes à pôle mobile.

Tous les éléments de la transformation, y compris le module, sont donc entièrement définis par un point O′ supposé intérieur à la sphère fondamentale considérée.

L'abscisse du plan polaire du point O′ est égale à $\frac{1}{\alpha}$.

Elle représente la vitesse de déphasage du nouveau paramètre de rayonnement u' par rapport à u.

25. *Composition des transformations de Lorentz.* — Ce qu'on appelle dans la théorie de la relativité la composition des vitesses équivaut en réalité à la composition des transformations de Lorentz.

Dans le champ des quatre variables u, x, y, z, un déplacement sera représenté par une variation de ces quantités. Considérons un déplacement infiniment petit du, dx, dy, dz et soit $d\sigma$ l'intervalle correspondant. Posons

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

L'égalité qui définit l'intervalle peut s'écrire

$$d\sigma^2 = du^2 - ds^2,$$

ce qui permet de poser, en désignant par φ un argument de fonction hyperbolique :

$$du = d\sigma \operatorname{ch}\varphi,$$
$$ds = d\sigma \operatorname{sh}\varphi.$$

Les composantes dx, dy, dz du déplacement suivant les axes sont de la forme

$$dx = l\, d\sigma \operatorname{sh}\varphi, \qquad dy = m\, d\sigma \operatorname{sh}\varphi, \qquad dz = n\, d\sigma \operatorname{sh}\varphi,$$

les paramètres l, m, n étant liés par la relation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Le rapport $\frac{ds}{du}$ est assimilé à une vitesse dans la théorie de la relativité; nous l'appellerons une *pseudo-vitesse*. Le temps proprement dit n'intervient pas, en effet, dans la question; comme nous l'avons vu, il n'est pas nécessairement proportionnel au paramètre de rayonnement.

On a

$$\frac{ds}{du} = \operatorname{th}\varphi :$$

les composantes de la pseudo-vitesse suivant les axes sont

$$\frac{dx}{du} = l \operatorname{th}\varphi, \qquad \frac{dy}{du} = m \operatorname{th}\varphi, \qquad \frac{dz}{du} = n \operatorname{th}\varphi.$$

A toute *pseudo-vitesse* de cette forme correspond un point O′ intérieur à la sphère fondamentale définie précédemment, et, à ce point O′ correspond également une transformation de Lorentz.

Rapportons le même déplacement à un second système de référence u', x', y', z'. En désignant par φ' l'argument hyperbolique relatif au déplacement dans ce système, on aura des formules analogues aux premières :

$$du' = d\sigma \operatorname{ch}\varphi',$$
$$dx' = l'\, d\sigma \operatorname{sh}\varphi', \qquad dy' = m'\, d\sigma \operatorname{sh}\varphi', \qquad dz' = n'\, d\sigma \operatorname{sh}\varphi'.$$

Désignons enfin par θ l'argument hyperbolique de la transformation de Lorentz qui établit la correspondance entre les deux systèmes

$$\begin{aligned} x' &= \quad x' \operatorname{ch}\theta + u' \operatorname{sh}\theta, \\ u' &= + x' \operatorname{sh}\theta + u' \operatorname{ch}\theta. \end{aligned}$$

Nous aurons immédiatement

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{ch}\varphi &= \quad \operatorname{ch}\varphi' \operatorname{ch}\theta + l' \operatorname{sh}\varphi' \operatorname{sh}\theta, \\ l \operatorname{sh}\varphi &= l' \operatorname{sh}\varphi' \operatorname{ch}\theta + \operatorname{ch}\varphi' \operatorname{sh}\theta, \\ m \operatorname{sh}\varphi &= m' \operatorname{sh}\varphi', \\ n \operatorname{sh}\varphi &= n' \operatorname{sh}\varphi'. \end{aligned} \right.$$

Comme le coefficient l' désigne un cosinus, les deux premières équations de ce groupe rappellent les formules fondamentales de la trigonométrie non euclidienne. Nous en trouverons plus loin la raison.

Posons, comme précédemment,

$$\operatorname{th}\theta = \alpha, \qquad \frac{1}{\operatorname{ch}\theta} = \beta.$$

Les équations (15) donnent

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{du} &= l \operatorname{th}\varphi = \frac{\dfrac{dx'}{du'} + \alpha}{1 + \alpha \dfrac{dx'}{du'}}, \\ \frac{dy}{du} &= \frac{\beta \dfrac{dy'}{du'}}{1 + \alpha \dfrac{dx'}{du'}}, \\ \frac{dz}{du} &= \frac{\beta \dfrac{dz'}{du'}}{1 + \alpha \dfrac{dx'}{du'}}. \end{aligned} \right.$$

Si le déplacement considéré est dirigé suivant l'axe Ox, on a

$$l' = 1, \qquad m' = n' = 0,$$

ce qui entraîne

$$\varphi = \varphi' + \theta;$$

d'où

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{\operatorname{th}\varphi' + \operatorname{th}\vartheta}{1 + \operatorname{th}\varphi' \operatorname{th}\vartheta}.$$

26. *Cas des pseudo-vitesses supérieures à l'unité.* — Nous avons supposé jusqu'ici, par l'emploi des fonctions hyperboliques, que les pseudo-vitesses composantes étaient toutes inférieures à l'unité. Un calcul semblable pourrait cependant être effectué dans le cas de pseudo-vitesses quelconques. Considérons le cas de deux pseudo-vitesses de même sens α et α'. La pseudo-vitesse résultante α_1 sera donnée par la formule

$$\alpha_1 = \frac{\alpha + \alpha'}{1 + \alpha\alpha'}.$$

La différence $1 - \alpha_1$ n'est plus nécessairement positive. On a

$$1 - \alpha_1 = \frac{(1 - \alpha)(1 - \alpha')}{1 + \alpha\alpha'}.$$

Cette quantité change de signe lorsque l'une des vitesses composantes traverse l'unité ou encore quand le dénominateur s'annule.

Donc : si l'une des pseudo-vitesses composantes est égale à l'unité, la pseudo-vitesse résultante est aussi égale à l'unité; si l'une des composantes est égale et opposée à la pseudo-vitesse de déphasage du paramètre de rayonnement, la résultante devient infinie.

La somme $1 + \alpha_1$ peut se mettre sous une forme semblable

$$1 + \alpha_1 = \frac{(1 + \alpha)(1 + \alpha')}{1 + \alpha\alpha'}.$$

27. *La transformation de Lorentz et la Géométrie cayleyenne* [1]. — Nous nous sommes bornés jusqu'ici à considérer les transformations de Lorentz qui conservent l'orthogonalité euclidienne des axes. Mais on peut examiner le cas le plus général par une méthode géométrique simple qui conduit à une application intéressante de la notion cayleyenne d'angle et de distance.

Nous avons montré que la transformation de Lorentz peut se

---

[1] Cayley, *A sixth memoir on quantics* (*London Transact.*, 1859).

représenter par une transformation de coordonnées homogènes conservant une sphère fixe. Dans un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère, le sommet intérieur joue un rôle spécial quand on ne considère que des pseudo-vitesses de translation inférieures à l'unité.

Le centre O de la sphère correspond à un certain système de référence fondamental (S). Tout autre point P intérieur à la sphère définit une pseudo-vitesse de translation rapportée au système (S), et qui serait mesurée par le vecteur OP. On pourrait prendre pour pôle le point P; il lui correspond un autre système (S′). Les pseudo-vitesses rapportées au système (S′) ne sont pas mesurées par les longueurs euclidiennes des vecteurs.

Si l'on considère par exemple un point P_1, différent de P, la pseudo-vitesse qui correspond à ce point par rapport au système (S) sera bien mesurée par la longueur euclidienne OP_1, mais la pseudo-vitesse relative au système (S′) ne sera pas mesurée par la longueur euclidienne PP_1. Il semblerait donc qu'il y a une différence entre les deux systèmes. Or, il est possible de la faire disparaître par un procédé de mesure qui s'applique indifféremment à tous les systèmes, quel que soit le pôle correspondant.

Désignons par v le vecteur $\overline{OP}$. L'argument hyperbolique θ de la transformation de Lorentz qui permet de passer du système (S) au système (S′) sera défini par l'égalité

$$\operatorname{th}\theta = \frac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1} = v,$$

et l'on a, par conséquent,

$$\theta = \frac{1}{2}\log\frac{1+v}{1-v}.$$

Il est facile de donner à cette expression une forme projective, qui se conservera par le changement de pôle. La droite OP coupe la sphère en deux points M et M′. Je suppose qu'on ait pris comme sens positif sur la droite le sens $\overrightarrow{M'M}$.

Le rapport anharmonique des quatre points M, M′, O′P est

égal à

$$\frac{OM}{OM'} : \frac{PM}{PM'} = \frac{1}{-1} : \frac{1-\varphi}{1+\varphi} = \frac{1+\varphi}{1-\varphi}.$$

En désignant par (MM′OP) ce rapport anharmonique, on a donc

$$\theta = \frac{1}{2}\log(MM'OP).$$

Le rôle particulier de la position attribuée d'abord au point O disparaît dans cette nouvelle expression, et l'on pourra appliquer la même formule pour passer d'un point P_1 à un autre P_2.

La droite $P_1 P_2$ coupe la sphère en deux points N, N′.

L'argument hyperbolique θ de la transformation correspondante sera donné par la formule

$$\theta = \frac{1}{2}\log(NN'P_1P_2).$$

C'est précisément l'expression de la distance cayleyenne qui correspond à la sphère considérée prise comme quadrique fondamentale.

Désignons par $[P_1 P_2]$ cette distance. Il est évident que l'on a pour un système de trois points P_1, P_2, P_3 en ligne droite

$$[\overline{P_1P_3}] = [P_1P_2] + [P_2P_3].$$

La distance cayleyenne de tout point P à un point de la surface de la sphère est infinie.

La pseudo-vitesse qui correspond à l'argument θ est toujours égale à $\operatorname{th}\theta$, quel que soit le pôle du système de référence. La géométrie cayleyenne fournit donc une image très simple de la composition des pseudo-vitesses.

28. *Expression analytique de la distance cayleyenne.* — Je crois utile de rappeler sommairement le calcul de la distance cayleyenne en fonction des coordonnées.

Soient deux points $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2\, y_2\, z_2)$ intérieurs à la sphère fondamentale. Les coordonnées de tout point de la droite

$P_1 P_2$ peuvent se mettre sous la forme

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

En exprimant que le point M se trouve sur la sphère, on obtient une équation du second degré en λ :

$$(1 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2) + 2\lambda(1 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + \lambda^2(1 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2) = 0.$$

On pose

$$F_{ij} = 1 - x_i x_j - y_i y_j - z_i z_j;$$

l'équation en λ prend la forme abrégée

$$F_{11} + 2\lambda F_{12} + \lambda^2 F_{22} = 0.$$

Soient λ_1 et λ_2 les racines de cette équation, correspondant aux points d'intersection M_1, M_2.

Le rapport anharmonique $(M_1 M_2 P_1 P_2)$ est égal à $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

On a donc

$$e^\theta = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}},$$

d'où

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = -\frac{F_{12}}{\sqrt{F_{11} F_{22}}}.$$

Nous tirons de là

$$\operatorname{sh}^2\theta = \frac{F_{12}^2 - F_{11} F_{22}}{F_{11} F_{22}}$$

et, par suite,

$$\operatorname{th}^2\theta = \frac{F_{12}^2 - F_{11} F_{22}}{F_{12}^2}.$$

En développant l'expression de $\operatorname{sh}^2\theta$, on trouve

$$\operatorname{sh}^2\theta = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (y_1 z_2 - z_2 y_1)^2 - (z_2 x_1 - x_1 z_2)^2 - (x_1 y_2 - y_2 x_1)^2}{(1 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2)(1 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2)}.$$

L'expression de l'élément linéaire cayleyen s'en déduit immédiatement :

$$d\bar{y}^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 - (y\,dz - z\,dy)^2 - (z\,dx - x\,dz)^2 - (x\,dy - y\,dx)^2}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2}.$$

Ces formules résolvent dans le cas le plus général le problème de la composition des pseudo-vitesses.

L'expression de $d\theta^2$, assimilée à un élément linéaire, conduit à l'expression de l'élément qui, dans la terminologie cayleyenne, remplace l'angle.

L'angle cayleyen se ramène à un logarithme de rapport anharmonique comme la distance.

Soient Δ et Δ' deux droites qui se coupent en un point P intérieur à la sphère. Par le point P et dans le plan $\Delta\Delta'$, on peut mener à la sphère deux tangentes imaginaires conjuguées P et P'. L'angle cayleyen des deux droites est le produit par $\frac{1}{2i}$ du rapport anharmonique des quatre droites T, T', Δ, Δ'. Cette définition et celle de la distance sont évidemment inspirées par l'expression de l'angle ordinaire donnée par Laguerre en 1853 (1).

29. *Géométrie cayleyenne et Géométrie de Lobatschewski.* — F. Klein (2) observa en 1871 que la géométrie cayleyenne fournit une représentation simple des propositions de la géométrie de Lobatschewski, quand on prend comme éléments les points et les segments de droite intérieurs à la sphère fondamentale, et qu'on évalue la distance suivant la définition de Cayley. Il est intéressant d'indiquer comment cette représentation se rattache à la représentation utilisée par Poincaré pour la théorie des fonctions fuchsiennes. La correspondance est extrêmement simple dans le cas de la géométrie plane. La sphère fondamentale est alors remplacée par un cercle (C) du plan fixe considéré Π.

Imaginons une demi-sphère (Σ) située au-dessus du plan Π et passant par le cercle fondamental (C). Tout point P du plan Π intérieur au cercle (C) est la projection d'un point P' de la demi-sphère. Un segment de droite intérieur au cercle (C) est la projection d'un demi-cercle de Σ. Les tangentes imaginaires issues de P au cercle (C) sont les projections des génératrices rectilignes de la sphère passant en P'.

---

(1) Laguerre, *Sur la Théorie des foyers* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 72, p. 57).

(2) F. Klein, *Math. Annalen*, t. IV, 1871; t. VI, 1873; t. VII, 1874.

Le rapport anharmonique du faisceau formé par deux droites quelconques passant en P et les deux tangentes imaginaires au cercle (C) est égal à celui du faisceau des quatre droites homologues passant en P′ et tracées dans le plan tangent à la sphère en ce point. Il résulte immédiatement de là que l'angle cayleyen de deux droites passant par P est égal à l'angle sous lequel se coupent sur la sphère les demi-cercles de la demi-sphère (Σ) qui correspondent respectivement à ces droites.

Il reste à transformer l'expression de la distance cayleyenne. Soient P_1 et P_2 deux points du plan Π intérieur au cercle (C), M et M′ les deux points où la droite $P_1 P_2$ coupe le cercle fondamental (C). Désignons par ρ le rayon du demi-cercle qui se projette suivant la droite $M' P_1 P_2 M$, par φ_1 et φ_2 respectivement, les angles que forment avec M′M les rayons de ce demi-cercle aboutissant aux points P'_1, P'_2, homologues de P_1 et P_2. Le rapport anharmonique $(MM' P_1 P_2)$ est égal à

$$\frac{\rho(1-\cos\varphi_1)}{-\rho(1+\cos\varphi_1)} : \frac{\rho(1-\cos\varphi_2)}{-\rho(1+\cos\varphi_2)} = \frac{\operatorname{tang}^2\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tang}^2\frac{\varphi_2}{2}}.$$

L'argument hyperbolique que nous avons désigné par θ et qui représente la distance cayleyenne des deux points est donc égal à $\log\dfrac{\operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\varphi_2}{2}}$.

Or si l'on joint le point M′ aux points M, P'_1, P'_2, et que l'on complète ce faisceau en y adjoignant la tangente au demi-cercle en M′, le rapport anharmonique du faisceau ainsi construit est le rapport anharmonique constant des quatre points M, M′, P'_1, P'_2 du demi-cercle.

Les coefficients angulaires des quatre droites considérées sont respectivement O, ∞, $\operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\varphi_2}{2}$; le rapport anharmonique a donc pour valeur $\dfrac{\operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\varphi_2}{2}}$.

Et l'on a

$$\theta = \text{log. rapp. anh. } MM' P'_1 P'_2.$$

Effectuons maintenant une projection stéréographique de la demi-sphère (Σ) sur le plan Π. Les demi-cercles dont le plan est perpendiculaire à Π se projetteront suivant des arcs de cercles normaux au cercle (C). Les points M_1, M'_1 se conservent; P'_1, P'_2 se projettent respectivement en P''_1, P''_2. Le rapport anharmonique $(MM' P''_1 P''_2)$ sur l'arc de cercle de la projection stéréographique est égal au rapport anharmonique $(MM' P'_1 P'_2)$ sur le demi-cercle de la sphère (Σ). Il est égal par conséquent à la racine carrée du rapport anharmonique des quatre points en ligne droite M, M'_1, P_1, P_2.

Comme les angles se conservent en projection stéréographique, l'angle euclidien de deux arcs de cercle normaux au cercle fondamental est égal à l'angle cayleyen de leurs cordes.

On retrouve donc ainsi la représentation bien connue des éléments fondamentaux de la géométrie non euclidienne.

L'emploi de la demi-sphère (Σ) fournit également une image très simple de la contraction de Lorentz. Soit P un pôle du plan Π, P′ son image sur (Σ). Un petit cercle de Σ ayant pour pôle le point P′ se projette sur Π suivant une ellipse. Le rapport des axes de cette ellipse est égal au coefficient de contraction de Lorentz pour la vitesse de translation qui correspondrait au point P.

30. *Extension aux figures à trois dimensions.* — L'extension de la méthode précédente aux figures à trois dimensions est extrêmement simple. La sphère fondamentale

$$(\Sigma) \qquad 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

est la projection sur l'espace (x, y, z) de la demi-hypersphère (Σ) à quatre dimensions définie par l'équation et l'inégalité suivantes :

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2 - w^2 = 0, \\ w > 0. \end{cases}$$

On peut répéter sur cette figure à quatre dimensions les raison-

nements que nous avons faits sur la figure à trois dimensions considérée précédemment, et l'on obtient la transformation des segments rectilignes en arcs de cercles normaux à la sphère fondamentale.

Si l'on considère les coordonnées x, y, z comme les composantes d'une pseudo-vitesse dans un système (S), la quatrième coordonnée w représente la dérivée $\frac{d\sigma}{du}$ de l'intervalle par rapport au paramètre de rayonnement. Cette quatrième variable a donc une signification physique très précise.

Bien que les résultats que je viens d'exposer n'aient rien d'essentiellement nouveau, il m'a paru utile de les rappeler pour faire ressortir l'intérêt mathématique de la géométrie des systèmes ondulatoires.

31. *L'univers de Minkowski* [1]. — Pour terminer cette étude sommaire de la transformation de Lorentz et des questions qui s'y rattachent, je dois ajouter quelques observations sur l'*univers* de Minkowski. On sait que Minkowski considère les trois coordonnées d'espace et le temps comme les éléments d'une multiplicité à quatre dimensions qu'il appelle l'*univers*. L'emploi du langage géométrique pour figurer les ensembles dans lesquels les coordonnées d'espace et le temps varient simultanément n'est pas nouveau. Il présente des avantages dans certaines questions et M. Hadamard, entre autres, en a fait un usage courant dans ses *Leçons sur la propagation des ondes*. On pourrait critiquer la terminologie employée; il est quelque peu ridicule de vouloir représenter l'univers à l'aide de quatre variables seulement. Mais il y a d'autres reproches plus graves. Sous prétexte que les quatre variables figurent symétriquement dans ses formules, Minkowski prétend nier la distinction physique entre ces quantités, ce qui est absurde. Si l'on remplace u par si, dans la forme quadratique

$$-d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2,$$

---

(1) *Die Grundgleichungen für die electromagnetische Vorgänge in bewegtenkorpem* (*Nachr. der K. Ges. d. Wiss. zu Gottingen*, 1908).

elle devient

$$-d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + ds^2.$$

Cette forme symétrique présente des avantages pour certains calculs. En particulier, les transformations de Lorentz se ramènent aux transformations orthogonales à quatre variables, ce qui constitue un rapprochement intéressant.

De même l'équation de la propagation des ondes prend la forme symétrique de l'équation du potentiel ordinaire

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = 0.$$

Mais il ne faut pas se dissimuler que cette simplification est illusoire dans l'interprétation des phénomènes réels. Les caractères analytiques des intégrales réelles sont très différents suivant que les caractéristiques sont réelles ou imaginaires. Dans les transformations de Lorentz, également, la distinction du réel et de l'imaginaire est essentielle.

Pour se rendre compte du caractère de la transformation de Minkowski, on peut la comparer à la transformation de $x^2 - y^2$ en $x^2 + y^2$, qui remplacerait une hyperbole équilatère par un cercle.

Cet artifice de calcul peut être avantageux dans certains cas; il peut présenter des inconvénients dans d'autres. Mais ce n'est qu'un artifice, et les conclusions qu'on a prétendu en déduire au point de vue des réalités physiques sont absolument inacceptables.

CHAPITRE IV.

INTERFÉRENCE ET RÉFLEXION DES ONDES PLANES.

32. Les ondes planes étant considérées comme issues d'un pôle infiniment éloigné, on peut les rapporter indifféremment à deux systèmes S et S′, en mouvement uniforme de translation l'un par rapport à l'autre. Nous dirons que S est fixe et S′ en mouvement.

Une intégrale V de la forme

$$V = A \sin 2\pi \frac{lx + mv + nz + a - u}{\lambda},$$

rapportée au système S, devient par la transformation de Lorentz

$$V = A \sin 2\pi \frac{l'x' + m'y' + n'z' + a' - u'}{\lambda'},$$

en posant

$$(17) \quad \begin{cases} l' = \dfrac{l - \alpha}{1 - l\alpha}, \quad m' = \dfrac{m\beta}{1 - l\alpha}, \quad n' = \dfrac{n\beta}{1 - l\alpha}, \\ a' = \dfrac{a\beta}{1 - l\alpha}, \quad \lambda' = \dfrac{\lambda\beta}{1 - l\alpha}. \end{cases}$$

L'égalité $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ entraîne $l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1$.

Les trois premières des formules (17) sont équivalentes aux formules (16).

On peut rapprocher ces résultats des conditions pour que deux trains d'ondes planes admettent des plans d'interférence stationnaires dans un système de référence donné.

Soient deux intégrales de même intensité et de même période dans le système S

$$V = A \sin 2\pi \frac{lx + my + nz + a - u}{\lambda},$$

$$V_1 = A \sin 2\pi \frac{l_1 x + m_1 y + n_1 z + a_1 - u}{\lambda_1}.$$

La somme $V + V_1$ s'annule en tous les points des plans représentés par l'équation

$$(18) \quad (l - l_1)x + (m - m_1)y + (n - n_1)z + (a - a_1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (n \text{ entier}).$$

Ces plans sont par conséquent des nappes d'interférence stationnaires dans le système S.

Dans le système S′ ces deux trains d'ondes n'auraient plus en général la même période et ne pourraient pas y fournir de nappes d'interférence stationnaires.

33. *Des nappes d'interférence stationnaires dans le système mobile.*

— Cherchons la relation qui doit exister entre les périodes de deux trains d'ondes dans le système S pour qu'elles puissent interférer en S'. La transformation de Lorentz fournit immédiatement le résultat; cependant il m'a paru utile de faire le calcul directement en supposant d'abord que S' se déduise de S par une simple translation au sens ordinaire du mot. Nous désignons par λ et λ_1 les périodes.

Posons par conséquent

$$x_1 = x - \alpha u$$

et conservons les autres variables.

Les arguments caractéristiques des intégrales deviennent

$$\frac{lx_1 + my + nz + a - u(1 - l_1\alpha)}{\lambda},$$

$$\frac{l_1x_1 + m_1y + n_1z + a_1 - u(1 - l_1\alpha)}{\lambda_1}.$$

Pour que le paramètre de rayonnement u disparaisse dans la différence des arguments, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\lambda}{1 - l\alpha} = \frac{\lambda_1}{1 - l_1\alpha}. \tag{19}$$

Ce résultat rapproché de la dernière des formules (17) exprime que les périodes transformées de λ et de λ_1 par la transformation de Lorentz sont égales entre elles.

Si cette condition est réalisée, les plans d'interférence stationnaires des deux trains d'ondes, observés dans le système S', seront parallèles au plan

$$\frac{lx_1 + my + nz}{1 - l\alpha} - \frac{l_1x_1 + m_1y + n_1z}{1 - l_1\alpha} = 0. \tag{20}$$

L'équation (20) se simplifie par l'introduction de la transformation de Lorentz.

Un calcul immédiat la ramène en effet à la forme

$$l' - l'_1)x' + (m' - m'_1)y' + (n' + n'_1)z' = 0. \tag{21}$$

Il reste à interpréter géométriquement le résultat obtenu. Si l'on

suppose que, dans le système S, les ondes d'interférence sont de véritables sphères, les plans des nappes d'interférence (18) sont parallèles à l'un des plans bissecteurs des plans des ondes planes considérées.

Mais, dans ce cas, les ondes d'interférence du système (S′) sont des ellipsoïdes; l'équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

représente un ellipsoïde, et l'équation (21) doit être interprétée en conséquence.

Les plans bissecteurs d'un dièdre sont les plans conjugués harmoniques à la fois par rapport aux faces du dièdre et par rapport à une sphère qui aurait son centre sur l'arête du dièdre.

Si la sphère directrice est remplacée par un ellipsoïde d'interférence, on se trouve dans le cas du système mobile S′. Donc :

Les plans d'interférence stationnaires dans le système mobile S′ *sont parallèles à l'un des deux plans conjugués en direction par rapport aux plans des fronts d'ondes et par rapport à l'ellipsoïde d'interférence.*

L'expression de front d'onde doit être précisée. L'emploi des coefficients l', m', n' implique qu'il s'agit des plans qui correspondent à l'hypothèse $u' =$ const., et non à l'hypothèse $u =$ const. C'est donc le paramètre de rayonnement du système mobile qui doit intervenir dans la détermination de ces plans.

Le raisonnement précédent ne précise pas lequel des plans conjugués est celui qui correspond à la direction des plans d'interférence stationnaire. Le procédé d'élimination de u, que nous avons employé, indique que le plan considéré est celui sur lequel les vitesses de propagation des deux ondes se projettent dans le même sens.

34. *Rayons de propagation. Aberration.* — M. Hadamard a rattaché la notion des *rayons* de propagation à celle des *bicaractéristiques*, c'est-à-dire des lignes ou multiplicités à une dimension suivant lesquelles les multiplicités caractéristiques touchent leur enveloppe.

Nous avons donné, au n° **18**, l'équation aux dérivées partielles des multiplicités caractéristiques dans le système des variables u, x, y, z.

Les équations différentielles des bicaractéristiques correspondant à une intégrale donnée sont

$$\frac{dx}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)} = \frac{dy}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)} = \frac{dz}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)} = \frac{-du}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)}.$$

Dans le cas particulier des ondes planes

$$lx + my + nz - u = \text{const.},$$

on a

$$\frac{dx}{m} = \frac{dy}{n} = \frac{dz}{n} = \frac{du}{1}.$$

Ces équations peuvent être appliquées indifféremment aux systèmes de coordonnées fixes ou mobiles, pourvu que la variable u désigne le paramètre de rayonnement relatif au système considéré, et que l'on ait soin de les interpréter en tenant compte de la forme de l'ellipsoïde d'interférence.

Elles expriment que le rayon est parallèle au diamètre conjugué du plan d'onde dans l'ellipsoïde d'interférence. C'est ce que nous appellerons la direction *pseudo-normale* du plan.

La correspondance entre les directions des rayons par rapport à deux systèmes d'axes en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre, résulte immédiatement des formules (17) quand on emploie dans les deux systèmes les variables de Lorentz.

A un rayon de propagation du premier

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = \frac{u - u_0}{1},$$

correspond un rayon homologue du second

$$\frac{x' - x'_0}{l'} = \frac{y' - y'_0}{m'} = \frac{z' - z'_0}{n'} = \frac{u' - u'_0}{1},$$

les dénominateurs des deux groupes étant liés par les formules (17).

Les trois premiers rapports de chaque système définissent la

direction spatiale stationnaire du rayon, exprimée en variables de Lorentz.

Ces équations résolvent par conséquent le problème de l'aberration dans le cas le plus général.

35. *Réflexion.* — Les résultats obtenus pour le phénomène de l'interférence stationnaire s'appliquent également à la réflexion des ondes sur un miroir plan qui se déplace dans le milieu considéré suivant un mouvement de translation uniforme.

Nous devons supposer nécessairement que le mouvement du miroir n'altère pas l'homogénéité ni l'isotropie du milieu. Le plan du miroir est alors un plan d'interférence stationnaire pour l'onde incidente et l'onde réfléchie.

La loi de réflexion se déduit immédiatement de cette remarque. A la direction du plan de réflexion correspond une direction *pseudo-normale*, définie plus haut.

Le rayon incident, le rayon réfléchi et la pseudo-normale sont situés dans un même plan.

Les deux rayons sont conjugués harmoniques par rapport à la pseudo-normale et à la droite d'intersection de leur plan avec le plan du miroir. C'est donc l'ellipsoïde d'interférence qui remplace encore la sphère dans l'étude du phénomène de la réflexion. Pour que le rayon lumineux se réfléchisse dans sa propre direction, il faut qu'il soit dirigé suivant la pseudo-normale au plan du miroir.

On peut faire à ce sujet une remarque intéressante. Dans le système S′, qui participe au mouvement de translation au miroir, le rayon incident et le rayon réfléchi ont la même longueur d'onde. Au contraire, dans le système S, les longueurs d'onde diffèrent en général entre elles. Même dans le cas où les deux rayons se superposent en S′, les deux rayons du système S ont des périodes différentes. S'il s'agit, par exemple d'ondulations lumineuses, le rayon incident et le rayon réfléchi du système S ne sont pas de même couleur. Il convient d'ajouter, d'ailleurs, que les rayons considérés ne sont pas stationnaires dans le système S. Nos calculs de périodes s'appliquent en réalité aux deux systèmes d'ondes planes du sys-

tème S qui correspondraient respectivement à la direction de l'onde incidente et de l'onde réfléchie du système S'.

36. *Réflexion et interférence d'ondes polaires élémentaires.* — On arrive à des conclusions semblables quand on étudie dans un système mobile la réflexion d'une onde élémentaire issue d'un pôle simple ou l'interférence de deux ondes élémentaires identiques issues de deux pôles différents liés au même système. Dans ces questions, c'est le module elliptique de l'onde (n° **12**) qui remplace la distance, et la pseudo-normale qui remplace la normale.

Les formules relatives aux phénomènes stationnaires d'interférence ou ces réflexions s'obtiennent en général par l'élimination du temps. Mais d'après la forme même de l'intégrale, l'élimination de t entraîne celle du paramètre de rayonnement u. Les calculs et les résultats conserveront donc la même forme dans le cas du repos ou du mouvement, en tenant compte toutefois de la signification physique du module.

37. Je me suis borné dans tout ce qui précède à déduire les conséquences mathématiques de l'équation de la propagation des ondes, sans formuler d'hypothèses ni introduire aucun principe nouveau.

Nous avons pu constater que pour les observations effectuées dans un système de référence mobile, c'est toujours l'ellipsoïde d'interférence qui joue le rôle d'élément directeur.

Le temps n'intervient que dans le paramètre de rayonnement, où il figure au premier degré, en général avec les coordonnées de position, mais avec un coefficient qui peut varier beaucoup d'un phénomène à un autre.

Nos calculs ne visent pas particulièrement les phénomènes lumineux; ils s'étendent à tous les phénomènes vibratoires qui se propagent dans un milieu isotrope.

Les formules obtenues sont analogues à celles qu'on prétend établir en se basant sur le principe de relativité restreinte. Nous démontrons ainsi que ce principe est inutile pour l'étude des phéno-

mènes optiques et électromagnétiques, puisque les mêmes résultats s'obtiennent avec beaucoup plus de netteté et de précision par la simple étude analytique de l'équation des ondes.

D'autre part, comme l'extension du principe d'Einstein en dehors de cette catégorie de phénomènes constitue un abus basé sur une équivoque, la conclusion très nette à laquelle nous aboutissons est la suivante :

Le principe de la relativité restreinte, au sens d'Einstein, constitue tantôt une superfétation et tantôt une absurdité, suivant le domaine auquel on l'applique.

Sur les systèmes de relations singulières entre les périodes de fonctions abéliennes à trois variables

(*suite et fin*);

PAR PAUL LÉVY.

CHAPITRE II.

LES RELATIONS SINGULIÈRES DE L'OPÉRATION $\mathcal{F}$.

13. *Les relations singulières et le tableau des coefficients.* — Considérons, d'une part, le tableau $|T|$ formé par les quinze coefficients

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \lambda, & \mu, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \lambda', & \mu', \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \lambda'', & \mu''; \end{matrix}$$

d'autre part, le système (T) formé par les trois relations singulières

$$\begin{aligned} E &\equiv \lambda \mathcal{G} + \lambda' \mathcal{H}'' + \lambda'' \mathcal{H}' + \gamma' G'' - \beta'' G' + (\beta' - \gamma'') H + \alpha' H' - \alpha'' H'' + \mu = 0, \\ E' &\equiv \lambda \mathcal{H}'' + \lambda' \mathcal{G}' + \lambda'' \mathcal{H} + \alpha'' G - \gamma G'' + (\gamma'' - \alpha) H' + \beta'' H'' - \beta H + \mu' = 0, \\ E'' &\equiv \lambda \mathcal{H}' + \lambda' \mathcal{H} + \lambda'' \mathcal{G}'' + \beta G' - \alpha' G + (\alpha - \beta') H'' + \gamma H - \gamma' H' + \mu'' = 0. \end{aligned}$$

La donnée du tableau $|T|$ définit parfaitement le système (T). Mais l'inverse n'a pas lieu; comme nous l'avons déjà remarqué, on peut, sans changer le système (T), ajouter une même constante aux coefficients α, β', γ'', qui n'interviennent que par leurs différences dans les équations du système (T).

Nous désignerons par $\rho|T| + \rho_1|T_1|$ le tableau déduit des deux tableaux $|T|$ et $|T_1|$ en ajoutant les coefficients correspondants multipliés respectivement par ρ et ρ_1. Nous emploierons dans une acception

analogue la notation $\rho(T) + \rho_1(T_1)$ concernant les systèmes. Nous désignerons par $|\tau|$ le tableau pour lequel

$$\alpha = \beta' = \gamma'' = 1.$$

tous les autres coefficients étant nuls.

Avec ces notations, les tableaux qui correspondent à un même système (T) sont représentés par la formule

$$(25) \qquad |T| + \sigma|\tau|$$

et ceux qui correspondent aux systèmes $\rho(T)$ sont représentés par

$$(25') \qquad \rho|T| + \sigma|\tau|.$$

Ces tableaux sont bien *distincts*, en ce sens que les transformations singulières de coefficients $a_{i,j}$ auxquelles ils correspondent par les formules (11) sont différentes, et que de même les fonctions intermédiaires singulières auxquelles ils correspondent par les formules du n° **11** sont différentes.

Parmi les tableaux (25) qui correspondent au système (T), il nous arrivera de considérer spécialement le tableau

$$(26) \qquad |T| - \frac{\alpha + \beta' + \gamma''}{3}|\tau|.$$

pour lequel la somme remplaçant $\alpha + \beta' + \gamma''$ est nulle. Nous l'appellerons *tableau moyen* du système (T). Son introduction nous permettra de définir des invariants qui ne dépendent que du système et non du tableau correspondant à ce système que l'on considère. Bien que ses coefficients puissent ne pas être entiers, nous introduirons dans les formules des coefficients numériques tels que les invariants soient entiers.

14. L'interprétation géométrique du n° **8** montre bien le sens de la différence entre le tableau $|T|$ et le système (T).

Le tableau $|T|$, ou plus exactement l'ensemble des tableaux $\rho|T|$, ρ étant une constante, correspond à un complexe Γ. Le tableau $|\tau|$ correspond au complexe C. Les tableaux rentrant dans la formule (25) définissent une *famille linéaire* de complexes contenant le complexe C.

Or les relations singulières expriment que la droite correspondant à un système de périodes, c'est-à-dire une droite du complexe C, appartient au complexe Γ. Elles ne changent donc pas si l'on remplace Γ par tout autre complexe du faisceau considéré (à l'exception bien entendu du complexe C lui-même). Le système (T) correspond, non au complexe Γ, mais à la famille linéaire définie par C et Γ.

15. *Formation des tableaux dérivés.* — Nous appellerons *tableau dérivé* d'un tableau |T| tout tableau tel que les transformations qui lui correspondent par la formule (11) s'appliquent à tout système de périodes auquel s'appliquent les transformations correspondant au tableau |T|. En d'autres termes, un tableau sera dérivé de |T| si le système de relations singulières qui lui correspond résulte algébriquement du système (T).

Les tableaux (25′) sont donc des tableaux dérivés du tableau |T|. Nous allons voir qu'il y en a d'autres, dont l'existence a été découverte par M. Humbert.

Pour la mettre en évidence, formons d'abord, entre les équations du système |T|, les combinaisons

$$(27)\qquad \begin{cases} F \equiv G E + H'' E' + H' E'' = 0, \\ F' \equiv H'' E + G' E' + H E'' = 0, \\ F'' \equiv H' E + H E' + G'' E'' = 0. \end{cases}$$

En appelant toujours D le déterminant des périodes, il vient

$$\begin{aligned} F &\equiv \lambda D + \gamma' \mathcal{G}' - \beta'' \mathcal{G}'' - (\beta' - \gamma'') \mathcal{H} - \beta \mathcal{H}' + \gamma \mathcal{H}'' + \mu G + \mu' H'' + \mu'' H' = 0, \\ F' &\equiv \lambda' D + \alpha'' \mathcal{G}'' - \gamma \mathcal{G} - (\gamma'' - \alpha) \mathcal{H}' - \gamma' \mathcal{H}'' + \alpha' \mathcal{H} + \mu H'' + \mu' G' + \mu'' H = 0, \\ F'' &\equiv \lambda'' D + \beta \mathcal{G} - \alpha' \mathcal{G}'' - (\alpha - \beta') \mathcal{H}'' - \alpha'' \mathcal{H} + \beta'' \mathcal{H}' + \mu H' + \mu' H + \mu'' G'' = 0. \end{aligned}$$

Formons maintenant les combinaisons

$$(28)\qquad \begin{cases} E_1 \equiv \lambda' F'' - \lambda'' F' + \alpha E + \alpha' E' + \alpha'' E'' = 0, \\ E'_1 \equiv \lambda'' F - \lambda F'' + \beta E + \beta' E' + \beta'' E'' = 0, \\ E''_1 \equiv \lambda F' - \lambda' F + \gamma E + \gamma' E' + \gamma'' E'' = 0. \end{cases}$$

En développant ces expressions, on constate sans peine que ces équations constituent un système (T_1) de relations singulières corres-

pondant au tableau $|T_1|$ de coefficients

$$(29)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \lambda\,\mu - (\alpha), & \beta_1 = \lambda\,\mu' - (\alpha'), & \gamma_1 = \lambda\,\mu'' - (\alpha''), \\ \alpha'_1 = \lambda'\mu - (\beta), & \beta'_1 = \lambda'\mu' - (\beta'), & \gamma'_1 = \lambda'\mu'' - (\beta''), \\ \alpha''_1 = \lambda''\mu - (\gamma), & \beta''_1 = \lambda''\mu' - (\gamma'), & \gamma''_1 = \lambda''\mu'' - (\gamma''); \\ \lambda_1 = \lambda\alpha + \lambda'\beta + \lambda''\gamma, & \mu_1 = \mu\alpha + \mu'\alpha' + \mu''\alpha'', \\ \lambda'_1 = \lambda\alpha' + \lambda'\beta' + \lambda''\gamma', & \mu'_1 = \mu\beta + \mu'\beta' + \mu''\beta'', \\ \lambda''_1 = \lambda\alpha'' + \lambda'\beta'' + \lambda''\gamma'', & \mu''_1 = \mu\gamma + \mu'\gamma' + \mu''\gamma''; \end{cases}$$

en désignant par (α), (β), ..., (γ'') les mineurs du déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

correspondant respectivement aux éléments α, β, ..., γ''.

Le système (T_1), et par suite tous les systèmes $\rho(T) + \rho_1(T_1)$, résultant algébriquement du système (T), tous les tableaux

$$(30)\qquad \rho\,|T| + \rho_1\,|T_1| + \sigma\,|\tau|$$

sont des tableaux dérivés du tableau $|T|$. Nous désignerons le tableau $|T_1|$ par le symbole

$$|T_1| = F(|T|);$$

l'opération $F(.)$ étant la transformation d'un tableau par les formules (29).

16. Il existe une relation linéaire à coefficients constants entre les six équations des systèmes (T) et (T_1). Les formules (28) donnent en effet

$$(31)\qquad \lambda E_1 + \lambda' E'_1 + \lambda'' E''_1 = \lambda_1 E + \lambda'_1 E' + \lambda''_1 E''.$$

17. *Répétition de l'opération* F. — La formule (30) donne-t-elle tous les tableaux dérivés du tableau $|T|$? En particulier, l'opération F effectuée sur le tableau $|T_1|$, ou sur un tableau quelconque rentrant dans la formule (30), en donne-t-elle de nouveaux?

On peut répondre *a priori* en observant qu'il n'est pas possible en général d'éliminer à la fois G, H'', H' entre les équations (T); l'élimi-

nation de G donne en effet les équations

$$E = 0, \qquad E'_1 = 0,$$

entre lesquelles l'élimination simultanée de H'' et H' n'est pas possible en général. Or, si l'on pouvait déduire de (T) un nouveau système de relations singulières (T_2) qui ne soit pas de la forme $\rho(T) + \rho_1(T_1)$, on pourrait éliminer G, H'', H' entre les équations de ces systèmes.

Nous ne développerons pas ces calculs; il est plus intéressant d'étudier les substitutions résultant de l'opération F effectuée sur les tableaux de la forme (30).

Commençons par effectuer cette opération sur les tableaux

$$|T'| = |T| + \sigma|\tau|$$

correspondant à un même système (T). Il résulte sans difficulté des formules (29) que

$$(32) \qquad |T'_1| = F(|T'|) = |T_1| + \sigma|T| - [\sigma^2 + \sigma(\alpha + \beta' + \gamma'')]|\tau|.$$

Effectuons maintenant l'opération F sur le tableau $|T_1|$. Un calcul facile donne

$$(33) \qquad F(|T_1|) = F^2(|T|) = K|T|,$$

en posant

$$\begin{aligned} K &= \lambda\mu_1 + \lambda'\mu'_1 + \lambda''\mu''_1 - \delta, \\ &= \lambda_1\mu + \lambda'_1\mu' + \lambda''_1\mu'' - \delta. \end{aligned}$$

Appliquons cette formule en remplaçant $|T|$ par $|T'|$. Tenant compte de la formule (32), il vient

$$(34) \qquad F(|T'_1|) = K'|T'|,$$

K' étant ce que devient K quand on ajoute σ aux coefficients α, β', γ'', c'est-à-dire

$$(35) \qquad K' = K + (\alpha_1 + \beta'_1 + \gamma''_1)\sigma - (\alpha + \beta' + \gamma'')\sigma^2 - \sigma^3.$$

La combinaison des formules (32), (34) et de la formule évidente

$$F(\rho|T|) = \rho^2 F(|T|)$$

permet de former

$$F(\rho|T| + \rho_1|T_1| + \sigma|\tau|).$$

La substitution considérée est donc parfaitement définie par ces formules.

18. *L'opération* $\mathfrak{F}$. — Nous allons mettre en évidence des quantités qui soient des fonctions du système (T). Pour cela nous représenterons ce système par son tableau moyen, pour lequel

$$\alpha + \beta' + \gamma'' = 0, \tag{36}$$

qui se déduit d'un tableau quelconque $|T|$ correspondant au même système en retranchant $\frac{\alpha + \beta' + \gamma''}{3}|\tau|$. Le tableau

$$|\mathfrak{T}_1| = 3\,F\left(|T| - \frac{\alpha + \beta' + \gamma''}{3}|\tau|\right) = \mathfrak{F}(|T|)$$

correspond à un système, à coefficients entiers, que nous représenterons par

$$(\mathfrak{T}_1) = \mathfrak{F}[(T)].$$

Les formules relatives à l'opération $\mathfrak{F}$ se déduisent sans difficulté de celles relatives à l'opération F, en supposant que le tableau $|T'|$ vérifie la condition (36). Remarquons d'abord que, dans ce cas, K prend la forme

$$K' = \frac{J}{27} + \frac{I}{3}\sigma - \sigma^3, \tag{37}$$

les coefficients

$$J = 27\,K, \qquad I = 3(\alpha_1 + \beta'_1 + \gamma''_1) \tag{38}$$

étant des entiers, toutes les fois que le tableau considéré est dérivé par la formule (26) d'un tableau à coefficients entiers. Si d'ailleurs le système (T) est défini par un tableau $|T|$ ne vérifiant pas la condition (36), on ramène sans difficulté l'expression (35) à la forme (37) par le changement de variable

$$\sigma' = \sigma + \frac{\alpha + \beta' + \gamma''}{3},$$

et les expressions de I et J en fonction des coefficients de ce tableau

sont

$$(39)\quad \begin{cases} I = 3(\alpha_1 + \beta'_1 + \gamma''_1) + (\alpha + \beta' + \gamma'')^2, \\ J = 27K - 9(\alpha + \beta' + \gamma'')(\alpha_1 + \beta'_1 + \gamma''_1) - 2(\alpha + \beta' + \gamma'')^3. \end{cases}$$

Ayant écrit les expressions de I et de J dans le cas général, revenons au cas où l'on définit le système (T) par son tableau moyen. On a dans ce cas, par définition de l'opération $\mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(|T_1| + \sigma|T|) &= 3F\left(|T_1| + \sigma|T| - \frac{\alpha_1 + \beta'_1 + \gamma''_1}{3}|\tau|\right), \\ &= 3F\left[|T_1| + \sigma|T| - \sigma^2|\tau| + \left(\sigma^2 - \frac{I}{9}\right)|\tau|\right]. \end{aligned}$$

En tenant compte des formules (32) et (34), et négligeant les termes en $|\tau|$, on trouve comme expression de ce tableau

$$3K'|T| + 3\left(\sigma^2 - \frac{I}{9}\right)(|T_1| + \sigma|T|) = 3\left(\sigma^2 - \frac{I}{9}\right)|T_1| + \left(\frac{J}{9} + \frac{2}{3}I\sigma\right)|T|.$$

Passant de ce tableau au système correspondant, remplaçant (T_1) par $\frac{1}{3}(\mathfrak{T}_1)$ et la lettre σ par la lettre ρ, on trouve

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{3}(\mathfrak{T}_1) + \rho(T)\right] = \left(\frac{J}{9} + \frac{2}{3}I\rho\right)(T) + \left(\rho^2 - \frac{I}{9}\right)(\mathfrak{T}_1),$$

puis, en tenant compte de l'homogénéité des formules (29) et introduisant un paramètre ρ_1,

$$(40)\qquad \mathcal{F}[\rho(T) + \rho_1(\mathfrak{T}_1)] = (2I\rho\rho_1 + J\rho_1^2)(T) + (\rho^2 - I\rho_1^2)(\mathfrak{T}_1).$$

Cette formule montre bien les substitutions résultant, parmi les systèmes

$$\rho(T) + \rho_1(\mathfrak{T}_1),$$

de l'opération $\mathcal{F}$.

19. *Formules concernant les entiers* I *et* J. — Appelons I_1 et J_1 ce que deviennent I et J lorsqu'on remplace le système (T) par son transformé $(\mathfrak{T}_1)$, et I′ et J′ ce qu'ils deviennent lorsqu'on remplace le système (T) par le système

$$(S) = \rho(T) + \rho_1(\mathfrak{T}_1).$$

La formule (40) permet de calculer ces quantités.

Pour $\rho = 0$, $\rho_1 = 1$, cette formule devient

$$(41) \qquad (\mathfrak{T}_2) = \mathfrak{F}(\mathfrak{T}_1) = J(T) - I(\mathfrak{T}_1).$$

Nous pouvons maintenant avoir deux expressions de $\mathfrak{F}(\mathfrak{T}_2)$, l'une en remplaçant ρ et ρ_1 par J et $-$I dans la formule (40), l'autre en remplaçant (T) par $(\mathfrak{T}_1)$ dans la formule (41); il vient ainsi

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(\mathfrak{T}_2) &= -I^2 J(T) + (J^2 - I^3)(\mathfrak{T}_1)\\ &= J_1(\mathfrak{T}_1) - I_1(\mathfrak{T}_2) = -I_1 J(T) + (J_1 + II_1)(\mathfrak{T}_1).\end{aligned}$$

Or les systèmes (T) et $(\mathfrak{T}_1)$ sont *distincts*, en ce sens qu'un système ne peut être mis que d'une seule manière sous la forme

$$c(T) + c_1(\mathfrak{T}_1).$$

(Nous reviendrons plus loin sur ce point; il est évident que dans les cas exceptionnels où il n'en est pas ainsi, l'opération $\mathfrak{F}$ n'introduisant pas un nouveau système, toutes les formules écrites deviennent sans intérêt.) En comparant les deux expressions de $\mathfrak{F}(\mathfrak{T}_2)$, on a donc

$$(42) \qquad I_1 = I^2, \qquad J_1 = J^2 - 2I^3.$$

On peut opérer de même en partant du système ($\mathfrak{s}$). La formule (40) donne son transformé ($\mathfrak{s}_1$). On peut calculer $\mathfrak{F}(\mathfrak{s}_1)$, soit en remplaçant ρ par ρ_1 dans la formule (40) par $2I\rho\rho_1 + J\rho_1^2$ et $\rho^2 - I\rho_1^2$, soit en remplaçant (T), $(\mathfrak{T}_1)$, I et J dans la formule (41) par ($\mathfrak{s}$) ($\mathfrak{s}_1$), I′ et J. Remplaçant encore dans cette formule ($\mathfrak{s}$) et ($\mathfrak{s}_1$) par leurs expressions en fonction de (T) et $(\mathfrak{T}_1)$ et identifiant les deux expressions trouvées pour $\mathfrak{F}(\mathfrak{s}_1)$, il vient, tous calculs faits,

$$(43) \qquad \begin{cases} I' = I^2\rho_1^2 + J\rho\rho_1 + I\rho^2, \\ J' = (J^2 - 2I^3)\rho_1^3 + 3IJ\rho\rho_1^2 + 6I^2\rho^2\rho_1 + J\rho^3. \end{cases}$$

Le discriminant de l'expression (37) est, au facteur numérique 27 près, $J^2 - 4I^3$. D'après les formules précédentes, il se transforme par l'opération $\mathfrak{F}$ en

$$(44) \qquad (J'^2 - 4I'^3) = (J^2 - 4I^3)(J\rho_1^3 + 3I\rho\rho_1^2 - \rho^3)^2.$$

22. *Les systèmes exceptionnels.* — En général, le système $(\mathfrak{T}_1)$, quoique équivalent algébriquement au système initial (T), est *distinct*

de lui, en ce sens que les coefficients de ces deux systèmes ne sont pas proportionnels. Lorsqu'ils le sont, nous dirons que le système (T) est *exceptionnel*.

La formule (32) montre que, parmi les tableaux correspondant à un système exceptionnel, il y en a un et un seul qui, transformé par l'opération F, donne un tableau multiple du tableau $|\tau|$. On démontre aisément qu'il est à coefficients entiers. Il suffit évidemment de le démontrer dans l'hypothèse où les coefficients du système (T) sont premiers entre eux. Dans ce cas, si $|T'|$ est un quelconque des tableaux correspondant à ce système, on a évidemment

$$F(|T'|) = c_1|T'| + c_2|\tau|,$$

c_1 et c_2 étant entiers. Le tableau à coefficients entiers

$$|T| = |T'| - c_1|\tau|,$$

d'après la formule (32), est alors tel que

$$F(|T|) = c|\tau|.$$

La répétition de l'opération F, d'après la formule (33), donne un tableau $K|T|$ multiple de $|T|$; mais le second membre, transformé par cette opération, donne $-c^2|\tau|$, comme on le voit en faisant $|T| = 0$, $\sigma = c$ dans la formule (32). La comparaison de ces deux résultats entraîne $c = K = 0$.

Parmi les tableaux correspondant à un système exceptionnel (T), il y en a donc un et un seul qui, transformé par l'opération F, donne un tableau identiquement nul. Nous l'appellerons *tableau exceptionnel* correspondant au système (T). Il est à coefficients entiers si le système est à coefficients entiers.

Les expressions de I et J, et la formule de définition de l'opération $\mathcal{F}$, en tenant compte toujours de la formule (32), deviennent, dans le cas d'un système exceptionnel,

$$(45) \qquad I = (\alpha + \beta' + \gamma'')^2, \qquad J = -2(\alpha + \beta' + \gamma'')^3,$$

$$(46) \qquad \mathcal{F}(T) = -(\alpha + \beta' + \gamma'')(T).$$

α, β', γ'' étant les coefficients du tableau exceptionnel correspondant

au système considéré. On en déduit

$$(47) \qquad J^2 - 4I^3 = 0.$$

23. *Les systèmes exceptionnels dérivés d'un système donné.* — Soient (T) un système non exceptionnel. |T| son tableau moyen. Son transformé ($\mathfrak{T}_1$) par l'opération $\mathfrak{F}$ est distinct de lui. La formule (40) montre alors que la condition pour qu'un système dérivé de (T), c'est-à-dire de la forme

$$(\mathfrak{S}) = \rho(T) + \rho_1(\mathfrak{T}_1),$$

soit exceptionnel, est

$$\frac{2I\rho\rho_1 + J\rho_1^2}{\rho} = \frac{\rho^2 - I\rho_1^2}{\rho_1},$$

c'est-à-dire

$$(48) \qquad J\rho_1^3 + 3I\rho\rho_1^2 - \rho^3 = 0.$$

Ce résultat peut se déduire des formules des n^os^ **17** et **18** sans utiliser la formule (40). Le système ($\mathfrak{S}$) est en effet, à un facteur constant près, d'après la formule (32), celui qui correspond au tableau

$$|T'_1| = F(|T'|) = F(|T| + \sigma|\tau|), \qquad \left(\sigma = \frac{\rho}{3\rho_1}\right).$$

La répétition de l'opération F, d'après la formule (33), donne le tableau $K'|T'|$, correspond certainement à un système distinct de celui auquel correspond $|T'_1|$, sauf si $K' = 0$. La condition nécessaire et suffisante pour que le système ($\mathfrak{S}$) soit exceptionnel est donc

$$K' = \frac{J}{27} + \frac{I}{3}\sigma - \sigma^3 = 0.$$

En remplaçant σ par sa valeur, on retrouve la condition (48).

Parmi les systèmes dérivés de (T), il y en a donc trois, déterminés chacun à un facteur constant près, qui sont exceptionnels. La condition pour que deux soient confondus est

$$(49) \qquad J^2 - 4I^3 = 0.$$

Dans ce cas, le système ($\mathfrak{S}$), correspondant à la racine double de l'équation (48), sera dit *système exceptionnel double* dérivé de (T). Les systèmes dérivés de (T) étant les mêmes que ceux dérivés d'un

quelconque des systèmes (s) autres que les systèmes exceptionnels, la formule (49) entraîne la formule analogue

$$J'^2 - 4I'^3 = 0. \tag{50}$$

C'est bien ce que montrait d'une manière plus précise la formule (44). Cette formule, ou la formule (47) applicable à tout système exceptionnel, montre de plus que l'égalité (50) est vérifiée, même si l'égalité (49) ne l'est pas, pour les trois systèmes exceptionnels dérivés de (T).

Dans le cas où la condition (49) est vérifiée, on a pour le système exceptionnel double dérivé de (T)

$$I' = J' = 0. \tag{51}$$

Ces formules se déduisent en effet, en tenant compte des expressions (43) de I′ et J′, du fait que $\frac{\rho}{\rho_1}$ est une racine double de l'équation (48). Inversement, si la condition (51) est vérifiée pour un système *exceptionnel* (s) dérivé de (T) (cela ne fait qu'une condition puisque $J'^2 - 4I'^3$ est nul de toute façon), on vérifie aisément que la valeur de $\frac{\rho}{\rho_1}$ correspondant à (s) est une racine double de l'équation (48). La condition (51) est donc *nécessaire et suffisante* pour qu'un système exceptionnel (s), dérivé de (T), soit double. Il est à remarquer qu'elle ne dépend que du système exceptionnel considéré, et non du système (T) dont il est dérivé, ce qui n'était nullement évident *a priori*. On peut donc employer sans ambiguïté l'expression système *exceptionnel double*.

D'après l'expression (45) des entiers I et J relatifs à un système exceptionnel, la condition (51), qui indique qu'un tel système est double, indique aussi que son tableau exceptionnel est identique à son tableau moyen, c'est-à-dire, d'après la définition même de l'opération $\mathfrak{F}$, que son transformé par cette opération est identiquement nul.

Il peut arriver que les trois systèmes exceptionnels dérivés de (T) soient confondus. Étant donnée la forme de l'équation (48), la condition pour qu'il en soit ainsi est

$$I = J = 0.$$

Dans ce cas, il y a un système *exceptionnel triple dérivé de* (T), pour lequel la condition (51) est certainement vérifiée. Mais on ne peut pas reconnaître d'après les coefficients de ce système s'il en est ainsi. Nous verrons qu'étant donné un système exceptionnel double quelconque (8), on peut toujours trouver des systèmes (T) tel que (8) soit un système exceptionnel triple dérivé de (T).

24. *Recherche directe des systèmes exceptionnels.* — Chaque système exceptionnel étant représenté d'une manière unique par son tableau exceptionnel, il nous suffit de trouver la forme générale d'un tel tableau. Les conditions pour qu'un tableau $|T|$ soit exceptionnel s'obtiennent, d'après la définition même, en annulant les coefficients de son transformé $|T_1|$, donnés par les formules (29).

Il résulte d'abord des neuf premières de ces formules que le déterminant δ a pour adjoint

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda\mu' & \lambda\mu'' \\ \lambda'\mu & \lambda'\mu' & \lambda'\mu'' \\ \lambda''\mu & \lambda''\mu' & \lambda''\mu'' \end{vmatrix} = 0. \tag{52}$$

Il est donc nul. A cette condition près, nous pouvons choisir d'une manière quelconque les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$. Choisissons ensuite λ et μ de manière que

$$\lambda\mu = (\alpha).$$

Les autres coefficients $\lambda', \lambda'', \mu', \mu''$ sont déterminés par les formules

$$\mu\lambda' = (\beta), \qquad \mu\lambda'' = (\gamma),$$
$$\lambda\mu' = (\alpha'), \qquad \lambda\mu'' = (\alpha'').$$

Dans ces conditions, on vérifie aisément que toutes les autres formules obtenues en annulant les coefficients de $|T_1|$ sont vérifiées. Ainsi on a

$$\mu_1 = \mu\alpha + \mu'\alpha' + \mu''\alpha'' = \frac{1}{\lambda}[\alpha(\alpha) + \alpha'(\alpha') + \alpha''(\alpha'')] = \frac{\delta}{\lambda} = 0,$$

$$\beta'_1 = \lambda'\mu' \quad (\beta') = \frac{\lambda\mu' \times \lambda'\mu}{\lambda\mu} = \frac{(\alpha')(\beta)}{(\alpha)} = 0.$$

puisque $(\alpha)(\beta') - (\beta)(\alpha') = \delta\gamma'' = 0$.

On voit donc que, pour former un tableau exceptionnel, on peut choisir arbitrairement par exemple huit des coefficients du déterminant δ, et le coefficient λ. Les formules qui donnent les six autres coefficients sont d'ailleurs rationnelles et homogènes. Les tableaux exceptionnels dépendent donc d'une manière rationnelle et homogène de neuf paramètres.

Le mode de formation qui précède suppose que (α) ne soit pas nul. Si ce mineur était nul, on pourrait choisir à la place un quelconque des mineurs de δ. Enfin, si le déterminant δ a tous ses mineurs nuls, il est de la forme

$$\begin{vmatrix} lm & lm' & lm'' \\ l'm & l'm' & l'm'' \\ l''m & l''m' & l''m'' \end{vmatrix}.$$

Et des groupes de coefficients λ, λ', λ'' et μ, μ', μ'', l'un est identiquement nul (soit le premier), l'autre vérifiant une relation (soit $m\mu + m'\mu' + m''\mu'' = 0$). Comme on ne restreint rien en supposant par exemple $l = 1$, les tableaux ainsi formés dépendent d'une manière homogène de sept paramètres, soit deux de moins que dans le cas général. On vérifie d'ailleurs sans peine que tous les tableaux pour lesquels (α) est nul s'obtiennent comme limite du cas général. Il en résulte que, si nous considérons les coefficients d'un tableau comme des coordonnées homogènes dans un espace E_{14} à 14 dimensions, les points correspondant à des tableaux exceptionnels constituent une variété unicursale V' à 8 dimensions.

Les coefficients d'un système peuvent de même être considérés comme les coordonnées homogènes dans un espace E_{13} à 13 dimensions, dont chaque point correspond à une droite de l'espace E_{14}. Comme deux tableaux exceptionnels distincts donnent nécessairement deux systèmes exceptionnels distincts, les points de l'espace E_{13} correspondant à des systèmes exceptionnels, que nous appellerons *points exceptionnels*, constituent également une variété V unicursale à 8 dimensions [1], qu'on peut considérer comme la projection de V', si l'on considère l'espace E_{13} comme un plan dans l'espace E_{14}. Tandis

[1] Les calculs qui précèdent ne sont d'ailleurs pas nécessaires pour trouver ce nombre de dimensions (*voir* la note du n° **27**).

que la variété V′ a toutes ses équations du second degré, celles de la variété V sont du troisième degré. Pour le voir, représentons chaque point A de l'espace E_{13} par le tableau moyen correspondant, soit $|T|$. A sera exceptionnel si l'on peut déterminer σ de manière que le tableau $F(|T| + \sigma|T|)$ ait ses coefficients α, β', γ'' égaux et les autres nuls (car alors il sera de la forme $c|\tau|$, avec $c = 0$, d'après le n° **22**). Les équations ainsi obtenues sont du second degré par rapport à l'ensemble des coefficients et de σ, et *linéaires en* σ; l'élimination de σ donne bien des équations du troisième degré.

Au point de vue arithmétique, nous devons chercher les tableaux exceptionnels à coefficients entiers. Lorsqu'on a choisi les neuf premiers coefficients entiers et annulant le déterminant δ, tous les éléments du déterminant (52) sont connus. S'ils sont premiers entre eux dans leur ensemble, les six derniers coefficients λ, λ', λ'', μ, μ', μ'' sont déterminés au signe près; s'ils admettent un plus grand commun diviseur ayant n diviseurs, il y a (en tenant compte du signe) $2n$ systèmes de déterminations.

23. *Nombre de relations distinctes d'un système exceptionnel.* — Soit un système exceptionnel (S), représenté par son tableau exceptionnel $|S|$. L'opération F, consistant à combiner les équations de ce système d'après les formules (27) et (28), donne des équations identiquement vérifiées. On a donc

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} &(\lambda' H' - \lambda'' H'' + \alpha) E + (\lambda' H - \lambda'' G' + \alpha') E' + (\lambda' G'' + \lambda'' H + \alpha'') E'' = 0,\\ &(\lambda'' G - \lambda H' + \beta) E + (\lambda'' H'' - \lambda H + \beta') E' + (\lambda'' H' - \lambda G'' + \beta'') E'' = 0,\\ &(\lambda H'' - \lambda' G + \gamma) E + (\lambda G' - \lambda' H'' + \gamma') E' + (\lambda H - \lambda' H' + \gamma'') E'' = 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations du système (S) ne sont donc pas indépendantes. Cela ne veut pas dire d'ailleurs que deux de ces équations, par exemple

$$(54)\qquad E = E' = 0,$$

entraînent la troisième. En effet, d'après les identités (53), on peut conclure que l'on a, soit $E'' = 0$, soit

$$(55)\qquad \lambda' G'' - \lambda'' H + \alpha'' = \lambda'' H' - \lambda G'' + \beta'' = \lambda H - \lambda' H' + \gamma'' = 0.$$

Ces dernières équations se réduisent à deux distinctes, en vertu de

$$\lambda''_1 = \lambda\alpha'' + \lambda'\beta'' + \lambda''\gamma'' = 0,$$

et l'on vérifie aisément, en tenant compte de ce que le tableau $|S|$ est exceptionnel, qu'elles entraînent les équations (54).

En utilisant la représentation des périodes dans l'espace à 6 dimensions, on énonce le résultat obtenu en disant que l'intersection des quadriques (54) se décompose. Une partie est la variété linéaire à 4 dimensions définie par les équations (55). L'autre est située sur la quadrique $E'' = 0$, de sorte que ses points correspondent à des systèmes de périodes vérifiant le système (S). Ces systèmes de périodes dépendent donc de 4 paramètres, et non de 3, comme ce serait le cas pour un système non exceptionnel.

CHAPITRE III.

GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE E_{13}.

26. *Définition des droites* D *dans l'espace* E_{13}. — Considérons de nouveau l'espace E_{13} défini au n° **24**, dans lequel nous avons défini la variété V, lieu des points exceptionnels. Les systèmes de périodes dérivés d'un système donné non exceptionnel sont évidemment représentés par tous les points d'une droite. Nous dirons qu'une telle droite est une *droite* D. On peut dire encore qu'une droite D est une droite joignant un point non exceptionnel à son dérivé par l'opération $\mathcal{F}$.

On retrouve la même droite si l'on part d'un quelconque de ses points qui ne soit pas exceptionnel. Donc par tout point non exceptionnel passe une droite D et une seule; ces droites dépendent évidemment de 12 paramètres.

Sur une droite D sont situés trois points exceptionnels, distincts ou non. Une droite joignant deux points exceptionnels n'est pas en général une droite D. Un couple de points exceptionnels dépend en effet de 16 paramètres; il y a donc quatre conditions à vérifier pour que la droite qui les joint soit une droite D. Nous dirons dans ce cas

que les deux points considérés sont *associables* (¹), et que les systèmes (ou les tableaux) exceptionnels qui leur correspondent sont associables. Sur la droite qui les joint est alors situé un troisième point exceptionnel associable aux deux précédents.

Il est évident que deux systèmes exceptionnels associables ne constituent que trois relations distinctes entre les périodes, puisqu'ils sont dérivés d'un même système non exceptionnel. Au contraire, deux systèmes exceptionnels non associables constituent *en général* 4 relations distinctes (nous verrons plus loin un autre cas d'exception où elles se réduisent à 3).

27. *Définition et classification des variétés* L. — Considérons un système de périodes, vérifiant certains systèmes de relations singulières, représentés dans l'espace E_{13} par des points A, A′, ... Par l'opération $\mathcal{J}$ et par des combinaisons linéaires, ces opérations pouvant être répétées, on peut obtenir de nouveaux systèmes de relations singulières vérifiées par les périodes données. Géométriquement, les points correspondant à ces systèmes s'obtiennent en considérant les droites D passant par les points A, A′, ..., puis la variété linéaire à 2, 3, ..., dimensions définies par les droites ainsi obtenues, et recommençant ces opérations. On augmente ainsi le nombre de dimensions de la variété obtenue, jusqu'à ce qu'on arrive à une variété jouissant des deux propriétés suivantes : 1° être linéaire; 2° contenir toutes les droites D dont elle contient au moins un point non exceptionnel; en d'autres termes, si B est un point non exceptionnel de la variété obtenue, la droite D passant par ce point est contenue dans cette variété. Nous appellerons cette variété *variété* L (linéaire) *déterminée par les points donnés* A, A′, ...

En posant le problème sous forme géométrique, on est conduit à élargir un peu les termes du problème initial, et chercher à étudier la variété L définie par des points en nombre quelconque, sans se demander si les systèmes de relations singulières correspondants sont compatibles ou non, c'est-à-dire sans se demander s'il existe une

(¹) Nous dirons d'une manière générale que deux points, *exceptionnels ou non*, sont *associables*, si la droite qui les joint est une droite D.

variété s qui lui corresponde dans l'espace E_6. C'est à ce point de vue que nous nous placerons dans le présent Chapitre.

Nous diviserons ces variétés en plusieurs catégories.

Une première catégorie comprendra les *variétés* L *dont tous les points sont exceptionnels;* ces variétés peuvent être définies aussi comme variétés linéaires situées sur la variété V. Elles jouent un rôle tout à fait particulier, étant déterminées en partant de certains de leurs points sans faire intervenir l'opération $\mathfrak{J}$. Nous les appellerons des plans II. Nous appellerons droites Δ celles qui n'ont qu'une dimension, et pour les autres nous indiquerons le nombre de dimensions par un indice (qui pourra être 2, 3 ou 4).

Si une variété L à n dimensions contient des points non exceptionnels, elle est un lieu de droites D dépendant de $n-1$ paramètres et contenant chacune trois points exceptionnels. Le lieu des points exceptionnels se compose alors de trois nappes ([1]); chaque point exceptionnel pouvant être obtenu une infinité de fois, ces nappes peuvent avoir moins de $n-1$ dimensions; appelons n_1, n_2, n_3 leurs nombres de dimensions respectifs.

En admettant, ce qui sera démontré plus loin (n° **28**), que toute droite qui coupe les trois nappes (et a par suite au moins trois points exceptionnels) est une droite D, on obtient aisément la relation ([2])

$$n_1 + n_2 + n_3 = 2n - 2.$$

Nous diviserons les variétés considérées en trois nouvelles catégories suivant que 1, 2 ou 3 des nombres n_1, n_2, n_3 sont inférieurs

---

([1]) Certaines droites Δ peuvent, comme nous le verrons, être obtenues comme limites de droites D. Il peut arriver que des droites de cette nature constituent une nappe *spéciale*, en plus des trois nappes qui existent toujours dans une variété L.

([2]) Les droites qui joignent un point de la première nappe à un point de la seconde dépendent de $n_1 + n_2$ paramètres; il y a $n-1-n_3$ conditions à remplir pour qu'une telle droite coupe la troisième nappe, et le nombre de paramètres restants est évidemment égal à $n-1$. La formule obtenue est applicable en particulier à l'espace E_{13} tout entier, qui est une variété L, et montre, la variété V ne pouvant se décomposer en nappes algébriquement distinctes, que cette variété est bien à 8 dimensions.

à $n-1$, c'est-à-dire suivant que 1, 2, ou 3 des nappes formées par les points exceptionnels sont composées de points obtenus chacun une infinité de fois.

Dans le premier cas, on a

$$n_1 = 0, \qquad n_2 = n_3 = n - 1;$$

la variété L est alors composée de droites D passant par un point fixe. Nous appellerons une telle variété un *plan* $\mathfrak{P}$.

Dans le deuxième cas, on a

$$n_1 + n_2 = n_3 = n - 1;$$

toute droite joignant un point de la première nappe à un point de la seconde est alors une droite D; en d'autres termes, chaque point de la première nappe est associable à tous les points de la seconde; nous dirons que ces deux nappes constituent deux variétés *associables*. (Nous dirons aussi qu'une variété est *associée* à une autre si elle est, soit le *lieu de tous les points* associables à tous ceux de l'autre, soit *le lieu de tous les points exceptionnels* jouissant de ladite propriété. La variété L considérée, lieu de droites s'appuyant sur deux variétés associables, sera appelée *variété* $\mathfrak{L}$.

Dans le troisième cas, la variété L sera appelée *variété* $\mathfrak{M}$. On a dans ce cas

$$n_1 + n_2 + n_3 = 2n - 2 = 3n - 6;$$

n est donc au moins égal à 4.

Nous indiquerons toujours le nombre de dimensions de ces variétés en affectant les lettres $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ d'un indice.

Nous définirons d'une manière complète tous les types de variétés II, $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{L}$. Pour les variétés $\mathfrak{M}$, qui sont plus complexes, nous nous contenterons d'indiquer des exemples.

Nous utiliserons autant que possible des raisonnements géométriques, ne faisant appel au calcul que pour donner au raisonnement géométrique le point de départ indispensable. Les calculs deviennent d'ailleurs rapidement compliqués, et il nous arrivera de prendre des exemples numériques pour savoir, entre plusieurs éventualités, que le raisonnement géométrique aura montré comme logiquement possibles à l'exclusion de toutes autres, laquelle est réalisée.

28. *Variété* L *déterminée par deux points exceptionnels.* — Considérons d'abord deux tableaux quelconques $|S|$ et $|S'|$ correspondant à des systèmes représentés par des points distincts A et A'. Les tableaux $\rho|S| + \rho'|S'|$ correspondent de même aux points de la droite AA'. Les coefficients du tableau transformé par l'opération F sont des fonctions homogènes et du second degré des coefficients de ce tableau, de sorte que

$$F(\rho|S| + \rho'|S'|) = \rho^2|S_1| + \rho\rho' F(|S|, |S'|) + \rho'^2|S'_1|,$$

F(...) désignant une nouvelle opération définie par cette formule même. Le tableau obtenu par cette opération a évidemment ses coefficients linéaires et homogènes par rapport à ceux des tableaux composants. S'il est identiquement nul, nous dirons que les tableaux composants sont *conjugués*. Les tableaux conjugués d'un tableau donné sont représentés par les points d'un plan dans l'espace E_{14}, et par suite aussi les points d'un plan dans l'espace E_{13} (plan désignant une variété linéaire à un nombre quelconque de dimensions). Mais les tableaux conjugués des différents tableaux correspondant à un même point de l'espace E_{13} ont pour lieu, non un plan, mais des plans différents.

Supposons maintenant les tableaux $|S|$ et $|S'|$ exceptionnels. La formule précédente devient

$$F(\rho|S| + \rho'|S'|) = \rho\rho'|T|, \tag{56}$$

en posant $|T| = F(|S|, |S'|)$. Montrons que ce tableau est exceptionnel. En effet, la répétition de l'opération $|F|$ conduit, étant donnée la formule (33), à un tableau de la forme

$$K(\rho|S| + \rho'|S'|) = \rho^2\rho'^2 F(|T|).$$

Le second membre représente un tableau correspondant à un point indépendant du rapport $\frac{\rho}{\rho'}$. Il en est donc de même du premier, ce qui n'est possible que si $K = 0$. Le second membre est alors nul aussi, c'est-à-dire que $|T|$ est exceptionnel.

Trois cas sont alors possibles, exclusifs l'un de l'autre.

Premier cas. — Le tableau $|T|$ *est identiquement nul;* en d'autres

termes, $|S|$ et $|S'|$ sont conjugués. La formule (56) montre alors que tous les tableaux $\rho|S| + \rho'|S'|$ sont exceptionnels, c'est-à-dire que tous les points de la droite AA' sont exceptionnels. Cette droite est une droite Δ.

Deuxième cas. — Le tableau $|T|$ n'étant pas nul, et n'étant pas non plus multiple du tableau $|\tau|$ puisque ce dernier n'est pas exceptionnel, correspond à un point B *situé sur la droite* AA'. Ce point, d'après la formule (56), peut être obtenu par l'opération F en partant de n'importe quel point M de la droite AA' autre que A et A'. La droite MB, c'est-à-dire la droite AA', est donc une droite D dont les points exceptionnels sont A, A' et B.

Troisième cas. — C'est le cas général; les points A et A' ne sont ni associables ni conjugués. Le tableau $|T|$ correspond alors à un point exceptionnel B *non situé sur* AA'. Comme dans le cas précédent, M étant un point de AA' autre que A et A', on voit que la droite MB est une droite D.

Remarquons d'abord que le point B, déduit de M par l'opération F, étant distinct de lui, le point M ne peut être exceptionnel. La droite AA' ne contient pas d'autres points exceptionnels que A et A'. *Une droite qui n'est ni une droite* D *ni une droite* Δ *contient donc au plus deux points exceptionnels.*

Le plan (à 2 dimensions) défini par les points A, A' et B est un lieu de droites D passant par B (toutefois il ne résulte pas encore de ce qui précède que les deux droites AB et $A'B$ sont des droites D). Il constitue donc la variété L cherchée, ou plan $\mathfrak{L}_2$, dont on ne peut sortir par l'opération $(\mathfrak{J})$; cela est évident lorsqu'on part d'un point non situé sur AB et $A'B$, et vrai à la limite pour les points de ces deux droites, qui sont des droites D ou dans certains cas des droites Δ. Ce plan, dont tous les points sont associables à B, est *associable* à B.

Quel est, dans ce plan $\mathfrak{L}_2$, le lieu des points exceptionnels? Nous savons qu'une droite passant par B le coupe en B et en deux autres points; une droite ne passant pas par B le coupe en deux points au plus, ou bien fait partie du lieu. Il en résulte que le lieu se compose du point B, point isolé, et d'une conique C. Cette conique peut

d'ailleurs, comme nous le verrons plus loin, soit se décomposer en deux droites, soit passer par le point B.

On retrouve évidemment le même plan $\mathfrak{P}_2$ en remplaçant A et A′ par deux points non associables sur cette conique; rien ne distingue ceux choisis initialement. Le choix des points A et A′ introduisant 16 paramètres, et chaque plan $\mathfrak{P}_2$ étant obtenu une double infinité de fois, ces plans dépendent de 14 paramètres. Ceux associables à B dépendent donc de $14 - 8 = 6$ paramètres.

29. *Nouvelles formules relatives à l'opération* $\mathfrak{F}$. — Avant de continuer l'étude des variétés L, indiquons quelques conséquences de la formule (56), dans le cas où les tableaux $|S|$ et $|S'|$ sont associables, de sorte que le tableau $|T|$, que nous désignerons ici par $|S''|$, correspond au troisième point exceptionnel A″ de la droite AA′. Supposons ces trois points exceptionnels distincts. Les sommes $\alpha + \beta' + \gamma''$ relatives aux tableaux $|S|$, $|S'|$, $|S''|$ ne sont pas nulles; on peut les supposer égales à 1, à condition de multiplier ces tableaux par des facteurs constants, de sorte que la formule (56) et les formules analogues obtenues en échangeant les points A, A′ et A″ s'écrivent

$$(57)\qquad \begin{cases} F(|S'|, |S''|) = c|S|, \\ F(|S''|, |S|) = c'|S'|, \\ F(|S|, |S'|) = c''|S''|, \end{cases}$$

c, c', c'' étant des facteurs constants.

On déduit de ces formules et de la formule (32)

$$F(|S|, \rho'|S'| + \rho''|S''|) = \rho''c'|S'| + \rho'c''|S''|,$$
$$F(|S|, -\rho|S| + |\tau|) = |S| - |\tau|.$$

Or, pour des valeurs convenables de ρ, ρ', ρ'', on a

$$(58)\qquad \rho|S| + \rho'|S'| + \rho''|S''| = |\tau|.$$

L'identification des deux formules précédentes donne alors

$$\rho = 1, \qquad \rho''c' = -\rho', \qquad \rho'c'' = -\rho,$$

d'où, en permutant les indices,

$$\rho = \rho' = \rho'' = 1, \qquad c = c' = c'' = -1.$$

Les formules (57) et (58) s'écrivent donc

$$(59)\qquad \begin{cases} F(|S'|, |S''|) = -|S|, \\ F(|S''|, |S|) = -|S'|. \\ F(|S|, |S'|) = -|S''|, \end{cases}$$

$$(60)\qquad |S| + |S'| + |S''| = |\tau|.$$

Introduisons maintenant l'opération $\mathcal{F}$. On a, d'après la définition de cette opération, la formule (32) et les formules (59) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\rho'|S'| + \rho''|S''|] &= 3F\left[\rho'|S'| + \rho''|S''| - \tfrac{1}{3}(\rho' + \rho'')|\tau|\right] \\ &= 3F(\rho'|S'| - \rho''|S''|) - (\rho' + \rho'')(\rho'|S'| + \rho''|S''|) + C|\tau| \\ &= -3\rho'\rho''|S| - (\rho' + \rho'')(\rho'|S'| + \rho''|S''|) + C|\tau|, \end{aligned}$$

et par suite, en tenant compte de la formule (60),

$$(61)\qquad \mathcal{F}[\rho'(S') + \rho''(S'')] = \rho'(2\rho'' - \rho')(S') + \rho''(2\rho' - \rho'')(S''),$$

formule qui comprend comme cas particulier les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(S) &= -(S), & \mathcal{F}[(S') - (S'')] &= 3(S), \\ \mathcal{F}(S') &= -(S'), & \mathcal{F}[(S'') - (S)] &= 3(S'), \\ \mathcal{F}(S'') &= -(S''), & \mathcal{F}[(S) - (S')] &= 3(S''). \end{aligned}$$

Ces formules montrent bien la substitution résultant de l'opération ($\mathcal{F}$) pour les points d'une droite D dont les trois points exceptionnels sont distincts. On voit en particulier qu'un de ces trois points peut être obtenu par l'opération ($\mathcal{F}$), soit, ainsi qu'il est évident, en partant de ce point lui-même, soit en partant de son conjugué harmonique par rapport aux deux autres.

Les quantités I et J relatives aux systèmes (S), (S'), (S'') sont, d'après les formules (45), égales à 1 et 2. Par suite, celles relatives au système $\rho'(S') + \rho''(S'')$ sont

$$\begin{aligned} I &= \rho'^2 + \rho''^2 - \rho'\rho'', \\ J &= -2\rho'^3 - 2\rho''^3 + 3\rho'\rho''(\rho' + \rho'') + a\rho'\rho''(\rho' - \rho''), \end{aligned}$$

a étant un coefficient convenable. Pour le déterminer, il suffit d'appliquer la formule (42), qui donne les relations entre les quantités I et J relatives à un système et son transformé par l'opération $\mathcal{F}$, au

système $(S') - (S'')$ par exemple. Il vient $a = 0$ et, par suite,

$$(62) \qquad \begin{cases} I = \rho'^2 + \rho''^2 - \rho'\rho'', \\ J = -2\rho'^3 - 2\rho''^3 + 3\rho'\rho''(\rho' + \rho''). \end{cases}$$

Il est à remarquer que les formules (61) et (62) n'ont que des coefficients numériques bien déterminés. Aucun coefficient ne dépend de la droite D considérée.

30. Si l'on transforme des systèmes de relations singulières par une transformation d'Hermite d'ordre 1, il est bien évident que les systèmes (S), (S'), (S'') correspondant aux trois points exceptionnels d'une droite D auront pour transformés les systèmes (T), (T'), (T'') correspondant aux trois points exceptionnels d'une autre droite D.

Nous avons vu au n° **10** qu'au tableau $|S|$ correspond, par une telle transformation, un tableau $|T|$ qui s'en déduit par une formule linéaire et homogène, et pour lequel $\alpha + \beta' + \gamma''$ a la même valeur, soit 1; on déduit de plus aisément des formules du n° **10** que $|T|$, qui correspond évidemment au système exceptionnel (T), est le tableau exceptionnel de ce système.

Dans ces conditions, il résulte évidemment des formules (61) et (62) :

1° Que l'opération $\mathcal{F}$ et la transformation considérée sont permutables;

2° Que les quantités I et J sont des invariants.

La somme $\alpha + \beta' + \gamma''$ étant invariante dans la transformation des coefficients par la formule (22), nous voyons de plus :

1° Que l'opération F et la transformation considérée sont permutables;

2° Que les quantités $\alpha_1 + \beta'_1 + \gamma''_1$ et K sont des invariants.

Si la transformation d'Hermite considérée n'était pas d'ordre 1, au lieu d'invariants absolus on aurait des invariants relatifs, et de même le produit de cette transformation et des opérations F ou $\mathcal{F}$ donnerait un résultat indépendant, à un facteur constant près, de l'ordre des opérations.

31. *Lieu des points associables à un point exceptionnel* B. — Nous avons montré au n° **28** l'existence de plans $\mathfrak{P}_2$, formés de droites D passant par un point B. Cela nous conduit à chercher d'une manière générale le lieu de toutes les droites D passant par un point exceptionnel donné B, ou en d'autres termes le lieu des points associables à B.

Nous savons déjà que ces droites D dépendent de $12 - 8 = 4$ paramètres. D'autre part, les plans $\mathfrak{P}_2$ associables à B dépendent de 6 paramètres. En faisant la section de la figure par un plan ne passant pas par B, les traces des droites D passant par B constituent donc une variété à 4 dimensions, comprenant des droites dépendant de 6 paramètres; ce ne peut être qu'une variété linéaire ou se décomposant en plusieurs parties, dont une plane. Le lieu des droites D passant par B est donc un plan $\mathfrak{P}_5$, à moins qu'il ne se décompose en plusieurs parties, dont l'une serait un tel plan.

Nous allons montrer qu'une pareille décomposition est impossible.

Soit P le plan $\mathfrak{P}_5$ qui fait en tout cas partie du lieu. Lorsque le point B se déplace infiniment peu sur la variété V, ce déplacement dépendant de 8 paramètres, les points du plan P voisins de B dépendent linéairement de $8 + 5 = 13$ paramètres. Ils sont tous distincts, puisque par chaque point (autres que ceux de la variété V) ne passe qu'une droite D. Ils constituent donc toute la portion d'espace voisine de B. Dans cette portion d'espace, il ne peut évidemment exister d'autres droites D que celles obtenues (puisqu'il n'en passe qu'une par chaque point). Par le point B ne passe donc aucune autre droite que celles dont le lieu constitue le plan $\mathfrak{P}_5$.

Ce plan sera dit *plan* $\mathfrak{P}_5$ *associé à* B. Dans ce plan sont situés évidemment des plans $\mathfrak{P}_3$ et $\mathfrak{P}_4$, dépendant respectivement de 6 et 4 paramètres, associables à B.

De ce qui précède, résulte qu'il existe un point exceptionnel B et un seul associable à deux points exceptionnels donnés A et A′, *qui ne soient pas conjugués*. Les points A et A′, et par suite deux points non exceptionnels quelconques M et M′ de la droite AA′, sont en effet dans le plan $\mathfrak{P}_3$ associé au point cherché B; ce point est alors bien défini, si A et A′ ne sont pas associables, comme intersection des deux droites D déterminées respectivement par les points M et M′; si A et A′ sont

associables, ces deux droites D sont confondues avec AA′, et B est le troisième point exceptionnel de cette droite.

32. *Quadrique* Q *associée au point exceptionnel* B. — Le lieu des points exceptionnels associables à B est la même chose que le lieu des points exceptionnels autres que B dans le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B. Nous savons que sa section par un plan $\mathfrak{P}_2$ associable à B est une conique. C'est donc une *quadrique* (variété à 4 dimensions définie à l'intérieur du plan $\mathfrak{P}_5$ par une équation du second degré). Nous l'appellerons *quadrique* Q *associée à* B.

Il est important pour la suite de savoir si le discriminant de cette quadrique est nul. Nous allons montrer qu'il ne l'est pas en général; il suffit pour cela de former un exemple numérique dans lequel il ne le soit pas.

Partons du tableau $|T|$ de coefficients

$$\begin{array}{lllll} \alpha = 1, & \beta = 0, & \gamma = -1, & \lambda = 0, & \mu = 2, \\ \alpha' = -1, & \beta' = 3, & \gamma' = 5, & \lambda' = 1, & \mu' = -3, \\ \alpha'' = 2, & \beta'' = 1, & \gamma'' = 2, & \lambda'' = -1, & \mu'' = 0, \end{array}$$

qui n'est pas exceptionnel, puisque $\delta = 8 \neq 0$, mais dont le transformé $|T_1| = F(|T|)$ est exceptionnel, puisque $K = 0$. Appelons A et B les points de l'espace E_{13} correspondant aux tableaux $|T|$ et $|T_1|$, et cherchons à définir le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B, qui comprend évidemment le point A.

A chaque point non exceptionnel de ce plan correspondent des tableaux dépendant d'une manière linéaire et homogène de 2 paramètres, tableaux dont un (ou plutôt deux, égaux et de signe contraire), transformé par l'opération F, donne le tableau $|T_1|$. Au plan $\mathfrak{P}_5$ correspondent ainsi des tableaux dépendant d'une manière linéaire et homogène de 7 paramètres, que nous regarderons comme des coordonnées cartésiennes dans un espace à 7 dimensions. Dans cet espace, les tableaux qui, transformés par l'opération F, donnent le tableau $|T_1|$, constituent une variété à 5 dimensions; ces tableaux sont définis par les formules (29), si l'on remplace dans ces formules les seconds membres $\alpha_1, \ldots, \mu_1''$ par les coefficients de $|T_1|$. Le plan tangent à cette variété au point qui représente le tableau $|T|$ s'obtient

aisément par différentiation, et l'on peut exprimer les tableaux correspondant aux différents points de ce plan en fonction de 5 paramètres, soit par exemple les coefficients λ, λ', λ'' et deux autres paramètres t et t'. On trouve ainsi :

$$\alpha = t, \qquad \alpha' = -3\lambda' - 4\lambda'' - 2t,$$
$$\beta = t', \qquad \beta' = 3\lambda - 3\lambda'' - 2t',$$
$$\gamma = \lambda - \lambda'' + t' - 2, \qquad \gamma' = 2\lambda + 3\lambda' + 2\lambda'' - 2t' + 4,$$
$$\alpha'' = -4\lambda' - 7\lambda'' - t,$$
$$\beta'' = 4\lambda - \lambda'' - t',$$
$$\gamma'' = 6\lambda + \lambda' + \lambda'' - t' + 2,$$
$$\mu = 10\lambda - 9\lambda' - 22\lambda'' - t - 5t' - 10,$$
$$\mu' = 4\lambda - 4\lambda'' + t - 3t' - 8,$$
$$\mu'' = -3\lambda + 3\lambda'' - 3t + t' + 6.$$

Ces tableaux correspondent dans l'espace E_{13} à des points du plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B. En rendant les formules homogènes par l'introduction d'un nouveau paramètre $\frac{u}{2}$, et ajoutant un septième paramètre u' aux expressions de α, β', γ'', on a l'expression générale des tableaux qui correspondent aux points du plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B.

En écrivant que ces tableaux sont exceptionnels, on a des équations du second degré. Pour avoir des équations ne faisant intervenir que les coefficients du système, il suffit d'éliminer u'; les six autres paramètres peuvent être considérés comme des coordonnées homogènes dans l'espace E_{13}. Les équations obtenues, comme il fallait s'y attendre, ont un facteur commun du second degré qui, égalé à zéro, donne l'équation de la quadrique Q; les autres facteurs ne donnent aucun autre point que le point B. On trouve ainsi, comme équation de la quadrique Q,

$$\lambda t + \lambda' t' + \lambda''(\lambda - \lambda'' + t' - u) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une somme ou différence de 6 carrés indépendants, ce qui établit le résultat énoncé.

Chaque quadrique Q contient alors :

1° Des droites Δ, dépendant de 5 paramètres; celles qui passent par un point donné dépendent de 2 paramètres; on peut se repré-

senter leur disposition en remarquant que le cône qu'elles forment, coupé par une variété linéaire à 3 dimensions, donne une quadrique (donc une quadrique d'un espace ordinaire);

2° Des plans Π_2, constituant deux séries simplement infinies; ceux qui passent par un point donné constituent deux séries simplement infinies; il y en a deux qui contiennent une droite donnée.

33. *Propriétés spéciales aux points exceptionnels doubles.* — Nous savons qu'il y a une condition à vérifier pour qu'un système exceptionnel soit double. Les *points exceptionnels doubles*, correspondant aux systèmes exceptionnels doubles, forment donc sur la variété V une variété W à 7 dimensions. Les droites Δ ou plans Π situés sur cette variété seront appelés *droites* Δ *doubles*, *plans* Π *doubles*. Les points exceptionnels, droites Δ, plans Π qui ne sont pas doubles, seront dits *simples*.

En général, la quadrique Q associée à un point B ne contient pas ce point, qui est alors un point exceptionnel *simple* sur les droites D passant par ce point. Les deux autres points sont alors en général distincts et viennent se confondre pour les droites touchant la quadrique Q. Le lieu des points exceptionnels doubles sur cette quadrique est donc son intersection avec le plan polaire de B. Une droite Δ simple située sur Q ne contient donc qu'un tel point; de même un plan Π_2 contient une droite de points exceptionnels doubles. Il existe un nombre fini de plans Π_2 de chaque système dont tous les points sont exceptionnels doubles.

Il peut arriver que la quadrique Q contienne le point B. Le plan tangent à Q est alors un lieu de points M, en général non exceptionnels, et tels par suite que la droite MB soit une droite D ayant ses trois points exceptionnels confondus en B qui est alors un point exceptionnel *double*. D'après le n° **23**, on a dans ce plan $I = J = 0$, et par suite son intersection avec la quadrique Q a tous ses points exceptionnels doubles; c'est le lieu d'une double infinité de droites Δ doubles ou de deux séries simplement infinies de plans Π_2 doubles. Les autres points de la quadrique Q sont simples.

Donc, dans les deux cas, le lieu des points exceptionnels doubles situés sur cette quadrique est son intersection avec le plan polaire de B.

Dans le premier cas, où B est un point exceptionnel simple, les droites D passant par ce point ne peuvent y toucher la variété V (qui est d'ordre 3; or une telle droite ne peut être située sur la variété V et la coupe déjà en trois points dont deux, situés sur Q, ne peuvent venir en B). Donc le plan $\mathfrak{P}_5$ qui contient la quadrique Q n'a aucune droite commune avec le plan tangent en B à la variété V. Au contraire, si B est un point exceptionnel double, le plan $\mathfrak{P}_5$ est tout entier dans ce plan tangent. En effet, toute droite de ce plan passant par B est une droite D admettant ce point comme point exceptionnel double et un autre point exceptionnel A; elle touche en B la quadrique Q associée à A, et par suite la variété V, qui contient cette quadrique.

On peut se demander si les droites Δ sont des cas particuliers des droites D (d'une manière précise : si chaque droite Δ est une position limite de droites D). Si une droite Δ passant par un point B est une position limite de droites D, elle doit être dans le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B (puisque le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à un point exceptionnel varie d'une manière continue avec ce point); elle est évidemment dans le plan tangent en B à la variété V. D'après ce qui précède, ces deux conditions ne sont compatibles que si B est un point exceptionnel double, c'est-à-dire, puisque c'est un point quelconque de la droite considérée, si cette droite est une droite Δ double.

Par contre, une droite Δ passant par un point exceptionnel double B et située sur la quadrique Q associée à ce point est évidemment une position limite de droites D (il en résulte une nouvelle démonstration du fait que tous ses points sont exceptionnels doubles). Les autres droites Δ passant par B ne sont pas dans le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B et ne peuvent pas, par suite, être obtenues comme limites de droites D *dont un point exceptionnel tende vers* B.

Nous verrons plus loin que les droites Δ doubles que l'on peut obtenir ainsi comme limites de droites D ne constituent pas toutes les droites Δ doubles, mais dépendent d'un paramètre de moins. Elles sont alors sur la quadrique Q associée à n'importe lequel de leurs points.

34. *Relations entre l'espace* E_{13} *et l'espace* E_{14}. — Si l'on passe de l'espace E_{13} à l'espace E_{14}, au plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B correspond un plan P_6 à 6 dimensions, et à la quadrique Q une quadrique Q', à 5 dimensions, de ce plan. Si l'on représente chaque point de Q, non par

un tableau quelconque qui lui corresponde, mais par son tableau exceptionnel, on obtient sur Q′ un lieu de points dépendant de 4 paramètres; nous allons montrer que c'est une section plane.

Soit en effet une droite D passant par B et ayant ses points exceptionnels A, A′ et B distincts; soient $|S|$, $|S'|$, $|S''|$ les tableaux exceptionnels correspondant à ces trois points multipliés par un facteur tel que $\alpha + \beta' + \gamma''$ devienne égal à 1, de manière à pouvoir appliquer les formules du n° **29**. Le tableau

$$|S| + |S'| = |\tau| - |S''|$$

étant un tableau qui correspond à B, le tableau $|S| - |S'|$ est le tableau moyen correspondant au point B′ conjugué de B par rapport à AA′. Les tableaux moyens correspondant à tous les points du plan polaire de B dans la quadrique Q, et le tableau $|\tau| - |S''|$, qui est indépendant de la droite AA′B choisie, définissent alors dans le plan P_6 une variété linéaire P_5 à 5 dimensions qui contient tous les tableaux $|S| + |S'|$ et $|S| - |S'|$, et par suite tous les tableaux $|S|$ et $|S'|$, ce qui démontre le résultat annoncé.

Le raisonnement précédent suppose que le point exceptionnel B soit simple; le résultat est évidemment vrai à la limite si ce point est double.

Le plan P_6 contient, en dehors du plan P_5, un seul point b représentant un tableau exceptionnel, celui qui correspond à B. Si ce point est double, le point b lui-même est situé dans le plan P_5.

Le résultat obtenu n'était nullement évident *a priori*. Si l'on représente certains tableaux exceptionnels d'une part dans l'espace E_{13}, d'autre part dans l'espace E_{14}, la première figure, qu'on peut considérer comme la perspective de la seconde, n'en donne l'image exacte que si celle-ci est dans un plan ne contenant pas les projetantes. C'est le cas pour les quadriques Q; c'est aussi le cas pour les droites Δ (qui sont sur les quadriques Q; on le déduit aussi aisément du n° **28**, les tableaux exceptionnels correspondant aux points d'une telle droite, étant de la forme $\rho|S| + \rho'|S'|$), et par suite pour tous les plans Π. La condition $\alpha + \beta' + \gamma'' = 0$, qui exprime qu'un tableau exceptionnel est double, étant linéaire, on s'explique que les points doubles d'une quadrique Q constituent une section plane et que ceux d'un plan Π soient

donnés par une équation linéaire. Mais sur l'ensemble de la variété V, les points exceptionnels sont définis par l'équation $I = 0$, qui est du second degré.

35. *Détermination directe des droites* Δ. — L'étude des variétés L nous a conduit, dès le n° **27**, à prévoir l'existence possible de droites Δ, situées tout entières sur la variété V. Les résultats du n° **32** nous montrent que ces droites existent effectivement, et que l'ensemble d'une quadrique Q et d'une droite Δ située sur elle dépend de $8 + 5 = 13$ paramètres. Mais nous ne savons pas encore de combien de paramètres dépendent les droites Δ. Nous allons montrer qu'elles dépendent de 11 paramètres, et il en résultera que chacune d'elles est située sur une double infinité de quadriques Q.

Pour obtenir une droite Δ, il suffit, d'après le n° **28**, de prendre les tableaux exceptionnels $|S|$ et $|S'|$ correspondant à deux de ses points, et d'écrire que

$$F(\rho|S| + \rho'|S'|) = \rho\rho' F(|S|, |S'|) = 0. \tag{63}$$

Le tableau $|S|$ étant un tableau exceptionnel donné, et ne tenant pas compte d'abord de ce que $|S'|$ est exceptionnel, cela impose à première vue aux coefficients du tableau $|S'|$ quinze relations, qui se déduisent aisément des formules (29); mais elles ne sont évidemment pas distinctes. En effet, ces relations indiquent que le point représentant le tableau $\rho|S| + \rho|S'|$ dans l'espace E_{14} décrit, lorsque ρ varie, une droite tangente pour $\rho' = 0$ à la variété V′ lieu des points exceptionnels; en d'autres termes, elles indiquent que le point représentant le tableau $|S'|$ est dans une variété linéaire tangente à la variété V′ et ayant par suite comme celle-ci 8 dimensions; elles ne constituent donc que six relations distinctes. (Nous supposons que le point considéré est un point ordinaire de la variété V. Nous verrons au n° **40** que des circonstances différentes se présentent si le tableau $|S|$ est exceptionnel double.)

Nous allons montrer que, en tenant compte des six relations qui expriment que $|S'|$ est exceptionnel, elles se réduisent à trois relations seulement.

Désignons par $a, b, c, l, m, \ldots, m''$ les coefficients du tableau (S),

par $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \ldots, \mu''$ ceux du tableau $|S'|$. Parmi les équations déduites des formules (29) qui expriment que le système $\rho|S| + \rho'|S'|$ est exceptionnel, prenons par exemple les six équations obtenues en annulant les coefficients $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \mu_1, \mu'_1, \mu''_1$ relatifs à ce système. En les développant, il vient

$$(64)\quad \begin{cases} (\rho m + \rho'\mu)(\rho a + \rho'\alpha) + (\rho m' + \rho'\mu')(\rho a' + \rho'\alpha') + (\rho m'' + \rho'\mu'')(\rho a'' + \rho'\alpha'') = 0, \\ (\rho m + \rho'\mu)(\rho b + \rho'\beta) + (\rho m' + \rho'\mu')(\rho b' + \rho'\beta') + (\rho m'' + \rho'\mu'')(\rho b'' + \rho'\beta'') = 0, \\ (\rho m + \rho'\mu)(\rho c + \rho'\gamma) + (\rho m' + \rho'\mu')(\rho c' + \rho'\gamma') + (\rho m'' + \rho'\mu'')(\rho c'' + \rho'\gamma'') = 0; \\ (\rho l + \rho'\lambda)(\rho m + \rho'\mu) = (\rho b' + \rho'\beta')(\rho c'' + \rho'\gamma'') - (\rho b'' + \rho'\beta'')(\rho c' + \rho'\gamma'), \\ (\rho l + \rho'\lambda)(\rho m' + \rho'\mu') = (\rho b'' + \rho'\beta'')(\rho c + \rho'\gamma) - (\rho b + \rho'\beta)(\rho c'' + \rho'\gamma''), \\ (\rho l + \rho'\lambda)(\rho m'' + \rho'\mu'') = (\rho b + \rho'\beta)(\rho c' + \rho'\gamma') - (\rho b' + \rho'\beta')(\rho c + \rho'\gamma). \end{cases}$$

En tenant compte de ce que $|S|$ et $|S_1|$ sont exceptionnels, les termes en ρ^2 et ρ'^2 disparaissent, et $\rho\rho'$ vient en facteur, comme le montre d'ailleurs la formule (63). Ces équations sont donc en réalité indépendantes de ρ et ρ' et nous pouvons en profiter pour choisir les valeurs de ρ et ρ' qui simplifient le plus les formules, soient $\rho = \lambda$, $\rho' = -l$; nous pouvons d'ailleurs, en raison de l'homogénéité des formules, supposer $l = \lambda = 1$ sans diminuer la généralité du résultat. Il vient ainsi

$$(65)\quad \begin{cases} (m - \mu)(a - \alpha) + (m' - \mu')(a' - \alpha') + (m'' - \mu'')(a'' - \alpha'') = 0, \\ (m - \mu)(b - \beta) + (m' - \mu')(b' - \beta') + (m'' - \mu'')(b'' - \beta'') = 0, \\ (m - \mu)(c - \gamma) + (m' - \mu')(c' - \gamma') + (m'' - \mu'')(c'' - \gamma'') = 0; \end{cases}$$

$$(65')\qquad \frac{b - \beta}{c - \gamma} = \frac{b' - \beta'}{c' - \gamma'} = \frac{b'' - \beta''}{c'' - \gamma''}.$$

Il s'agit de montrer que ces équations, réduites déjà à cinq distinctes, se réduisent à trois en tenant compte de celles qui expriment que $|S|$ et $|S'|$ sont exceptionnels, notamment des relations

$$\begin{aligned} m &= b'c'' - b''c', & \mu &= \beta'\gamma'' - \beta''\gamma', \\ m' &= b''c - bc'', & \mu' &= \beta''\gamma - \beta\gamma'', \\ m'' &= bc' - b'c, & \mu'' &= \beta\gamma' - \beta'\gamma. \end{aligned}$$

Soient $\overline{OB}$ dans l'espace ordinaire le vecteur de composantes b,

b', b''; $\overline{OC}$ celui de composantes c, c', c''; $\overline{OM}$ celui de composantes m, m', m'', produit vectoriel des précédents. Désignons par $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$, $\overline{OM'}$ les vecteurs analogues relatifs au tableau $|S'|$. Les relations (65′) expriment que $\overline{BB'}$ et $\overline{CC'}$ sont parallèles. On a alors géométriquement

$$\overline{OM'} = \overline{OB'}.\overline{OC'} = (\overline{OB} + \overline{BB'})(\overline{OC} + \overline{CC'}) = \overline{OM} + \overline{BB'}.\overline{OC} + \overline{CC'}.\overline{OB}.$$

De cette formule résulte que $\overline{MM'}$ est perpendiculaire à la direction commune de $\overline{BB'}$ et $\overline{CC'}$, c'est-à-dire que les deux dernières formules (65) sont vérifiées. Les formules (65) et (65′) se réduisent bien à trois formules distinctes seulement.

Les tableaux exceptionnels conjugués à $|S|$ dépendent donc de $8 - 3 = 5$ paramètres. Ils représentent dans l'espace E_{14} une variété à 5 dimensions, évidemment non décomposable, située comme nous l'avons vu dans une variété linéaire à 8 dimensions (représentant tous les tableaux conjugués à $|S|$), et définie dans celle-ci par des équations du second degré. Il en est de même dans l'espace E_{13} pour les points correspondants, puisque le passage de l'espace E_{14} à l'espace E_{13} peut ici être considéré comme la perspective d'une variété linéaire à 8 dimensions sur une autre.

Le choix du point A′, tel que AA′ soit une droite Δ, dépend donc de $8 - 3 = 5$ paramètres. Le choix de deux points exceptionnels AA′ tels que AA′ soit une droite Δ, en d'autres termes le choix d'une droite Δ et de deux points situés sur elles, dépend donc de $8 + 5 = 13$ paramètres.

Les droites Δ dépendent alors de $13 - 2 = 11$ paramètres, comme nous l'avions annoncé. Celles qui passent par un point donné A dépendent de 4 paramètres. Chacune est située sur une infinité de quadriques Q dépendant de $13 - 11 = 2$ paramètres.

36. *Détermination générale des tableaux conjugués.* — Ce qui précède résout la question de la recherche de deux tableaux conjugués, dont un au moins est exceptionnel. Il reste à traiter le cas où aucun

des tableaux considérés $|T|$ et $|T'|$ (¹) n'est exceptionnel. Le raisonnement que nous allons faire est d'ailleurs applicable lorsqu'un des tableaux est exceptionnel, mais non lorsqu'ils le sont tous les deux. $|T|$ et $|T'|$ étant conjugués, on a

$$(66) \qquad F(\rho|T| + \rho'|T'|) = F(\rho|T| - \rho'|T'|) = \rho^2|T_1| + \rho'^2|T'_1|.$$

Le tableau ainsi obtenu, résultant par l'opération F de deux tableaux *distincts*, et n'étant pas nul, est exceptionnel (puisque la répétition de l'opération F doit donner un tableau multiple à la fois des tableaux $\rho|T| + \rho'|T'|$ et $\rho|T| - \rho'|T'|$, et par suite nul). Soit B le point de l'espace E_{13} correspondant à ce tableau. Les tableaux $\rho|T| + \rho'|T'|$ et $\rho|T| - \rho'|T'|$, qui conduisent au point B par l'opération F, correspondent donc à des points du plan $\mathcal{P}_5$ associé à B; les tableaux $|T|$ et $|T'|$ correspondent donc à deux points M et M′ de ce plan, qui est alors ainsi que B indépendant de ρ et de ρ'.

La droite MM′ contient alors deux points exceptionnels A et A′, autres que B. Supposons-les distincts, le résultat obtenu étant vrai à la limite s'ils sont confondus (²). Désignons par $|S|$ et $|S'|$ les tableaux exceptionnels correspondants. Le tableau $F(|S|, |S'|)$ est, d'après le n° **28**, un tableau exceptionnel correspondant à B, et les tableaux $|T|$ et $|T'|$ sont de la forme

$$\rho|S| + \rho'|S'| + \rho''|\tau|, \qquad \sigma|S| + \sigma'|S'| + \sigma''|\tau|.$$

D'après la formule (66) ces tableaux, transformés par l'opération F, donnent un tableau correspondant à B, ce qui entraîne $\rho'' = \sigma'' = 0$. La condition pour qu'ils soient conjugués est ensuite

$$F(\rho|S| + \rho'|S'|, \sigma|S| + \sigma'|S'|) = (\rho\sigma' + \rho'\sigma)\,F(|S|, |S'|) = 0,$$

c'est-à-dire que M et M′ sont conjugués par rapport à A et A′, c'est-à-dire par rapport à la quadrique Q associée à B.

(¹) Nous réservons les lettres S et S′ pour les tableaux ou systèmes exceptionnels.

(²) Remarquons qu'une droite ayant deux points exceptionnels confondus se distingue d'une droite n'ayant qu'un point exceptionnel parce qu'elle touche la variété V et parce que les droites D passant par ses différents points sont concourantes, de sorte qu'elle est dans un plan $\mathcal{P}_2$.

On a alors la règle suivante, qui donne la manière la plus générale de former deux tableaux conjugués : *prendre dans un même plan* $\mathfrak{P}_5$ *associé à un point* B *deux points* A *et* A′ *conjugués par rapport à la quadrique* Q *située dans ce plan, et choisir, parmi les tableaux correspondant à ces points, ceux qui conduisent au point* B *par l'opération* F.

Il est à remarquer qu'une droite D est située dans les trois plans $\mathfrak{P}_5$ associés respectivement à ses trois points exceptionnels B, B′, B″. En prenant deux points de cette droite conjugués par rapport à BB″ ou à BB′, on aura deux points *conjugués* (c'est-à-dire auxquels on pourra faire correspondre des tableaux conjugués); mais, bien qu'ils soient dans le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B, on ne pourra les obtenir par application de la règle précédente qu'en remplaçant B par B′ et B″.

On peut déduire de la règle précédente le lieu des points conjugués d'un point donné A.

Si A est exceptionnel, ce lieu comprend deux parties : d'une part, le plan (à 8 dimensions) tangent en A à la variété V ; à chaque point de ce plan correspond un tableau conjugué du tableau exceptionnel $|T|$ qui correspond à A ; d'autre part, le plan polaire de A dans la quadrique Q associée à A ; à chacun de ses points correspond un tableau conjugué du tableau $|T| - |\tau|$ (d'après le n° **29**, $|T|$ étant déterminé, comme à ce numéro, par la condition $\alpha + \beta' + \gamma'' = 1$).

Si A n'est pas exceptionnel, il y a trois points exceptionnels, distincts ou non, dérivés de A. A chacun de ces points correspond une partie du lieu cherché, qui est le plan polaire de A dans la quadrique associée à ce point. Pour obtenir ces trois plans, il suffit de représenter A par les trois tableaux correspondant à ce point et conduisant par l'opération F aux trois points exceptionnels; les tableaux conjugués de ces trois tableaux correspondent respectivement à ces trois plans.

37. *Détermination générale des variétés associables; plans* π_2 *et* π'_2. — Soient A et A′ deux points exceptionnels donnés. S'ils ne sont pas conjugués, qu'ils soient associables ou non, nous avons vu (n° **31**) qu'il n'existe qu'un point qui leur soit associable. Supposons-les maintenant conjugués, c'est-à-dire que AA′ est une droite Δ, et cherchons le lieu des points exceptionnels B associables à A et A′.

Remarquons d'abord que, A et A′ étant dans le plan $\mathcal{P}_5$ associé à un point du lieu, la droite AA′ y est située tout entière, et les points cherchés sont associables à tous ceux de cette droite. De même, si B et B′ sont deux points du lieu, ils sont conjugués (sinon il ne pourrait exister deux points A et A′ associables à ces deux points), et la droite BB′, située tout entière dans le plan $\mathcal{P}_5$ associé à n'importe quel point de AA′, a tous ses points associables à ceux de AA′ et appartient au lieu. Le lieu est donc une variété linéaire associable à AA′.

Or nous avons vu, n° **35**, qu'une droite Δ est située sur une double infinité de quadriques Q, ce qui revient à dire que le choix d'un point du lieu dépend de 2 paramètres. Ce lieu est donc un plan Π_2, *associé* à la droite AA′, évidemment situé sur la quadrique Q associée à n'importe quel point de AA′.

On peut être tenté de penser, d'après cela, qu'il existe une correspondance biunivoque entre les droites Δ et les plans Π_2 associés à ces droites. Ce n'est pas le cas. De cette hypothèse résulterait en effet que le choix d'un plan Π_2 et d'un point A de la droite associée, ou, ce qui revient au même, d'un plan Π_2 et d'une quadrique Q le contenant, dépendrait de $11 + 1 = 12$ paramètres. Or, chaque quadrique Q ne contenant qu'une triple infinité de plans Π_2, ce choix ne peut dépendre que de 11 paramètres.

Cette circonstance nous oblige à conclure qu'un plan Π_2, associé à une droite Δ, l'est à une infinité; le lieu de ces droites, associé à n'importe quelle droite du plan considéré, est un plan analogue. Nous voyons ainsi que les plans en question s'associent deux à deux, de manière que chaque point de l'un soit associable à chaque point de l'autre. Nous appellerons deux tels plans *plans* π_2 *et* π'_2 *associés*, et nous réserverons désormais la désignation de *plans* Π_2 aux plans qui ne peuvent être ainsi obtenus comme associés d'une droite Δ et ont, par suite, un seul point qui leur soit associable et sont sur une seule quadrique Q.

Un couple de plans π_2 et π'_2 associés, évidemment bien déterminé par n'importe quelle droite d'un des deux plans, et contenant une double infinité de telles droites, dépend de $11 - 2 = 9$ paramètres.

Ce qui précède résout complètement le problème de la détermination des variétés associables. A moins que l'une d'elles ne se réduise à

un point, deux variétés associables sont situées respectivement dans deux plans π_2 et π'_2 associés.

38. *Plans π_2 et plans Π_2.* — Il existe des plans Π_2, au sens restreint que nous venons de donner à cette désignation. En effet, chaque droite Δ est située sur un seul plan π_2 associé à un plan π'_2; d'autre part elle est sur une double infinité de quadriques Q, celles associées aux points de π'_2, qui contiennent évidemment π_2. Chacune de ces quadriques contient un plan, autre que π_2, passant par la droite Δ. C'est donc un plan Π_2, et, comme un tel plan n'est situé que sur une quadrique Q, la droite Δ est sur une double infinité de plans Π_2, tous distincts.

Ces plans dépendent de 11 paramètres (chaque quadrique Q en contenant une triple infinité).

Sur chaque quadrique Q, les plans π_2 et les plans Π_2 sont évidemment les plans des deux systèmes différents. Donc le plan $\mathfrak{P}_3$, déterminé par un point B et un plan de la quadrique Q associée à ce point, coupe cette quadrique suivant ce plan, et un autre appartenant à l'autre catégorie. On remarque également que, sur une quadrique Q associée à un point exceptionnel B, il existe deux séries de plans passant par ce point; les uns sont des plans π_2 doubles; les autres des plans Π_2 doubles.

On peut se demander si, outre les plans Π_2 dont nous venons d'établir l'existence, il en existe qui ne soient sur aucune quadrique Q. La réponse est négative. Remarquons d'abord que si deux droites d'un tel plan étaient sur une quadrique Q, le plan tout entier, composé de points exceptionnels du plan $\mathfrak{P}_3$ contenant cette quadrique, serait aussi sur elle. Il suffit donc de montrer que deux droites Δ, qui se coupent, sont sur une même quadrique Q.

Or, d'après le n° **35**, les droites Δ passant par un point donné dépendent de 4 paramètres et constituent un cône non décomposable. Si donc, par un procédé quelconque, on trouve des couples de droites Δ passant par B et dépendant de 8 paramètres, on est sûr de les obtenir tous. Or B est situé sur une quadruple infinité de quadriques Q (associées aux points de la quadrique associée à B), et sur chacune d'elles, le choix de deux génératrices se coupant en B dépend de 4 paramètres;

ces deux génératrices, n'étant pas en général dans un même plan π_2, ne sont que sur une quadrique Q et ne peuvent être obtenues qu'une fois. On a donc des couples distincts de droites Δ se coupant en B, dépendant de 8 paramètres; ce sont tous ceux existant, et chacun d'eux est bien sur une quadrique Q.

39. *Variétés $\mathcal{L}_5$ déterminées par deux plans π_2 et π'_2 associés.* — Les droites qui coupent ces deux plans sont des droites D et dépendent de 4 paramètres si ces deux plans sont distincts. Elles contiennent des points non exceptionnels, tous distincts (puisque par un tel point ne passe qu'une droite D), qui dépendent de 5 paramètres. Les plans π_2 et π'_2 sont donc deux plans qui ne se coupent pas dans une même variété $\mathcal{L}_5$ à 5 dimensions. Par chaque point non exceptionnel de cette variété passe une droite D et une seule, celle qui coupe les plans π_2 et π'_2.

Quelle est, dans la variété $\mathcal{L}_5$, la troisième nappe du lieu des points exceptionnels? C'est (d'après le n° **27**) une variété à 4 dimensions. Toute droite qui n'est ni une droite D ni une droite Δ ayant au plus deux points exceptionnels, cette variété n'est coupée qu'en un point par une droite rencontrant l'un au moins des plans π_2 et π'_2, ou bien la contient tout entière. C'est donc un plan Π_4, que nous appellerons *plan de base* de la variété $\mathcal{L}_5$.

On a vu que le lieu des points exceptionnels doubles dans un plan Π est défini par une équation du premier degré. Il en résulte évidemment que le lieu des points exceptionnels doubles dans la variété $\mathcal{L}_5$ est un plan Π_3 contenu dans le plan de base et déterminé par les intersections de ce plan avec les plans π_2 et π'_2 [1].

Nous savons qu'une droite qui coupe π_2 et π'_2 est en général une

---

[1] Ce résultat est un défaut dans un cas particulier. Si les plans π_2 et π'_2 sont confondus, il existe une variété $\mathcal{L}_5$ lieu de droites D joignant le plan double ainsi obtenu aux points d'un certain plan de base Π_4. Il en passe naturellement toujours une seule de ces droites par les points du plan de base, et une double infinité par les points du plan π_2. Le lieu des points exceptionnels doubles comprend alors ce plan π_2 et un plan Π_3 dans le plan de base. Nous dirons que la variété $\mathcal{L}_5$ ainsi définie est *spéciale*. L'existence de ces variétés sera établie n° **43**.

droite D. Il y a évidemment exception pour celles qui sont situées dans le plan de base, et par suite dans le plan Π_3 lieu des points exceptionnels doubles. Nous retrouvons alors ce résultat, déjà obtenu n° **35**, que certaines droites Δ doubles sont des limites de droites D.

40. *Les variétés $\mathcal{L}_3$ et $\mathcal{L}_4$.* — D'après le n° **37**, deux variétés associables, dont aucune ne se réduit à un point, appartiennent d'une manière unique à deux plans π_2 et π'_2 associés; ce sont soit ces deux plans eux-mêmes, soit l'un de ces plans et une droite de l'autre, soit deux droites. L'étude de la variété $\mathcal{L}$ définie par les deux variétés associables s'effectue dans les deux derniers cas comme nous l'avons fait au numéro précédent pour le premier cas. On trouve des variétés $\mathcal{L}_4$ ou $\mathcal{L}_3$, ayant comme *plans de base* des plans Π_3 ou Π_2. Chacune est située dans une variété $\mathcal{L}_5$ et une seule. Il n'y a pas d'autre type de variété $\mathcal{L}$.

Il n'y a pas non plus évidemment d'autre sous-variété L dans une variété $\mathcal{L}_5$ que les sections planes des plans π_2, π'_2 et Π_4, les variétés $\mathcal{L}_3$ et $\mathcal{L}_4$ que nous venons de définir, les droites D et les plans $\mathfrak{P}_2$ ou $\mathfrak{P}_3$ définis par un point d'un des plans π_2 et π'_2 et par une droite de l'autre ou ce plan lui-même.

Toutes ces variétés ont pour *base* une section du plan de base Π_4. Il est important de remarquer que, pour les variétés contenant au moins un point non exceptionnel, et par suite au moins une droite D passant par chaque point exceptionnel simple, cette base n'est pas une section quelconque du plan Π_4.

Choisissons en effet dans ce plan deux points exceptionnels simples B et B_1. Par chacun de ces points, dans la variété $\mathcal{L}_5$, passe une droite D bien déterminée, que la variété cherchée doit contenir. Soient $AA'B$ et $A_1A'_1B_1$ ces deux droites, les points A, A', A_1, A'_1 étant ceux où elles coupent les plans π_2 et π'_2. En général A et A_1 sont distincts, B et B_1 de même, et la variété L cherchée, appartenant à $\mathcal{L}_5$, et contenant B, B_1 et au moins un point non exceptionnel, contient toute la variété $\mathcal{L}_3$ déterminée par les droites AA_1 et $A_1A'_1$. Elle contient donc aussi le plan Π_2 qui en est la base, et pas seulement la droite BB_1.

De même, si l'on se donne trois points B, B_1, B_2 dans le plan Π_4, et

s'ils ne vérifient pas certaines conditions particulières, il n'y aura en général aucune sous-variété de la variété $\mathcal{L}_5$ qui contienne ce point et au moins un point non exceptionnel. Si l'on veut par exemple qu'il y ait une variété $\mathcal{L}_3$, comme la donnée de B et B_1 suffit pour déterminer cette variété et, par suite, son plan de base Π_2, il faudra que B_2 soit dans ce plan, ce qui constitue deux conditions.

41. *Lieu des droites* Δ *passant par un point exceptionnel* B. — Nous appellerons ce lieu *cône* Γ *de sommet* B. Nous savons déjà que c'est une variété à cinq dimensions, non décomposable, située dans le plan tangent en B à la variété V, que nous appellerons plan $\mathfrak{T}_8$. Ses génératrices passant par B, étant chacune dans un plan π_2 et un seul, se groupent en une triple infinité de plans π_2. Nous allons montrer que le cône Γ est aussi le lieu d'une simple infinité de plans Π_4.

Soit une droite D passant par B; appelons A et A′ ses autres points exceptionnels. Il existe une simple infinité de plans π_2, passant par A, sur la quadrique Q associée à A′, et par suite une infinité de couples de plans π_2 et π'_2 associés contenant respectivement A et A′. Chacun de ces couples détermine une variété $\mathcal{L}_5$, dont le plan de base contient B. Ces plans sont bien distincts, car inversement, chacun d'eux, avec le point A, détermine la variété $\mathcal{L}_5$, et par suite les plans π_2 et π'_2. On a donc une infinité de plans Π_4, passant par B. Le cône Γ, qui n'est pas décomposable, est décrit tout entier par ces plans.

Chaque droite Δ est donc dans un plan Π_4; inversement, elle est dans un seul plan Π_4. Il résulte en effet du n° **38** qu'elle ne peut être sur d'autres variétés linéaires à deux dimensions qu'un plan π_2 unique associé à un plan π'_2, et une double infinité de plans Π_2 (situés respectivement sur chacune des quadriques Q associées aux points de π'_2) dont le lieu est évidemment le plan Π_4 déjà trouvé. La droite Δ n'est donc située dans aucun autre plan Π_2, et par suite dans aucun autre plan Π_4.

Une droite Δ peut donc être considérée, d'une manière et d'une seule, comme l'intersection d'un plan π_2 et d'un plan Π_4. Il en résulte une définition très précise du cône Γ, décrit par ses deux sortes de plans comme une quadrique par ses deux séries de génératrices : deux plans de systèmes différents, sur ce cône, ont une droite commune; deux

plans d'un même système n'ont qu'un point commun, le sommet du cône.

Deux remarques résultent aisément de ce qui précède :

1° Une droite D et un plan Π_4 se coupant en un point B déterminent toujours une variété $\mathcal{L}_5$. En effet, en considérant des variétés $\mathcal{L}_5$ contenant cette droite, nous avons trouvé pour leurs plans de base tous les plans Π_4 contenant B.

2° Les plans Π_4 constituent une famille non décomposable dépendant de cinq paramètres (le choix d'un point de la variété V, et d'un plan Π_4 le contenant dépend en effet de 9 paramètres). Deux de ces plans ont un point commun et un seul. Nous savons déjà en effet qu'ils ne se coupent qu'en un point; les plans Π_4 coupant un plan Π_4 déterminé dépendent alors de cinq paramètres et sont bien tous distincts; ils constituent donc tous les plans Π_4 existants.

42. *Cas où* B *est un point exceptionnel double. Plan* $\mathcal{T}_8$ *tangent en* B *à la variété* V. — Les raisonnements précédents subsistent si le point B est exceptionnel double. Sur une droite D passant par B, un seul point exceptionnel est distinct de B. Prenons ce point pour le point A du raisonnement précédent. Par ce point, sur la quadrique Q associée à B, sont situés une simple infinité de plans π_2; chacun d'eux a pour associé un plan π'_2 contenant B et un plan Π_4 contenant également ce point. Si le plan π_2 varie, A restant fixe, le plan π'_2 décrit le cône intersection de la quadrique associée à A et de son plan tangent en B, et le plan Π_4 décrit tout le cône Γ.

Dans les variétés $\mathcal{L}_5$ définies par ces plans Π_4 et le point A sont situées une triple infinité de droites D contenant A. Chacune de ces droites est obtenue deux fois et deux seulement. Elle admet en effet deux points exceptionnels A′ et A″, autres que A, situés sur le cône Γ. Le plan π'_2 doit comprendre un de ces points; on a alors le choix entre les plans π'_2 définis, l'un par BA′, l'autre par BA″, et chacun d'eux détermine un plan π_2 associé contenant A et situé sur la quadrique Q et une variété $\mathcal{L}_5$ répondant aux conditions du problème.

Faisons maintenant décrire à A la quadrique Q; le plan π_2 est alors un plan π_2 quelconque sur cette quadrique; le plan associé π'_2 est un

plan π'_2 quelconque passant par B. Les variétés $\mathcal{L}_5$ déterminées par ces plans dépendent de trois paramètres. Leur lieu est une variété à huit dimensions, lieu de droites D dépendant de sept paramètres (chacune de ces droites, qui a un seul point exceptionnel A situé sur la quadrique Q et non sur le cône Γ, n'étant obtenue que deux fois). Or nous savons que le plan $\mathcal{P}_8$ tangent en B à la variété B contient la quadrique Q; il contient évidemment le cône Γ, et par suite toutes ces droites D (puisqu'il contient leurs points exceptionnels). C'est donc le lieu des droites D considérées; c'est par suite une variété L, du type $\mathfrak{M}_8$.

Dans cette variété, les trois nappes de points exceptionnels sont évidemment constituées, l'une par la quadrique Q, les deux autres par le cône Γ qui est, d'une part le lieu des plans π'_2 des variétés $\mathcal{L}_5$, d'autre part le lieu de leurs plans de base.

43. Étudions la répartition des droites Δ doubles sur le cône Γ. Remarquons d'abord que chaque plan π_2 simple contient une droite Δ double et que, d'autre part, il existe des plans π_2 doubles; il en existe en effet une simple infinité passant par B et situés sur la quadrique Q associée à ce point. Les droites Δ doubles se répartissent donc en deux catégories, suivant que le plan π_2 contenant la droite considérée est simple ou double. La première catégorie est évidemment la plus générale; les droites de la seconde catégorie seront dites *droites* Δ *spéciales*.

Un plan π'_2 passant par B ne peut être double que s'il est confondu avec le plan π_2 associé, qui est nécessairement sur la quadrique Q. Les plans π_2 doubles passant par B sont donc ceux situés sur cette quadrique; il ne peut en exister d'autres. Les droites spéciales passant par B sont donc de même celles situées sur la quadrique Q associée à ce point; il en existe une double infinité.

Il existe d'autre part évidemment sur le cône Γ une triple infinité de droites Δ doubles non spéciales, passant par B; il en existe une dans chaque plan π_2 simple et celles situées dans chaque plan Π_4 y décrivent un plan Π_3 double. Chacun de ces plans Π_4, et par suite chacun de ces plans Π_3 doubles, contient évidemment un plan Π_2 double situé sur la quadrique Q, lieu des droites spéciales situées dans ce plan et passant par B.

44. Propriétés des droites Δ *spéciales.* — Une propriété *caractéristique* des droites Δ spéciales est que ce sont des cas particuliers, ou plus exactement des positions limites, de droites D. Si en effet une droite D tend vers une droite Δ, ses points exceptionnels ont au moins un point limite B sur cette droite, qui apparaît à la limite comme une droite D passant par B, par suite située dans le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à ce point. Or les droites Δ situées dans ce plan et passant par B sont des droites spéciales.

Inversement, une telle droite est évidemment limite de droite D passant par n'importe quel B choisi sur elle.

Étudions maintenant la répartition des droites spéciales dans un plan Π_4. Elles sont évidemment dans son plan Π_3 double.

Choisissons d'abord dans ce plan une droite non spéciale, soit Δ. Elle définit un plan π_2 la contenant. La variété $\mathfrak{L}_5$ déterminée par ce plan et le plan π'_2 associé a pour plan de base un plan coupant π_2 suivant une droite double; c'est donc le plan Π_4 contenant la droite Δ. Il coupe de même π'_2 suivant une droite double Δ'. Les droites Δ et Δ' sont donc deux droites du plan Π_3 double, liées par une correspondance biunivoque et évidemment réciproque. Toute droite les coupant est évidemment position limite de droites D coupant π_2 et π'_2; c'est donc une droite spéciale.

De ce qui précède résulte que les droites spéciales forment un complexe dans chaque plan Π_3 double. Les droites Δ et Δ' doubles de deux plans π_2 et π'_2 associés sont conjuguées dans ce complexe. En chaque point B, le plan du complexe est le plan commun au plan Π_4 et à la quadrique associée à B.

Lorsque π_2 et π'_2 sont confondus, la variété $\mathfrak{L}_5$ devient une variété spéciale. On voit qu'il existe de telles variétés; celles qui ont un plan de base donné dépendent de trois paramètres. On peut en définir une en choisissant par exemple la droite du complexe, intersection du plan π_2 double et du plan de base; la donnée de cette droite définit le plan π_2 double.

On remarque qu'un plan Π_4 et un plan π_2 double se coupant, se coupent toujours suivant une droite spéciale, et déterminent une variété $\mathfrak{L}_5$. Chaque plan π_2 double est donc dans une double infinité de variétés $\mathfrak{L}_5$ (dont les plans de base sont ceux passant par n'importe

quelle droite de ce plan) tandis qu'un plan π_2 simple n'est que dans une seule variété $\mathcal{L}_5$.

Les résultats précédents nous permettent de préciser la propriété des droites spéciales d'être limites de droites D. Sur une telle droite, choisissons arbitrairement trois points A, A′, A″. Je dis qu'on peut choisir les droites D de manière que leurs trois points exceptionnels tendent respectivement vers A, A′ et A″. En effet, dans le plan Π_3 double contenant la droite donnée, on peut choisir, et même d'une infinité de manières, deux droites Δ et Δ', contenant respectivement A et A′, et conjuguées dans le complexe des droites spéciales; elles déterminent deux plans π_2 et π'_2 associés, et une variété $\mathcal{L}_5$. Dans son plan de base, choisissons un point exceptionnel *simple*, tendant vers A″. La droite D bien déterminée, passant par ce point et coupant π_2 et π'_2, tend vers A A′ A″, et ses points exceptionnels tendent bien vers les trois points A, A′ et A″.

45. *Variété $\mathfrak{M}_9$, lieu des variétés $\mathcal{L}_5$ ayant même plan de base.* — Faisons tout d'abord trois remarques évidentes, qu'il est utile pour la suite d'avoir présentes à l'esprit :

1° Une variété linéaire, lieu de variétés L, est une variété L;

2° L'intersection de deux variétés L est une variété L;

3° Si deux variétés linéaires ayant respectivement N et N′ dimensions ont pour intersection une variété à n dimensions (prendre $n = -1$ s'il n'y a pas de point commun, $n = 0$ s'il n'y en a qu'un), la variété linéaire qu'elle détermine est à $N + N' - n$ dimensions.

Considérons maintenant le lieu des variétés $\mathcal{L}_5$ ayant même plan de base Π_4. On est sûr d'obtenir toutes ces variétés en choisissant dans ce plan un point exceptionnel simple A, et faisant décrire à une droite D le plan $\mathcal{P}_5$ associé à B; chacune de ces droites détermine avec le plan Π_4 une variété $\mathcal{L}_5$, et toutes ces variétés sont distinctes (chaque variété $\mathcal{L}_5$ ayant le plan de base donné contenant une droite D et une seule passant par A. Le lieu cherché est donc la variété linéaire déterminée par le plan de base et le plan $\mathcal{P}_5$ associé à ce point. C'est alors une variété L, du type $\mathfrak{M}_9$. Le plan de base constitue une nappe du lieu des points exceptionnels dans cette variété.

Remarquons que pour un point exceptionnel double B du plan Π_4, ce plan et le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B ont un plan Π_2 commun et ne déterminent par suite qu'une variété linéaire à sept dimensions. C'est le lieu d'une double infinité de plans Π_4 ayant même plan de base, et par suite une variété $\mathfrak{M}_7$ contenue dans la variété $\mathfrak{M}_9$. Elle est évidemment aussi contenue dans le plan $\mathfrak{T}_8$ tangent à B à la variété B, qui apparaît comme décrit par les différentes variétés $\mathfrak{M}_7$ obtenues en laissant B fixe et faisant varier le plan Π_4. De plus, elle constitue toute l'intersection du plan $\mathfrak{T}_8$ et de la variété $\mathfrak{M}_9$; dans ce plan T_8, en effet, d'après le n° **42**, les droites D qui ont un point exceptionnel dans le plan Π_4 considéré, et par suite peuvent appartenir à la variété $\mathfrak{M}_9$, ne dépendent que de six paramètres.

46. *Intersections de plusieurs variétés* $\mathfrak{M}_9$. — Étudions d'abord l'intersection de deux variétés $\mathfrak{M}_9$ et $\mathfrak{M}'_9$, dont nous appellerons les plans de base Π_4 et Π'_4. Deux cas sont à distinguer, suivant que le point exceptionnel B commun à ces deux plans est simple ou double.

Supposons-le d'abord simple. La variété linéaire déterminée par Π_4 et Π'_4, qui n'ont qu'un point commun, est le plan $\mathfrak{T}_8$ à 8 dimensions tangent à la variété V qui n'a lui-même qu'un point commun avec le plan P_5 associé à B. La variété linéaire déterminée par $\mathfrak{M}_9$ et $\mathfrak{M}'_9$ contient alors ces plans $\mathfrak{T}_8$ et $\mathfrak{P}_5$, et par suite comprend tout l'espace E_{13}, et l'intersection de $\mathfrak{M}_9$ et $\mathfrak{M}'_9$ a cinq dimensions, et ne comprend que le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B. Ce cas ne nous conduit donc à définir aucun nouveau type de variété $\mathfrak{M}$.

Supposons maintenant le point B double. Les variétés $\mathfrak{M}_9$ et $\mathfrak{M}'_9$ contiennent alors respectivement des variétés $\mathfrak{M}_7$ et $\mathfrak{M}'_7$ situées dans le plan $\mathfrak{T}_8$ tangent en B à la variété V, qui se coupent donc suivant une variété $\mathfrak{M}_6$. Chacune des variétés $\mathfrak{M}_7$ et $\mathfrak{M}'_7$, définie dans $\mathfrak{T}_8$ par une seule équation linéaire, coupe le plan de base suivant un plan (Π_3 et Π'_3) appartenant à la variété $\mathfrak{M}_6$. Le lieu des points exceptionnels de cette variété est donc constitué par les plans Π_3 et Π'_3 et la quadrique associée à B.

D'ailleurs la variété $\mathfrak{M}_6$ constitue bien toute l'intersection de $\mathfrak{M}_9$ et $\mathfrak{M}'_9$. En effet, cette intersection est un lieu de droites D ayant un point exceptionnel sur l'intersection de Π_4 et $\mathfrak{M}_9$, point dont le lieu

est le plan Π_3; de même un deuxième point exceptionnel de ces droites a pour lieu le plan Π'_3; les droites D de l'intersection, coupant Π_3 et Π'_3, sont dans la variété $\mathfrak{M}_6$ (même si elles les coupent en leur point commun B, car $\mathfrak{M}_6$ comprend le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B).

Remarquons qu'une telle variété $\mathfrak{M}_6$ est parfaitement déterminée par la donnée d'un des plans Π_3 ou Π'_3, par exemple Π_3. Ce plan est d'abord dans un plan Π_4 bien déterminé, ayant un plan Π_3 double déterminé. Le plan Π_3 donné coupe la quadrique Q associée à B, suivant un plan qui est conjugué de B dans le complexe des droites spéciales de Π_4; ce plan étant déterminé comme lieu des points doubles du plan Π_3 donné, cette condition détermine B. La variété $\mathfrak{M}_6$ est alors déterminée par Π_3 et le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B.

Le plan Π_3 donné doit bien entendu ne pas être un plan Π_3 double.

Si le plan Π_3 varie en contenant le même plan Π_2 double (il reste un paramètre), le point B reste fixe, et le plan Π'_4 est mobile autour de ce point. Donc les variétés $\mathfrak{M}'_9$, dont les plans de base Π'_4 décrivent le cône Γ de sommet B, coupent le plan Π_4 suivant un faisceau de plans Π_3 ayant en commun le plan Π_2 intersection de Π_4 et de la quadrique associée à B.

47. Étudions maintenant l'intersection de trois variétés $\mathfrak{M}_9$, $\mathfrak{M}'_9$, $\mathfrak{M}''_9$. Le seul cas intéressant est celui où leurs plans de base se coupent deux à deux en des points exceptionnels doubles B, B′, B″ (B situé sur Π'_4 et Π''_4, B′ sur Π''_4 et Π_4). Dans les autres cas, en effet, l'intersection, appartenant à un plan $\mathfrak{P}_5$, serait d'un type déjà connu.

Le triangle BB′B″, dont les trois côtés sont des droites Δ doubles, est un plan π_2 double ou un plan Π_2 double. Comme il coupe le plan Π_4 suivant une droite, c'est un plan π_2 double. C'est alors un triangle quelconque dans un plan π_2 double quelconque, car les côtés d'un tel triangle déterminent trois plans Π_4, Π'_4, Π''_4 qui remplissent la condition indiquée.

Le plan Π_4 coupe les variétés $\mathfrak{M}'_9$ et $\mathfrak{M}''_9$ suivant deux plans Π_3 distincts, et contenant des plans Π_2 doubles distincts, puisque les points B′ et B″ qui sont leurs conjugués dans le complexe sont distincts. Ces deux plans Π_3 se coupent donc suivant un plan Π_2 qui n'est pas double, et qui n'est pas non plus un plan Π_2 quelconque, puisque

la droite $B'B''$, lieu des points doubles de ce plan, est spéciale. Ce plan Π_2, intersection de Π_4 par $\mathfrak{M}'_9$ et $\mathfrak{M}''_9$, constitue une nappe du lieu des points exceptionnels de la variété L intersection de $\mathfrak{M}_9$, $\mathfrak{M}'_9$ et $\mathfrak{M}''_9$. Les deux autres nappes sont de même des plans Π'_2 et Π'_2, situés respectivement dans Π'_4 et Π''_4, contenant $B''B$ et BB'. La variété étudiée est alors une variété $\mathfrak{M}_4$. Outre ces trois nappes de points exceptionnels, elle contient le plan $BB'B''$, qui constitue une nappe spéciale.

On voit comment une nappe spéciale peut apparaître lorsqu'on coupe par $\mathfrak{M}_9$ la variété $\mathfrak{M}_6$, intersection de $\mathfrak{M}'_9$ et $\mathfrak{M}''_9$, qui n'en contenait pas. Dans cette variété $\mathfrak{M}_6$, une nappe était constituée par la quadrique Q associée à B, et contenait le plan $BB'B''$; la section considérée, contenant $BB'B''$, coupe Q suivant ce plan et le plan Π_2, et ne contient aucune droite D ne se réduisant pas à une droite spéciale et ayant un point exceptionnel dans ce plan $BB'B''$.

Remarquons que $\mathfrak{M}_4$ est aussi l'intersection des trois plans $\mathfrak{T}_8$, $\mathfrak{T}'_8$, $\mathfrak{T}''_8$, tangents en B, B′, B″ à la variété V. Elle appartient en effet à trois variétés $\mathfrak{M}_6$, $\mathfrak{M}'_6$, $\mathfrak{M}''_6$, situées respectivement dans ces trois plans.

48. *Lieu des points exceptionnels dans la variété* $\mathfrak{M}_9$. — Revenons à la variété $\mathfrak{M}_9$ pour y étudier le lieu de ses points exceptionnels. Les deux nappes autres que son plan de base sont évidemment constituées par une variété unique à 6 dimensions que nous appellerons *surface* Σ.

Si l'on définit $\mathfrak{M}_9$ comme lieu d'une quadruple infinité de variétés $\mathfrak{L}_5$ ayant même plan de base, Σ apparaît comme le lieu d'une quadruple infinité de plans π_2 et π'_2 associés, dont une triple infinité de plans π_2 doubles. Les seuls points doubles sur Σ sont d'ailleurs ceux de ces plans doubles; ceux situés sur les autres plans π_2 et π'_2 considérés sont en effet dans le plan de base, et par chacun d'eux passent une simple infinité de plans π_2 doubles situés sur Σ.

Mais il existe d'autres plans π_2 et π'_2 sur cette surface. On le voit aisément en considérant $\mathfrak{M}_9$ comme lieu des plans $\mathfrak{P}_5$ associés aux points B de son plan de base, et par suite Σ comme le lieu des quadriques Q associées à ces points. Dans cette génération, chaque point A de Σ est obtenu une double infinité de fois; il est en effet

situé sur la quadrique Q associée à au moins un point B du plan de base, c'est-à-dire que la quadrique qui lui est associée à lui-même contient au moins un tel point B; elle en contient alors une double infinité (les différents plans Π_2 passant par B et situés sur cette quadrique appartenant aux différents plans Π_4 passant par B; l'un d'eux est dans le plan de base considéré).

Les plans π_2 situés sur les quadriques associées aux points B sont associés à des plans π'_2 coupant le plan de base suivant une droite; chacun d'eux est donc obtenu une infinité de fois, pour tous les points B de cette droite. Les plans π_2 situés sur les quadriques considérées et par suite sur Σ dépendent donc de $4 + 3 - 1 = 6$ paramètres. Par chaque point M de Σ, il en passe une double infinité. Il ne peut y en avoir d'autres, car si c'était le cas Σ contiendrait tout le cône Γ de sommet M, et contiendrait des plans Π_4; ce n'est pas le cas.

En dehors de ces plans, il peut y avoir sur Σ des plans Π'_2 ou Π'_3 situés sur des plans Π'_4. Les plans Π'_4 qui coupent Π_4 en un point simple B ne coupent $\mathfrak{M}_9$ en aucun autre point, et par suite ne coupent pas Σ. Les plans Π'_4 qui coupent Π_4 en un autre point double coupent $\mathfrak{M}_9$, et par suite Σ, en un plan Π'_3 non double. Il y a donc sur Σ une quadruple infinité de ces plans Π'_3. Par chaque point M il en passe une simple infinité.

L'intersection de Σ avec son plan tangent en M comprend donc une triple infinité de droites Δ passant par M; elles se répartissent en une simple infinité de plans Π_3 et une double infinité de plans π_2. Si M est double, il y a évidemment par ce point une double infinité de droites Δ doubles, dont une simple infinité de droites spéciales, constituant un seul plan π_2 double.

49. *Sous-variétés de la variété* $\mathfrak{M}_9$. — Il est facile de déterminer systématiquement toutes les sous-variétés L d'une variété $\mathfrak{M}_9$. En dehors des plans π_2 ou Π_3 que nous venons de déterminer, ce sont des lieux de droites D, dont un point exceptionnel décrit une section du plan Π_4 de base, que nous appellerons *base* de la sous-variété L.

Il peut arriver que la base soit constituée par le plan Π_4 tout entier. Une section quelconque de $\mathfrak{M}_9$ contenant ce plan, et au moins un autre plan, est évidemment soit une variété $\mathfrak{L}_5$, soit une variété $\mathfrak{M}_6$, $\mathfrak{M}_7$ ou

$\mathfrak{M}_8$ lieux des variétés $\mathcal{L}_5$. Ces variétés coupent Σ suivant des variétés à 3, 4 ou 5 dimensions.

Si la base ne comprend pas tout le plan Π_4, on ne peut pas prendre n'importe quelle section ayant cette base. Ce ne serait pas en général une variété L. On trouve sans peine que :

1° Si la base se réduit à un point, simple ou double, on ne peut prendre comme section que le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à ce point et ayant cette base, ou une de ses sections;

2° Si la droite se réduit à une droite Δ' simple ou double, mais non spéciale, on ne peut prendre comme section que la variété $\mathcal{L}_4$ déterminée par Δ' et le plan π_2 associé, ou une section de cette variété. Le plan π'_2 coupe Π_4 et par suite $\mathfrak{M}_9$, suivant cette droite Δ', et le plan de base de cette variété $\mathcal{L}_4$ est un des plans dont nous venons de voir l'existence sur Σ;

3° Si la base se réduit à une droite Δ spéciale, on ne peut définir aucune sous-variété L, autre que le plan double la contenant, et ayant cette base, ou le plan $\mathfrak{P}_2$ déterminé par cette droite et une autre droite spéciale la coupant (plan associé à leur point d'intersection, et tangent à la quadrique associée à ce point.

Il reste à traiter le cas où la base est un plan Π_2 ou Π_3. Commençons par ce dernier cas, en supposant que ce ne soit pas le plan Π_3 double du plan Π_4.

Nous savons déjà qu'il existe une variété $\mathfrak{M}_6$, et par suite une double infinité de variétés $\mathfrak{M}_5$ et autant de variétés $\mathcal{L}_4$, section de la précédente, ayant ce plan Π_3 pour base. Or dans chaque variété $\mathcal{L}_5$ n'existent qu'une double infinité de variétés $\mathcal{L}_4$, déterminées chacune par un des plans π_2 ou π'_2 et une droite de l'autre. Les variétés $\mathcal{L}_4$ obtenues en faisant varier $\mathcal{L}_5$ dépendent seulement de 6 paramètres. Nous venons de les trouver toutes, puisque le choix de Π_3 dans Π_4 dépend de 4 paramètres. Comme une variété $\mathfrak{M}_5$ ou $\mathfrak{M}_6$ de base Π_3 est nécessairement un lieu de telles variétés, il ne saurait en exister d'autres que celles déjà connues.

Remarquons que les variétés $\mathfrak{M}_5$ déduites de ce qui précède contiennent des points exceptionnels constituant un plan Π_3 dans Π_4, un plan Π'_2 dans un plan Π'_3, et une variété à trois dimensions, section plane d'une quadrique Q.

En intervertissant les rôles des plans Π_4 et Π'_4, on obtient des variétés $\mathfrak{M}_5$ dont chacune a pour base, dans Π_4, un plan Π_2 simple contenant une droite spéciale. Un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus dans le cas où la base est un plan Π_3 montre qu'à cette base ne correspond aucune autre sous-variété L que les variétés $\mathfrak{M}_5$ que nous venons de trouver ou leurs sections $\mathfrak{M}_4$ ou $\mathfrak{L}_3$. Les sections $\mathfrak{M}_4$ peuvent être du type étudié n° **47** ou non, suivant que la section de la quadrique constituant dans $\mathfrak{M}_5$ une nappe de points exceptionnels se décompose ou non; la nappe spéciale obtenue au n° **47** n'existe bien entendu que dans le premier cas.

Enfin, si l'on prend pour base un plan Π_2 simple dont la droite double n'est pas spéciale, on n'obtient aucune autre sous-variété que le plan $\mathfrak{P}_3$ contenant ce plan, et si l'on prend un plan Π_2 double, on n'obtient que les plans $\mathfrak{P}_3$ déterminés chacun par ce plan et une droite spéciale, non située dans Π_4 le coupant au point B qui est son conjugué dans le complexe des droites spéciales de Π_4. Un tel plan, tangent à la quadrique Q associée à B, est bien un plan $\mathfrak{P}_3$.

50. *Autres exemples de variétés* $\mathfrak{M}$. — Nous n'avons défini jusqu'ici que des types de variétés L dans lesquelles au moins une nappe du lieu des points exceptionnels était algébriquement séparée des autres. Les trois nappes ne peuvent évidemment constituer une même surface algébrique que pour les variétés $\mathfrak{M}_6$, $\mathfrak{M}_7$ ou $\mathfrak{M}_{10}$, et cette surface est alors une variété à 2, 4 ou 6 dimensions.

Ces variétés à 10, 7 ou 4 dimensions sont précisément celles que l'on obtient en imposant aux relations singulières d'être vérifiées pour 1, 2 ou 3 systèmes de périodes. Il est évident que l'on doit s'attendre, si les systèmes de périodes considérés sont quelconques, à ce que dans la variété obtenue les trois nappes ne puissent être distinguées algébriquement; mais pour certains choix particuliers de ces systèmes, elles pourront l'être, et il pourra même arriver que les systèmes correspondants de relations singulières dépendent d'un plus grand nombre de paramètres que dans le cas général.

Il est facile de définir géométriquement, dans l'espace E_{13}, des variétés de la nature considérée.

Pour former une variété $\mathfrak{M}_4$, considérons un pentagone dont les

côtés soient des droites D; on peut former un tel pentagone en choisissant d'abord quatre sommets, A_1, A_2, A_3 et A_4, de manière que A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 soient des droites D. Le sommet A_5 est alors bien déterminé par la condition d'être associable à A_1 et A_4.

Le plan des deux côtés consécutifs est un plan $\mathfrak{P}_2$. Ainsi $A_1A_2A_3$ est un plan $\mathfrak{P}_2$, associable à A_2. Le cas général est évidemment celui où dans chacun de ces plans la conique de points exceptionnels ne se décompose pas. En considérant le plan $A_1A_2A_3$, on voit ainsi que seule la nappe contenant A_2 peut être distincte des deux autres; mais en considérant de même le plan $A_2A_3A_4$, on voit qu'elle n'est pas distincte.

Cela suffit pour affirmer que la variété L déterminée par les cinq points considérés est une variété $\mathfrak{M}$ à 4, 7 ou 10 dimensions. Il est facile de voir qu'elle est à 4 dimensions, c'est-à-dire qu'elle n'est autre que la variété linéaire déterminée par ces cinq points.

Un point quelconque de cette variété est représentable en effet par un tableau de la forme

$$|T| = \lambda_1|T_1| + \lambda_2|T_2| + \ldots + \lambda_5|T_5|,$$

$|T_1|, \ldots, |T_5|$ représentant les tableaux exceptionnels correspondant aux points $A_1, \ldots, A_5$. Il suffit de montrer que l'opération F, effectuée sur ce tableau, conduit à un tableau de même forme. On a en effet

$$F(|T|) = \Sigma \lambda_i \lambda_j F(|T_i|, |T_j|),$$

et nous savons que $F(|T_i|, |T_j|)$ représente le point exceptionnel associable à la fois de A_i et A_j (n° **28**), c'est-à-dire un point de la droite A_i et A_j si ce sont deux sommets consécutifs, et le sommet intermédiaire dans le cas contraire. De toute façon, il est dans la variété considérée, et il en est de même du point représenté par $F(|T|)$. La variété considérée est donc bien une variété $\mathfrak{M}_4$.

31. Pour obtenir une variété $\mathfrak{M}_7$, nous n'avons qu'à chercher la variété L déterminée par deux points quelconques A et B. Le lieu des points exceptionnels ne saurait évidemment se décomposer dans le cas général en nappes distinctes, puisqu'on ne peut obtenir par des opé-

rations rationnelles aucun des points exceptionnels de la droite D déterminée par A.

Désignons ces points par A_1, A_2, A_3, ceux dérivés de B par B_1, B_2, B_3, le point associable à A_1 et B_1 par C_1, celui associable à A_1 et B_2 par C_2. Le pentagone $A_1C_1B_1B_2C_2$ détermine une variété $\mathfrak{M}_4$ du type que nous venons de définir. La droite $A_1A_2A_3$, droite D quelconque dans le plan $\mathfrak{L}_5$ associé à A_1, n'est pas en général dans cette variété. La variété déterminée par A et B, contenant d'une part le pentagone considéré, d'autre part la droite $A_1A_2A_3$, est donc au moins une variété $\mathfrak{M}_7$.

D'autre part, les systèmes de relations singulières représentés par A et B constituent 6 équations non linéaires, et sont vérifiées pour deux systèmes de périodes au moins ([1]). Or les systèmes de relations singulières vérifiés pour un système de périodes dépendent de 10 paramètres, et ne sont tous vérifiés pour aucun autre système de périodes. Ceux vérifiés pour deux systèmes de périodes ne peuvent dépendre de 10 paramètres.

La variété étudiée est donc une variété $\mathfrak{M}_7$. Le choix de deux droites D dans cette variété dépendant de 12 paramètres, et celui de deux droites D dans l'espace dépendant de 24 paramètres, ces variétés dépendent de $24-12$ paramètres. Elles constituent bien toutes celles représentant les systèmes de relations singulières vérifiées pour deux systèmes de périodes donnés, à l'exception des cas particuliers où les systèmes de relations en question dépendraient de plus de 7 paramètres.

52. Nous verrons au Chapitre suivant que la variété $\mathfrak{M}_{10}$ correspondant à un seul système de périodes peut être définie comme lieu

---

([1]) On peut d'ailleurs dire exactement deux. Dans la variété $\mathfrak{M}_7$, les points représentant des systèmes de relations singulières linéaires $(\lambda = \lambda' = \lambda'') = 0$ dépendent de 4 paramètres. Ils ne sont pas tous exceptionnels, au moins en général, comme on le voit par exemple en supposant linéaire le système représenté par le point A (d'ailleurs si ces systèmes étaient exceptionnels, la condition $\lambda = 0$ définirait un plan Π_4 qui serait une des nappes du lieu des points exceptionnels; or ce lieu ne se décompose pas en général). Ces systèmes linéaires constituent alors cinq relations distinctes, et la sixième constituant les systèmes donnés est du second degré.

des plans $\mathfrak{T}_8$ tangents à la variété V aux points B d'un même plan π_2 double. Observons seulement ici qu'il est bien évident que dans le lieu ainsi défini les points exceptionnels constituent une surface unique, décrite une fois par la quadrique Q associée à B (première nappe dans chaque plan $\mathfrak{T}_8$) et une infinité de fois par le cône Γ du sommet B (qui constitue les deux autres nappes) dans chaque plan $\mathfrak{T}_8$.

En effet, deux des quadriques Q associées à deux des points B_1 et B_2, c'est-à-dire le plan π_2 double donné. Les autres points de ces quadriques Q sont tous distincts et décrivent une variété Σ à 6 dimensions.

Chaque quadrique Q est entièrement décrite par les plans Π_2 situés sur elle et coupant le plan π_2 double. La variété Σ appartient donc au lieu des plans Π_4 coupant ce plan, qui est aussi évidemment le lieu des cônes Γ de sommet B. D'ailleurs, chacun de ces plans Π_4 et le plan π_2 double déterminent une variété $\mathcal{L}_5$ spéciale; par chacun des points de ces plans passe donc une droite D et une seule coupant le plan π_2 double, c'est-à-dire que chacun de ces points est sur la quadrique associée à un point B et un seul. Ce lieu coïncide bien avec la surface Σ.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DES PÉRIODES VÉRIFIANT UN OU PLUSIEURS SYSTÈMES DE RELATIONS SINGULIÈRES.

53. *Définition des variétés s.* — Un système de périodes peut être représenté par le point de l'espace E_6 de coordonnées G, G′, G″, H, H′, H″. Un système de relations singulières, suivant qu'il est exceptionnel ou non, définit dans cet espace une variété à 4 ou 3 dimensions; nous désignerons une telle variété par la notation s_4 dans le premier cas, s_3 dans le second. Ces deux sortes de variétés correspondent évidemment aux points exceptionnels de l'espace E_{13} et aux droites D.

Une variété L, qu'on peut considérer comme un lieu de droites D si elle contient des points non exceptionnels, un lieu de points exceptionnels dans le cas contraire, correspond à un faisceau linéaire de

variétés s_3 et s_4. Les points communs à ces variétés constituent ce que nous appellerons la variété s correspondant à la variété L considérée.

L'objet de ce Chapitre est l'étude des variétés s. Nous commencerons naturellement par l'étude des variétés s_3 et s_4.

Les variétés s_3 ont déjà été étudiées par M. Humbert qui a montré notamment l'existence sur ces variétés de trois séries de génératrices liées aux racines de l'équation en σ (n° **25**), qui se conservent par une transformation d'Hermite, et qui jouissent de cette propriété que toutes les génératrices d'un système qui coupent une génératrice donnée d'un autre système en coupent une infinité.

54. *Cônes* $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ *et* $\mathcal{C}_5$. — Les variétés s_4 sont définies par les trois relations d'un système exceptionnel. Rappelons que, d'après le n° **25**, les « quadriques » définies par deux de ces relations ont pour intersection la variété s_4, et en outre une variété linéaire. La variété s_4 est donc d'ordre 3. Si on la coupe par une variété linéaire à 3 dimensions, c'est-à-dire par un « espace ordinaire », la section est une cubique gauche, intersection d'une double infinité de quadriques. De même, la variété s_4 est l'intersection d'une double infinité de quadriques, dont les équations s'obtiennent en combinant linéairement les trois relations singulières.

Les cubiques gauches de l'espace ordinaire étant unicursales, les coordonnées d'un point de s_4 s'expriment en fonction rationnelle de quatre paramètres.

Si, dans un système de relations singulières, exceptionnel ou non, on ne conserve que les termes du second degré, c'est-à-dire si l'on annule les coefficients autres que λ, λ', λ'', le système obtenu

$$(67)\qquad \begin{cases} \lambda\mathcal{G} + \lambda'\mathcal{H}'' + \lambda''\mathcal{H}' = 0, \\ \lambda\mathcal{H}'' + \lambda'\mathcal{G}' + \lambda''\mathcal{H} = 0, \\ \lambda\mathcal{H}' + \lambda'\mathcal{H} + \lambda''\mathcal{G}'' = 0 \end{cases}$$

est exceptionnel. Les résultats obtenus pour les variétés s_4 s'appliquent donc au cône défini par les équations précédentes, que nous appellerons *cône* $\mathcal{C}_4$. C'est un cône d'ordre 3, lieu d'une triple infinité de génératrices, et situé sur une triple infinité de cônes de dimension 5 et du second degré (définis chacun par une seule équation du second

degré, combinaison linéaire des précédentes). Les variétés s_4 ont évidemment pour cônes asymptotes des cônes $\mathcal{C}_4$

On remarque que :

1° Tous les cônes $\mathcal{C}_4$, obtenus en faisant varier les valeurs relatives de λ, λ', λ'', sont situés sur le cône $\mathcal{C}_5$ d'équation

$$(68) \qquad D = \begin{vmatrix} G & H'' & H' \\ H'' & G' & H \\ H' & H & G'' \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, le déterminant des équations (67), nécessairement nul pour les points des cônes $\mathcal{C}_4$, n'est autre que l'adjoint du déterminant D et s'annule en même temps que lui.

2° Tous les cônes $\mathcal{C}_4$ ont en commun les points d'un cône $\mathcal{C}_3$ d'équations

$$(69) \qquad G = \frac{H'H''}{H}, \qquad G' = \frac{H''H}{H'}, \qquad G'' = \frac{HH'}{H''}.$$

En effet, ces équations entraînent

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' = \mathcal{G}'' = \mathcal{H} = \mathcal{H}' = \mathcal{H}'' = 0.$$

Le cône $\mathcal{C}_3$ peut se représenter paramétriquement par les formules

$$(70) \qquad \begin{cases} G = t^2, & G' = t'^2, & G'' = t''^2, \\ H = t't'', & H' = t''t, & H'' = tt'; \end{cases}$$

nous appellerons *génératrice* (t, t', t'') la génératrice contenant le point t, t', t''.

55. Cherchons l'intersection de deux cônes $\mathcal{C}_4$, de coefficients λ, λ', λ'' pour l'un, et λ_1, λ'_1, λ''_1 pour l'autre. La première équation (67) donne

$$(71) \qquad \begin{cases} \lambda\mathcal{G} + \lambda'\mathcal{H}'' + \lambda''\mathcal{H}' = 0, \\ \lambda_1\mathcal{G} + \lambda'_1\mathcal{H}'' + \lambda''_2\mathcal{H}' = 0. \end{cases}$$

D'autre part, le déterminant (68) étant nul, on a

$$(72) \qquad \begin{cases} G\mathcal{G} + H''\mathcal{H}'' + H'\mathcal{H}' = 0, \\ H''\mathcal{H}'' + G'\mathcal{G}' + H\mathcal{H} = 0, \\ H'\mathcal{H}' + H\mathcal{H} + G''\mathcal{G}'' = 0. \end{cases}$$

Ces cinq équations peuvent être vérifiées de deux manières :

1° Il peut arriver que tous les déterminants d'ordre trois déduits du tableau

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & G & H'' & H' \\ \lambda' & \lambda'_1 & H'' & G' & H \\ \lambda'' & \lambda''_1 & H' & H & G'' \end{vmatrix}$$

soient nuls. On a ainsi une première partie de l'intersection, qui est un plan P_3 à trois dimensions.

2° Pour les points n'appartenant pas à cette intersection, on a évidemment

$$\mathcal{G} = \mathcal{H}'' = \mathcal{H}' = 0,$$

et en raisonnant sur les deux dernières équations (67) comme nous venons de le faire pour la première, on trouve

$$\mathcal{G}' = \mathcal{H} = 0, \qquad \mathcal{G}'' = 0.$$

La deuxième partie de l'intersection est donc constituée par le cône Θ_3.

Les deux parties de cette intersection ont d'ailleurs un cône commun Θ_2. En écrivant en effet que la génératrice (t, t', t'') du cône Θ_3 est dans le plan P_3, on a l'équation

$$(73) \qquad \begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & t \\ \lambda' & \lambda'_1 & t' \\ \lambda'' & \lambda''_1 & t'' \end{vmatrix} = ut + u't' + u''t'' = 0,$$

linéaire en t, t', t'', qui définit un cône du second degré situé dans le plan P_3. Il contient en particulier les génératrices $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ et $(\lambda_1, \lambda'_1, \lambda''_1)$.

D'après la forme des équations (67), la donnée d'une génératrice n'appartenant pas au cône Θ_3 détermine un faisceau linéaire de cônes Θ_4, et par suite détermine parfaitement le plan P_3 qui leur est commun; les coefficients u, u', u'' relatifs à ce plan sont proportionnels aux mineurs d'une même ligne du déterminant D. La donnée d'une seconde génératrice détermine parfaitement le cône Θ_4.

En faisant varier $\lambda_1, \lambda'_1, \lambda''_1$, on voit que le cône Θ_4 est le lieu d'une infinité de plans P_3 contenant la génératrice $(\lambda, \lambda', \lambda'')$. C'est donc, non seulement un cône, mais un cylindre, décrit par la translation du

cône $\mathcal{C}_3$ parallèlement à cette génératrice; dans cette translation chaque cône $\mathcal{C}_2$, se déplaçant parallèlement à une de ses génératrices, décrit complètement le plan P_3 qui le contient. La génératrice $(\lambda, \lambda', \lambda'')$, axe de symétrie, et lieu de points singuliers, sera dite *axe* du cône $\mathcal{C}_4$.

56. *Représentation géométrique.* — Il nous sera commode de représenter, soit la génératrice $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ du cône $\mathcal{C}_3$, soit le cône $\mathcal{C}_4$ dont elle est l'axe, par un point A, de coordonnées homogènes λ, λ', λ'', dans un plan (à deux dimensions). La droite AA_1 joignant deux points représente alors un plan P_3, intersection des cônes $\mathcal{C}_4$ représentés par ses différents points, et contenant le cône $\mathcal{C}_2$, lieu des génératrices représentées par ces mêmes points.

57. *Transformation des relations singulières par un changement d'origine.* — Nous allons montrer qu'une variété $\mathcal{S}_3$ ou $\mathcal{S}_4$ se transforme, par une translation, en une variété analogue. De plus, les invariants I et J ne sont pas modifiés par cette opération.

Il suffit évidemment de vérifier ces résultats pour le changement de G en $G + c$ et pour celui de H en $H + c$. Indiquons par exemple le premier de ces calculs.

Par le changement considéré, les équations singulières

$$E = E' = E'' = 0$$

deviennent

$$\begin{aligned} &E = 0, \\ &E' + c\lambda' G'' - c\lambda'' H + c\alpha'' = 0, \\ &E'' - c\lambda' H + c\lambda'' G' - c\alpha' = 0. \end{aligned}$$

C'est bien un système de même forme, formé avec les coefficients

$$\begin{array}{lllll} \alpha, & \beta + c\lambda'', & \gamma - c\lambda', & \lambda, & \mu, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \lambda', & \mu' + c\alpha'', \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \lambda'', & \mu'' - c\alpha'. \end{array}$$

De ces valeurs, on déduit sans peine que les quantités α_1, β'_1, γ''_1, k, et par suite I et J, ne sont pas modifiées.

Il est, de plus, évident qu'une variété $\mathcal{S}_4$ ne pouvant se transformer par une translation en une variété $\mathcal{S}_3$, un système exceptionnel le reste par le changement d'origine considéré.

Considérons en particulier les variétés s_4 obtenues par translation du cône $\mathfrak{S}_4$. Les systèmes correspondants sont des systèmes exceptionnels doubles, puisque $I = J = 0$. On sait que les systèmes exceptionnels doubles dépendent de 7 paramètres. On les obtient tous par le procédé indiqué (le cône $\mathfrak{S}_4$ dépend de 2 paramètres; la translation en introduit 6; mais d'après le n° **54** chaque cône obtenu l'est une infinité simple de fois, de sorte qu'on a bien des cônes dépendant de 7 paramètres). Un système exceptionnel double définit donc toujours une variété s_4 déduite de $\mathfrak{S}_4$ par translation.

La forme générale d'un tel système est alors

$$\begin{vmatrix} \lambda & H''-h'' & H'-h' \\ \lambda' & G'-h' & H-h \\ \lambda'' & H-h & G''-g'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} G-g & \lambda & H'-h' \\ H''-h'' & \lambda' & H-h \\ H'-h' & \lambda'' & G''-g'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G-g & H''-h'' & \lambda \\ H''-h'' & G'-g' & \lambda' \\ H'-h' & H-h & \lambda'' \end{vmatrix} = 0.$$

En dehors de ces cônes, les seules variétés s_3 ou s_4 admettant des centres de symétrie s'obtiennent évidemment en égalant les déterminants précédents à trois constantes μ, μ', μ''. Ces variétés dépendent de 10 paramètres. Sauf les cônes qu'on vient de définir, ce sont toutes des variétés s_3. Il suffit de le vérifier dans le cas où le centre est à l'origine, et dans ce cas les formules qui expriment qu'un système est exceptionnel donnent $\mu = \mu' = \mu'' = 0$.

Remarquons qu'il peut arriver que le centre de ces variétés s'éloigne à l'infini. On a alors comme variété limite de celle étudiée, soit une variété linéaire à 4 dimensions représentant un système exceptionnel double, soit une variété linéaire à 3 dimensions représentant un système non exceptionnel.

58. *Plans tangents aux variétés* s_3. — Soit $\mathfrak{T}_3$ un tel plan. On ne restreint rien d'après le numéro précédent, en supposant le point de contact à l'origine, c'est-à-dire en supposant

$$\mu = \mu' = \mu'' = 0.$$

Les équations du plan $\mathfrak{T}_3$ s'obtiennent alors en ne conservant dans

les relations singulières que les termes du premier degré. Il vient

$$(74)\qquad \begin{cases} \gamma' G'' - \beta'' G' + (\beta' - \gamma'') H + \alpha' H' - \alpha'' H'' = 0, \\ \alpha'' G - \gamma G'' + (\gamma'' - \alpha) H' + \beta'' H'' - \beta H = 0, \\ \beta G' - \alpha' G + (\alpha - \beta') H'' + \gamma H - \gamma' H' = 0. \end{cases}$$

De ces équations, on déduirait celles de la variété s_3 en ajoutant aux premiers membres les termes du second degré, c'est-à-dire les premiers membres des équations du cône $\mathfrak{S}_4$.

En remarquant, d'une part que les coefficients α, β', γ'' n'interviennent que par leurs différences, d'autre part que les systèmes de la forme (74) se groupent par séries simplement infinies représentant un même plan, on voit que les plans $\mathfrak{T}_3$ dépendent de 6 paramètres. Leur orientation n'est donc pas quelconque.

Nous allons obtenir aisément une propriété géométrique qui les caractérise en cherchant leur intersection avec le cône $\mathfrak{S}_3$. Prenons à cet effet les coordonnées d'un point de ce cône sous la forme (70) et écrivons qu'elles vérifient les équations (74). Il vient

$$\begin{aligned} &\gamma' t''^2 - \beta'' t'^2 + (\beta' - \gamma'') t' t'' + \alpha' t'' t - \alpha'' t\, t' = 0, \\ &\alpha'' t^2 - \gamma\, t''^2 + (\gamma'' - \alpha) t'' t + \beta'' t\, t' - \beta\, t' t'' = 0, \\ &\beta\, t'^2 - \alpha' t^2 + (\alpha - \beta') t\, t' + \gamma\, t' t'' - \gamma' t'' t = 0. \end{aligned}$$

équations qu'on peut écrire

$$(75)\qquad \frac{\alpha t + \beta t' + \gamma t''}{t} = \frac{\alpha' t + \beta'' t' + \gamma' t''}{t'} = \frac{\alpha'' t + \beta'' t' + \gamma'' t''}{t''},$$

ou encore, en appelant $-s$ la valeur commune de ces rapports,

$$\begin{aligned} (\alpha + s) t + \beta t' + \gamma t'' &= 0, \\ \alpha' t + (\beta' + s) t' + \gamma' t'' &= 0, \\ \alpha'' t + \beta'' t' + (\gamma'' + s) t'' &= 0. \end{aligned}$$

On voit alors qu'à chaque valeur de s racines de l'équation

$$(76)\qquad \begin{vmatrix} \alpha + s & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' + s & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' + s \end{vmatrix} = 0$$

correspondent des valeurs de t, t', t'' définies à un facteur commun

près, et par suite des points décrivant une génératrice du cône $\mathfrak{S}_3$. On a ainsi trois génératrices, en général distinctes, constituant l'intersection cherchée.

Le choix de ces trois génératrices sur le cône $\mathfrak{S}_3$ définit parfaitement le plan $\mathfrak{T}_3$, et introduit bien 6 paramètres. Il en résulte qu'un plan $\mathfrak{T}_3$ peut être défini géométriquement comme étant une variété linéaire à trois dimensions déterminée par trois génératrices quelconques du cône $\mathfrak{S}_3$.

L'équation (76) développée s'écrit, en reprenant les notations du n° **15**,

$$s^3 + (\alpha + \beta' + \gamma'')s^2 + [(\alpha) + (\beta') + (\gamma'')s] + \delta = 0.$$

On remarque que, μ, μ', μ'' étant nuls, c'est à cette forme que se réduit l'équation étudiée Chapitre II dont dépend la recherche des systèmes exceptionnels dérivés du système étudié (le système étudié étant, soit celui qui définit le plan $\mathfrak{T}_3$, soit celui qui définit n'importe quelle variété tangente à ce plan ; cela revient au même, puisque, μ, μ', μ'' étant nuls, λ, λ', λ'' disparaissent de l'équation). Rappelons qu'en posant

$$s + \frac{\alpha + \beta' + \gamma''}{3} = \sigma,$$

cette équation s'écrit

$$\sigma^3 - \frac{1}{3} I\sigma - \frac{1}{27} J = 0. \tag{77}$$

59. *Cas particulier divers.* — Il peut arriver qu'à une même valeur de s correspondent une infinité de génératrices. Comme on ne change rien en ajoutant une même constante à α, β', γ'', on peut supposer cette valeur nulle. On voit alors que la circonstance indiquée se produit lorsque le déterminant δ a tous ses mineurs nuls, c'est-à-dire ses éléments représentables par les formules

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha = uv, & \beta = u'v, & \gamma = u''v, \\ \alpha' = uv', & \beta' = u'v', & \gamma' = u''v', \\ \alpha'' = uv'', & \beta'' = u'v'', & \gamma'' = u''v''. \end{array}\right. \tag{78}$$

Ces conditions sont précisément nécessaires et suffisantes pour que le système (74) soit exceptionnel et représente, non un plan $\mathfrak{T}_3$, mais un plan $\mathfrak{T}_4$. Donc un plan $\mathfrak{T}_3$ contient bien trois génératrices du

cône $\mathfrak{S}_3$ (distinctes ou confondues) et ne saurait en contenir une infinité.

Dans le cas d'un plan $\mathfrak{T}_4$, les équations (75) prennent la forme

$$\frac{v}{t}(u't+u't'+u''t'')=\frac{v'}{t'}(ut+u't'+u''t'')=\frac{v''}{t''}(ut+u't'+u''t'').$$

de sorte que l'on a, ou bien

$$ut+u't'+u''t''=0, \tag{79}$$

ou bien

$$\frac{t}{v}=\frac{t'}{v'}=\frac{t''}{v''}. \tag{80}$$

Dans la représentation considérée n° **56** de la génératrice (t, t', t'') du cône $\mathfrak{S}_3$ par le point de coordonnées homogènes t, t', t'', on voit que les génératrices situées dans un plan $\mathfrak{T}_4$ sont représentées par le point v, v', v'' et ceux de la droite (79). Le plan $\mathfrak{T}_4$ est représenté par ce point et cette droite. Ce plan est la variété linéaire déterminée par un plan P_3 quelconque et une génératrice (v, v', v'') quelconque du cône $\mathfrak{S}_3$.

Un plan $\mathfrak{T}_3$ est défini par les trois points qui représentent ses génératrices. Si ces trois points tendent vers trois points en ligne droite, le plan $\mathfrak{T}_3$ tend évidemment vers le plan P_3 représenté par cette droite. Mais chacun des systèmes de relations singulières correspondant au plan P_3 se réduit à la limite à deux relations distinctes, définissant, non le plan P_3, mais un des plan $\mathfrak{T}_4$ (en nombre doublement infini) qui le contient.

Nous savons que, parmi les systèmes de relations singulières dérivés d'un système donné, trois sont exceptionnels. Cela revient à dire que toute variété s_3 est sur trois variétés s_4. On le vérifie immédiatement, par ce qui précède, pour les plans $\mathfrak{T}_3$. Chacun de ces plans étant représenté par trois points est, sur les plans $\mathfrak{T}_4$, représenté par un des points et la droite joignant les deux autres. On voit de cette manière comment chacun de ces points, représentant une génératrice de l'intersection du cône $\mathfrak{S}_3$ et du plan $\mathfrak{T}_3$, est lié à l'un des systèmes exceptionnels dérivés du système (74); on s'explique que la recherche de ces

génératrices et celle de ces systèmes exceptionnels ait conduit à la même équation du troisième degré.

Inversement, chaque variété $\mathcal{S}_4$, et en particulier chaque plan $\mathfrak{T}_4$, contient une quadruple infinité de variétés $\mathcal{S}_3$ (cela revient à dire que, dans l'espace E_{13}, chaque point exceptionnel est sur une quadruple infinité de droites D). Mais toutes les variétés $\mathcal{S}_3$ situées dans $\mathfrak{T}_4$ ne sont pas linéaires; on ne trouve en effet qu'une triple infinité de plans $\mathfrak{T}_3$ dans un plan $\mathfrak{T}_4$, ou ce qui revient au même une double infinité passant par l'origine [représentées par le point φ, φ', φ'' et deux points arbitraires de la droite (79)].

60. Le fait que les équations (74) représentent un plan $\mathfrak{T}_4$ ne suffit pas pour que le système non homogène dont ces équations sont déduites soit exceptionnel. Pour qu'il le soit, il faut de plus, comme cela se déduit immédiatement des formules (29) et (78), que

$$\lambda u + \lambda' u' + \lambda'' u'' = 0. \tag{81}$$

Or λ, λ', λ'' sont les valeurs de t, t', t'' définissant la génératrice du cône $\mathfrak{S}_3$, lignes des centres du cône $\mathfrak{S}_4$. Cette condition exprime donc que la relation (79) est vérifiée pour cette droite, c'est-à-dire qu'elle est dans le plan P_3.

Pour définir une variété $\mathcal{S}_4$ passant par l'origine, il faut donc prendre des termes du second degré, définissant un cône $\mathfrak{S}_4$ d'axe $\mathfrak{D}$, puis des termes du premier degré représentant un plan $\mathfrak{T}_4$ dont le plan P_3 contienne cette génératrice $\mathfrak{D}$. Une translation parallèle à $\mathfrak{D}$ ne modifie donc ni les termes du premier, ni ceux du second degré. Les variétés $\mathcal{S}_4$ passant par l'origine, et par suite toutes les variétés $\mathcal{S}_4$, sont donc des surfaces de translation, c'est-à-dire des cylindres.

D'après cette génération, on voit que l'intersection du plan $\mathfrak{T}_4$ et du cône $\mathfrak{S}_4$ est décrite dans cette translation par l'intersection du même plan et du cône $\mathfrak{S}_3$. Cette dernière contenant le cône $\mathfrak{S}_2$ et une génératrice isolée, l'intersection de $\mathfrak{T}_4$ et de $\mathfrak{S}_4$, lorsque la relation (81) est vérifiée, comprend le plan P_3 situé dans $\mathfrak{T}_4$, lieu du cône $\mathfrak{S}_2$, et le plan P_2, lieu de cette génératrice, c'est-à-dire la variété linéaire à 2 dimensions déterminée par les génératrices du cône $\mathfrak{S}_3$ définies, l'une par λ, λ', λ'', l'autre par φ, φ', φ''.

61. Plaçons-nous maintenant dans le cas où, le système (74) étant exceptionnel, la condition (81) n'est pas vérifiée. La variété étudiée est une variété $\mathcal{S}_3$, et son plan tangent en un point quelconque est un plan $\mathfrak{T}_3$. Mais, à l'origine, les termes du premier degré égalés à zéro définissent un plan $\mathfrak{T}_4$. L'origine est donc un point singulier.

Pour obtenir l'équation du cône tangent, il suffit de combiner les équations singulières de manière à éliminer les termes du premier degré. Il suffit de les ajouter, après les avoir multipliées respectivement par ρ, ρ', ρ''. On obtient une équation homogène du second degré qui définit, dans le plan $\mathfrak{T}_4$, le cône cherché.

Les variétés $\mathcal{S}_3$ ayant ainsi l'origine pour point singulier dépendent de 6 paramètres (chacune est représentée par une infinité de systèmes, et ces systèmes introduisent 7 paramètres). Par une translation, on obtient des variétés $\mathcal{S}_3$ à points singuliers dépendant de 12 paramètres. Donc *toutes les variétés* $\mathcal{S}_3$ (non linéaires) *ont un point singulier.*

Il en existe qui sont des cylindres et ont par suite une ligne de points singuliers. Pour qu'il en soit ainsi, l'origine étant un de ces points de sorte que $\alpha, \ldots, \gamma''$ sont de la forme (78), il faut et il suffit que la génératrice du cône $\mathfrak{S}_3$, qui définit la direction de la translation engendrant le cône $\mathfrak{S}_4$, soit située dans le plan $\mathfrak{T}_4$, et cela sans être sur son cône $\mathfrak{S}_2$ (car alors on serait dans le cas des variétés $\mathcal{S}_3$). Il faut donc que ce soit sa génératrice isolée, c'est-à-dire que λ, λ', λ'' soient proportionnels à ρ, ρ', ρ''. Les variétés remplissant ces conditions dépendent de 10 paramètres.

62. *Intersection d'un plan* $\mathfrak{T}_3$ *et des cônes* $\mathfrak{S}_4$ *et* $\mathfrak{S}_5$. — Considérons un plan $\mathfrak{T}_3$, et désignons par $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}''$ les génératrices du cône $\mathfrak{S}_3$ situées dans ce plan. Le plan à 2 dimensions défini par deux de ces droites, par exemple $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$, appartient au cône $\mathfrak{S}_4$ décrit par la translation du cône $\mathfrak{S}_3$ parallèlement à $\mathfrak{D}$, et par suite au cône $\mathfrak{S}_5$. Ce cône contient donc les trois plans $(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'')$, $(\mathfrak{D}'', \mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ définis par les droites $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ assemblées deux à deux. Comme il est d'ordre 3, ces plans constituent toute son intersection avec le plan $\mathfrak{T}_3$.

Considérons maintenant un cône $\mathfrak{S}_4$. Il est situé sur $\mathfrak{S}_5$ et contient $\mathfrak{S}_3$. Donc son intersection avec $\mathfrak{T}_3$ comprend certainement les droites $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ et est tout entière située sur les trois plans définis par ces

droites deux à deux. Le cône $\mathcal{C}_4$ étant d'ordre 3, cette intersection ne peut comprendre une droite autre que $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ sans en comprendre une infinité, et par suite un des plans en question.

On voit alors qu'il y a trois cas possibles :

1° L'axe de translation du cône $\mathcal{C}_4$ est une des droites $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$; par exemple $\mathfrak{D}$. L'intersection comprend les deux plans $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ et $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'')$.

2° L'axe de translation du cône $\mathcal{C}_4$ est sur l'un des cônes $\mathcal{C}_2$ déterminés par deux des droites $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$; par exemple $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}''$. Le cône $\mathcal{C}_4$ contient alors le plan P_3 contenant $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}''$. L'intersection de ce cône et de $\mathfrak{T}_3$ comprend alors la droite $\mathfrak{D}$ et le plan $(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'')$.

3° L'axe de translation du cône $\mathcal{C}_4$ n'est sur aucun des cônes $\mathcal{C}_2$ considérés. Autrement dit, dans la représentation du n° **56**, les droites $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ étant représentées par trois points A, A′, A″, le point λ, λ', λ'' qui représente le cône $\mathcal{C}_4$ n'est sur aucun côté du triangle AA′A″. Alors l'intersection ne contient que les droites $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$.

Ce dernier cas est évidemment le cas général.

63. *Génératrices des variétés* $\mathcal{S}_3$ *et* $\mathcal{S}_4$. — Nous savons déjà qu'un cône $\mathcal{C}_4$ contient une infinité simple de plans P_3 ayant une droite commune. Il n'existe pas d'autres droites situées sur ce cône que celles situées en entier dans un de ces plans.

Pour les autres types de variétés $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$, nous emploierons la méthode qui consiste à chercher leur intersection avec leurs plans tangents. Plaçant l'origine au point de contact, nous avons donc à annuler séparément les termes du premier degré et ceux du second dans leurs équations, c'est-à-dire à chercher l'intersection du cône $\mathcal{C}_4$ défini par les équations (67) et du plan $\mathfrak{T}_3$ ou $\mathfrak{T}_4$ défini par les équations (74). Nous sommes sûrs d'obtenir ainsi, non seulement toutes les génératrices, mais même toutes les variétés linéaires situées en entier sur la variété $\mathcal{S}_4$ étudiée.

1° *Cas d'une variété* $\mathcal{S}_4$. — Nous supposerons qu'elle représente un système exceptionnel simple (sans quoi elle se réduirait à un cône $\mathcal{C}_4$ ou à un plan $\mathfrak{T}_4$).

Nous savons que c'est un cylindre. Soit $\mathfrak{D}$ la direction de ses génératrices. L'intersection cherchée du cône $\mathfrak{S}_4$ et du plan $\mathfrak{T}_4$ peut sûrement se déduire par une translation parallèlement à ces génératrices de l'intersection du cône $\mathfrak{S}_3$ et du plan $\mathfrak{T}_4$. D'après le n° **54**, cette intersection se compose d'une génératrice isolée $\mathfrak{D}'$ et d'un cône $\mathfrak{S}_2$ contenant la droite $\mathfrak{D}$. Dans une translation parallèle à $\mathfrak{D}$, la droite $\mathfrak{D}'$ décrit un plan P_2, et le cône $\mathfrak{S}_2$ décrit le plan P_3 qui le contient. On obtient donc un plan P_2 et un plan P_3 se coupant suivant la droite $\mathfrak{D}$.

Le cylindre $\mathcal{S}_4$ est bien défini par une section plane par un plan ne contenant pas $\mathfrak{D}$. Cette section apparaît, d'après ce qui précède, comme le lieu d'une simple infinité de plans à 2 dimensions ou d'une double infinité de droites. On peut la définir, soit comme lieu des droites coupant trois plans donnés à 2 dimensions, soit comme lieu des plans à 2 dimensions coupant quatre droites.

2° *Cas d'une variété* $\mathcal{S}_3$. — D'après le n° **62**, l'intersection du plan $\mathfrak{T}_3$ et du cône $\mathfrak{S}_4$ comprend de toute façon trois droites, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, situées sur le cône $\mathfrak{S}_3$. Elles sont liées aux trois racines de l'équation (77), et les coefficients I et J de cette équation sont indépendants du point choisi sur la variété $\mathcal{S}_3$. On a donc sur cette variété trois systèmes bien distincts de génératrices, dont chacun peut être défini rationnellement quand on connaît la racine correspondante de l'équation (77).

Soit $\mathcal{S}_4$ la variété représentant le système exceptionnel, dérivé de celui étudié, et correspondant à la même racine de l'équation (77) que les génératrices $\mathfrak{D}$. Il est facile de définir géométriquement la relation entre $\mathcal{S}_4$ et ce système de génératrices. Soit $\mathfrak{T}_4$ le plan tangent à cette variété à l'origine; il coupe le cône $\mathfrak{S}_3$ suivant $\mathfrak{D}$, génératrice isolée, et le cône $\mathfrak{S}_2$ déterminé par $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}''$. Par suite, d'après le n° **60**, son intersection avec $\mathfrak{S}_4$ comprend le plan P_3 déterminé par $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}''$, et un plan P_2 contenant $\mathfrak{D}$. L'origine étant prise d'une manière quelconque sur $\mathcal{S}_3$, on voit qu'en chaque point de $\mathcal{S}_3$, la variété $\mathcal{S}_4$ correspondant au système de génératrices $\mathfrak{D}$ contient le plan P_3 déterminé par $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}''$, tandis que $\mathfrak{D}$ appartient au plan P_2 situé sur $\mathcal{S}_4$.

64. *Premier type de variétés* $\mathcal{S}_3$: *cylindres.* — L'intersection du

plan $\mathfrak{T}_3$ et du cône $\mathfrak{C}_4$ peut comprendre d'autres génératrices que $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, de sorte qu'il peut exister sur $\mathcal{S}_3$ d'autres génératrices que celles des trois systèmes obtenus.

La question se pose de savoir si le choix entre les trois cas distingués n° **62** dépend du point considéré sur la variété $\mathcal{S}_3$ ou seulement du choix de cette variété. La résolution de cette question est immédiate en ce qui concerne le premier cas.

En effet, la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{S}_3$ soit un cylindre, c'est-à-dire puisse être engendrée par une translation, est que l'axe de translation du cône $\mathfrak{C}_4$ appartienne au plan $\mathfrak{T}_3$, coïncidant ainsi avec $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, ou $\mathfrak{D}''$, c'est-à-dire qu'on soit dans le premier cas considéré. Cette condition ne dépend pas du point choisi sur $\mathcal{S}_3$. Donc, dans ce cas, par chaque point de $\mathcal{S}_3$, passent deux plans P_2 à 2 dimensions situés sur cette variété. Dans le cas contraire, il est impossible que deux tels plans aient un point commun.

Cette propriété est liée à une autre propriété des surfaces $\mathcal{S}_3$ qui sont des cylindres. La direction de translation est définie par λ, λ', λ''. Ces coefficients ont donc des valeurs relatives bien déterminées, les mêmes pour tous les systèmes dérivés par l'opération F du système de relations singulières considéré initialement. Il existe un de ces systèmes pour lequel $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 0$; il est linéaire. Comme il ne saurait être équivalent au système proposé, il est exceptionnel. Le cas considéré est donc caractérisé par cette circonstance qu'une des trois variétés $\mathcal{S}_4$ à laquelle appartient la variété $\mathcal{S}_3$ étudiée est linéaire.

Cela est facile à vérifier analytiquement. En ajoutant au besoin une constante à α, β', γ'', ce qui ne change pas la variété $\mathcal{S}_3$, on peut rendre nulle la racine de l'équation (76) qui conduit à celle des droites $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ qui est axe de translation de $\mathfrak{C}_4$, c'est-à-dire à des valeurs de t, t', t'' proportionnelles à λ, λ', λ''. Les rapports (75) sont alors nuls pour ces valeurs, c'est-à-dire, d'après les formules (29), que l'opération F conduit à un système linéaire (λ_1, λ'_1, λ''_1 étant nuls).

Appartenant à un plan $\mathfrak{T}_4$, la variété $\mathcal{S}_3$ y est déterminée par une seule des relations singulières. C'est un cylindre du second degré dans un plan $\mathfrak{T}_4$. La section plane est une quadrique (Q), dans une variété linéaire à 3 dimensions; elle contient deux séries simplement infinies de génératrices rectilignes, qui donnent dans la translation les deux séries de plans P_2 dont nous avons déjà établi l'existence.

Si $\mathfrak{D}$ est la droite d'intersection de $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{T}_3$ qui est axe de translation de $\mathfrak{S}_4$, prenons comme plan de section le plan P_3 défini par $\mathfrak{D}'$ et $\overline{\mathfrak{D}}''$ [qui est bien dans $\mathfrak{T}_4$ et ne contient pas $\mathfrak{D}$, dans le cas général où l'équation (76) a ses racines distinctes]. La quadrique (Q) a alors évidemment comme cône asymptote le cône $\mathfrak{S}_2$ de ce plan. Le cône asymptote de $\mathfrak{s}_3$ est alors défini par la translation du cône $\mathfrak{S}_2$ contenant $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}''$ parallèlement à $\mathfrak{D}$.

65. *Remarque.* — Le fait que l'équation (77) ait ses racines distinctes ou non ne dépend que des coefficients du plan tangent $\mathfrak{T}_3$, c'est-à-dire, dans le cas considéré où l'origine est au point de contact, de α, α', ..., γ'', et non de λ, λ', λ''. La distinction entre les trois cas considérés n° **62** dépend de λ, λ' et λ''. Ces deux distinctions sont donc indépendantes. En particulier, dans le premier cas du n° **62**, que nous venons d'étudier, il peut arriver que l'équation (77) ait deux ou trois racines égales, ce qui donne lieu aux trois cas suivants, en appelant toujours $\mathfrak{D}$ celle des directions $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ qui est axe de translation de $\mathfrak{S}_4$.

Premier cas. — Les directions $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}''$ sont confondues, mais distinctes de $\mathfrak{D}$. Dans ce cas la quadrique Q est développable. C'est un cône $\mathfrak{S}_2$. La variété $\mathfrak{s}_3$ est décrite par la translation d'un tel cône parallèlement à une droite $\mathfrak{D}$ non située sur lui.

Deuxième cas. — Les directions $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ sont confondues, mais distinctes de $\mathfrak{D}''$. Dans ce cas le plan $\mathfrak{T}_4$ contenant $\mathfrak{s}_3$ n'est pas un plan $\mathfrak{T}_4$ quelconque, mais il est tangent au cône $\mathfrak{S}_3$ suivant la droite $\mathfrak{D}$; son intersection avec $\mathfrak{S}_3$ comprend un cône $\mathfrak{S}_2$, et la génératrice isolée qui existe en général est ici la droite $\mathfrak{D}$ située sur ce cône.

Dans ce plan $\mathfrak{T}_4$, le cône asymptote de $\mathfrak{s}_3$ se décompose en deux plans; l'un est le plan P_3 qui contient le cône $\mathfrak{S}_2$; l'autre est le plan tangent à $\mathfrak{S}_3$ le long de $\mathfrak{D}$. La variété $\mathfrak{s}_3$ est du type paraboloïde.

Troisième cas. — Les directions $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}''$ sont confondues. Les deux plans précédents sont alors confondus; la variété $\mathfrak{s}_3$ est un cylindre parabolique.

66. *Variétés $\mathfrak{s}_3$ qui ne sont pas des cylindres.* — Dans ce cas, le

premier cas de la discussion du n° **62** n'est réalisé en aucun point, et la variété s_3 n'est située dans aucune variété ϖ_4.

Par suite, parmi les systèmes de relations singulières dérivés les uns des autres qui représentent cette variété s_3, aucun n'est linéaire. Si donc nous en considérons deux distincts, les valeurs de λ, λ', λ'' correspondant à ces deux systèmes ne sont pas proportionnelles; les termes du second degré de ces deux systèmes, égalés à o, définissent deux cônes $\mathfrak{S}_4$ distincts. Les directions asymptotiques de s_3, évidemment situées sur ces cônes, sont sur leur intersection, composée du cône $\mathfrak{S}_3$ et d'un plan P_3 (ce qui ne veut pas dire que toutes les directions de $\mathfrak{S}_3$ et P_3 soient certainement des directions asymptotiques de s_3).

Le cône $\mathfrak{S}_3$ ne contenant aucune variété linéaire à 2 dimensions, les variétés de cette nature situées sur s_3 sont certainement toutes parallèles au plan P_3 considéré.

Supposons qu'il existe une telle variété, soit par exemple un plan $(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'')$. La variété s_3 est alors le lieu des droites $\mathfrak{D}$ coupant ce plan. Il ne peut alors exister sur s_3 aucun plan $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ ou $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'')$. Si en effet un tel plan existait, il couperait le plan $(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'')$ suivant une droite et, pour les points de cette droite, le premier cas du n° **62** serait réalisé; cela n'est pas possible. On voit donc que si le deuxième cas du n° **62** est réalisé en certains points de la variété s_3, c'est-à-dire s'il existe sur cette variété des plans $(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'')$, $(\mathfrak{D}'', \mathfrak{D})$ ou $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$, il ne peut en exister que d'un seul de ces trois systèmes.

67. Le cas général est évidemment fourni par le troisième cas du n° **62**. Nous allons préciser ce point, en montrant que le cas général est celui de variétés s_3 ne contenant aucun plan $(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'')$, $(\mathfrak{D}'', \mathfrak{D})$ ou $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$.

En effet, s'il en existait, ils appartiendraient à un même système, soit par exemple $(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'')$, et la racine de l'équation (77) correspondant aux droites $\mathfrak{D}$ pourrait être distinguée des autres par des opérations rationnelles; il n'en est pas ainsi en général.

On a ainsi des variétés, du *troisième type* (correspondant au troisième cas du n° **62**), ne contenant pas d'autres génératrices que les droites $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$.

Si une variété s_3 contient deux plans $(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'')$, elle est décrite tout entière par des droites $\mathfrak{D}$ coupant ces deux plans; elle est donc tout entière dans la variété linéaire à 5 dimensions contenant ces deux plans. Si elle contient un troisième plan $(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'')$, elle peut être définie dans cette variété comme lieu des droites coupant ces trois plans; elle contient alors une infinité de tels plans et peut être définie comme lieu des plans à 2 dimensions coupant quatre droites. Pour qu'une telle variété soit une variété s_3, il faut évidemment que tous ses plans $(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'')$ soient parallèles à un même plan P_3 et que toutes ses génératrices $\mathfrak{D}$ soient parallèles à des génératrices du cône $\mathfrak{S}_3$. On a alors des variétés s_2 du *second type* (correspondant au second cas du n° **62**).

On peut se demander s'il existe, en outre des types énumérés, des variétés s_3 contenant un ou deux plans $(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'')$, sans en contenir une infinité. Cela ne paraît pas probable.

Il résulte évidemment du n° **62**, indiquant les conditions pour qu'on soit dans l'un ou l'autre cas, que les variétés s_3 des trois types dépendent respectivement de 10, 11 et 12 paramètres.

68. *Propriétés des transformations d'Hermite.* — Il est possible de simplifier la variété s_3 à étudier par une translation, ou par une transformation d'Hermite.

On peut d'ailleurs remarquer que la translation n'est qu'un cas particulier de la transformation d'Hermite. Ainsi, considérons la translation ayant pour effet de remplacer G, G′, G″ respectivement par $G + c$, $G' + c'$, $G'' + c''$, sans changer H, H′, H″, qui suffit pour amener l'origine sur s_3. On vérifie sans peine, par les formules (14′) et (22), qu'elle n'est autre chose que la transformation d'Hermite de coefficients tels que

$$a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = a_{4,4} = a_{5,5} = a_{6,6} = 1,$$
$$a_{1,4} = c, \qquad a_{2,5} = c', \qquad a_{3,6} = c'',$$

tous les autres coefficients étant nuls.

Considérons d'autre part la transformation de coefficients tels que

$$a_{1,4} = a_{2,5} = a_{3,6} = 1,$$
$$a_{4,1} = a_{5,2} = a_{6,3} = 1.$$

tous les autres coefficients étant nuls. On constate immédiatement qu'elle échange les coefficients $B_{i,j}$ et $B_{i\pm3,j\pm3}$, c'est-à-dire en particulier les coefficients λ, λ', λ'' d'une part, et μ, μ', μ'' d'autre part. Elle transforme donc une variété $\mathcal{S}_3$ passant par l'origine en une variété $\mathcal{S}_3$ linéaire et réciproquement.

L'emploi successif de ces deux transformations permet évidemment de transformer une variété $\mathcal{S}_3$ quelconque en une variété linéaire $\mathfrak{T}_3$, et même, si l'on veut, en une variété $\mathfrak{T}_3$ passant par l'origine.

On peut montrer que la même réduction est possible au point de vue arithmétique, c'est-à-dire qu'une variété $\mathcal{S}_3$ à coefficients entiers peut être réduite par une transformation d'Hermite d'ordre 1 en une variété linéaire à coefficients entiers (ayant mêmes invariants I et J, comme nous l'avons vu au n° **30**). Nous n'insisterons pas sur ce point de vue.

69. La transformation d'Hermite est une transformation ponctuelle, et par suite de contact. A l'ensemble des surfaces $\mathcal{S}_3$ tangentes en un point M à un plan $\mathfrak{T}_3$ correspond donc un ensemble analogue. Or ces surfaces ont en commun les génératrices rectilignes $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ intersection du plan $\mathfrak{T}_3$ et du cône $\mathfrak{C}_3$ du sommet M. Il en résulte immédiatement que les droites $\mathfrak{D}$, parallèles aux génératrices du cône $\mathfrak{C}_3$, sont transformées en droites analogues.

Appelons *pseudo-sphère* une quadrique située dans un plan P_3 et ayant pour cône directeur le cône $\mathfrak{C}_2$ de ce plan. Ces pseudo-sphères sont les seules quadriques ayant toutes leurs génératrices parallèles au cône $\mathfrak{C}_3$. Une telle pseudo-sphère est transformée par une transformation d'Hermite en une surface doublement réglée dont les génératrices sont aussi des droites $\mathfrak{D}$; c'est donc aussi une pseudo-sphère.

Une droite AB, située sur le cône $\mathfrak{C}_5$ sans l'être sur le cône $\mathfrak{C}_3$, appartient, comme nous l'avons vu, à un plan P_3 et un seul. Il en résulte aisément que le plan P_3 qui contient une pseudo-sphère peut être défini comme lieu des points d'où l'on peut mener plus d'une droite $\mathfrak{D}$ rencontrant cette pseudo-sphère. Il résulte immédiatement de cette définition qu'un plan P_3 est transformé par une transformation d'Hermite en un plan P_3.

Des cônes $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$ et $\mathfrak{C}_5$ de même sommet M sont alors évidem-

ment transformés en cônes analogues ayant un même sommet M'. Si l'on représente, comme nous l'avons fait à plusieurs reprises, une droite $\mathfrak{D}$ passant par M par un point de m de coordonnées homogènes t, t', t'', et la droite $\mathfrak{D}$ correspondante passant par M' un point analogue m', la correspondance entre m et m' est homographique. En effet, des points m décrivant une ligne droite représentent des droites $\mathfrak{D}$ décrivant un cône $\mathfrak{C}_2$, et cette circonstance se conserve dans la transformation d'Hermite.

Mais il est essentiel de remarquer que la correspondance homographique entre m et m' dépend du point M, deux droites $\mathfrak{D}$ parallèles n'ayant pas en général pour transformées dans la transformation d'Hermite deux droites parallèles (de même que dans l'inversion à deux droites isotropes parallèles correspondent en général deux droites isotropes non parallèles).

Il est enfin évident que la transformation d'Hermite transforme les variétés $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$ en variétés analogues, et qu'il en est de même pour tous les types de variétés $\mathcal{S}$, correspondant au sens du n° **53** aux différents types de variétés $\mathcal{L}$ définis dans l'espace E_{13}.

70. *Conséquences relatives aux variétés* $\mathcal{S}_3$. — Considérons une variété $\mathfrak{S}_3$, pour laquelle l'équation (77) ait ses racines distinctes. Son intersection avec le cône $\mathcal{S}_3$ définit trois droites $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ qu'on peut prendre comme axes de coordonnées obliques. Nous désignerons les coordonnées correspondantes par u, v, w.

Par une transformation d'Hermite, une variété $\mathcal{S}_3$ quelconque (sous la seule condition que $J^2 - 4I^3$ ne soit pas nul; ce cas d'exception peut ensuite s'étudier comme cas limite) peut se ramener à une telle variété $\mathfrak{S}_3$. Il en résulte immédiatement que :

1° Les coordonnées d'un point M de $\mathcal{S}_3$ s'expriment rationnellement en fonction de u, v, w;

2° Les courbes obtenues en laissant deux des coordonnées constantes et faisant varier la troisième sont des droites $\mathfrak{D}$ des trois systèmes $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$;

3° Les droites $\mathfrak{D}'$ de la variété $\mathcal{S}_3$ coupant une même droite $\mathfrak{D}$ en coupent une infinité; elles définissent une surface $w = \text{const.}$, qui

peut être définie d'une manière analogue en échangeant les rôles des droites $\mathfrak{D}$ et des droites $\mathfrak{D}'$. Cette surface est une pseudo-sphère ;

4° Toute variété s_3 est, de trois manières différentes, le lieu d'une série simplement infinie de pseudo-sphères.

En tous les points d'une pseudo-sphère $w = \text{const.}$, le plan P_3 déterminé par les génératrices $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ est évidemment le même ; c'est celui qui contient cette pseudo-sphère. Lorsque w varie, ce plan P_3 reste évidemment parallèle à une droite fixe, qui est la direction des génératrices du cylindre s_4 contenant la variété s_3 correspondant à la même racine de l'équation (77) que les génératrices du système $\mathfrak{D}''$ (d'après la correspondance indiquée à la fin du n° **63**).

Dans la représentation géométrique du n° **56**, les trois droites $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ passant par un même point M de la variété s_3 sont représentées dans un plan par trois points A, A′, A″. Les résultats précédents s'expriment en disant que le côté AA′ de ce triangle ne dépend que de w, et passe par un point fixe. De même A′A″ et A″A ne dépendent respectivement que de u et v et passent par des points fixes.

Dans la suite, lorsque nous parlerons de génératrices d'une variété s_3 ou s_4, nous parlerons de celles qui sont parallèles à une génératrice de Θ_3 ou Θ_4, particulièrement intéressantes à cause de leur invariance par une transformation d'Hermite, et non des autres génératrices rectilignes pouvant exister sur ces variétés, qui se transforment en pseudo-cercles (intersections de deux pseudo-sphères). De même il n'y a pas intérêt à distinguer les plans P_2 des autres pseudo-sphères.

71. *Variétés s autres que s_3 et s_4. Correspondance entre les plans P_3 et les plans Π_4.* — Proposons-nous maintenant d'étudier les autres types de variétés s.

Aux différents points communs d'une des variétés L étudiées dans l'espace E_{13} correspondent des systèmes de relations singulières qui représentent des variétés s_3 ou s_4 constituant un faisceau linéaire ; les points communs à ces variétés constituent la variété s correspondant à la variété L considérée. Cette variété s peut être composée de points dépendant de 1, 2 ou 3 paramètres, ou réduite à un point ; elle peut aussi être composée de plusieurs parties algébriquement distinctes.

Il peut être intéressant d'énumérer tous les types de variétés s, intersection de variétés s_3 et s_4, et d'examiner leurs correspondances avec les différents types de variétés L. Nous nous contenterons d'indiquer les cas les plus simples.

Considérons d'abord un plan P_3, qu'on peut supposer passer par l'origine. Ce plan P_3 est situé sur une infinité de plans ϖ_4; d'après le n° **59**, en effet, les coefficients du plan ϖ_4 étant définis par les formules (78), si u, u', u'' sont donnés, on a une double infinité de plans contenant un même plan P_3. Si nous tenons compte maintenant des termes du second degré, en introduisant les coefficients λ, λ', λ'', on obtient une variété s_4 contenant le même plan P_3, pourvu que

$$\lambda u + \lambda' u' + \lambda'' u'' = 0.$$

On obtient donc des variétés s_4, dépendant linéairement de 4 paramètres, contenant un même plan P_3. Les points correspondants de l'espace E_{13} forment donc un plan à 4 dimensions, lieu de points exceptionnels; c'est un plan Π_4. Le plan P_3 est donc la variété s correspondant à un plan Π_4.

Les plans Π_4 dépendent de 5 paramètres. Il doit donc en être de même des plans P_3. En effet, ceux passant par l'origine dépendent de 2 paramètres $\left(\frac{u'}{u} \text{ et } \frac{u''}{u}\right)$, et les plans parallèles dépendent évidemment de 3 constantes de plus, (μ, μ' et μ'').

Nous savons que, dans un plan Π_4, les points exceptionnels doubles dépendent de 3 paramètres. Le plan P_3 doit donc être sur une triple infinité de cônes ϖ_4. En effet, il existe une simple infinité de cônes ϖ_4 ayant un sommet donné et contenant P_3; le choix du sommet introduit trois paramètres. Mais chaque cône ϖ_4, ayant une ligne de sommets, est obtenu une infinité de fois, de sorte que les cônes ϖ_4 contenant P_3 dépendent bien de $1 + 3 - 1 = 3$ paramètres.

72. *Correspondance entre les cônes ϖ_3 et les plans π_2 doubles.* — Chaque cône ϖ_3 est situé sur une double infinité de cônes ϖ_4 ayant même sommet que lui. Les points correspondants dans l'espace E_{13} constituent des points exceptionnels doubles, dépendant linéairement de 2 paramètres, et non situés dans un même plan Π_4 (puisque les

cônes $\mathcal{C}_4$ considérés n'ont aucun plan P_3 commun). Leur lieu est donc un plan π_2 double.

Les plans π_2 doubles, comme les cônes $\mathcal{C}_3$, dépendent de 6 paramètres. La variété $\mathcal{S}$ correspondant à un plan π_2 double est donc toujours un cône $\mathcal{C}_3$.

73. *Variétés $\mathcal{S}$ correspondant à une variété $\mathcal{L}_5$ spéciale, ou à une droite spéciale.* — Considérons un cône $\mathcal{C}_2$, intersection d'un cône $\mathcal{C}_3$ par un plan P_3 contenant son sommet. Il est situé sur une infinité de variétés $\mathcal{S}_3$ dont on obtient les équations en prenant des valeurs quelconques pour les coefficients λ, λ', λ'' des termes du second degré, ceux du premier degré devant représenter un plan $\mathcal{T}_4$ contenant P_3. On a ainsi des systèmes de relations singulières dépendant de 5 paramètres, représentant des variétés $\mathcal{S}_3$ dépendant de 4 paramètres. Le cône $\mathcal{C}_2$ est donc la variété $\mathcal{S}$ correspondant à une variété L_5.

D'autre part, ce cône appartenant au plan P_3 et au cône $\mathcal{C}_3$, la variété L_5 considérée comprend le plan Π_4 et le plan π_2 double qui leur correspondent. C'est donc une variété $\mathcal{L}_5$ spéciale.

A la droite spéciale, intersection du plan Π_4 et du plan π_2 double, correspond une variété $\mathcal{S}$ comprenant évidemment le plan P_3 et le cône $\mathcal{C}_3$.

Les droites spéciales d'un même plan π_2 double, dépendant de 2 paramètres, correspondent bien toutes à des variétés $\mathcal{S}$ constituées par un même cône $\mathcal{C}_3$, et un quelconque des plans P_3 contenant son sommet. De même, la variété $\mathcal{S}$, correspondant à une variable $\mathcal{L}_5$ spéciale, est toujours un cône $\mathcal{C}_2$.

74. *Variétés $\mathcal{S}$ correspondant à une variété $\mathcal{L}_5$ non spéciale, ou à une droite Δ non spéciale.* — Considérons une pseudo-sphère, dans un plan P_3, et prenons pour origine un point de la pseudo-sphère. Le plan tangent à l'origine à une variété $\mathcal{S}_3$ la contenant, devant contenir ses deux génératrices, ne dépend plus que de 2 paramètres, et les systèmes correspondant dépendent de 3 paramètres. En prenant quelconques les coefficients λ, λ', λ'' des termes du second degré, on obtient une variété $\mathcal{S}_3$ coupant P_3 suivant une pseudo-sphère tangente à l'origine à celle donnée. Il y a une condition à vérifier pour que ce

soit la même. La pseudo-sphère est donc la variété s correspondant à une variété L_5. Comme elle est dans un plan P_3, la variété correspondante comprend un plan Π_4. C'est une variété $\mathcal{L}_5$.

Les points des plans π_2 et π'_2 correspondent à deux séries de variétés s_4 contenant la pseudo-sphère sans contenir son plan P_3. En chaque point M de la pseudo-sphère passent deux génératrices $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$. Sur les variétés s_4 d'une des séries considérées sont situées la droite $\mathfrak{D}$, génératrice isolée, et un cône $\mathcal{C}_2$ contenant $\mathfrak{D}'$. L'autre série s'obtient en intervertissant les rôles de $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$.

Considérons une droite Δ, intersection d'un plan Π_4 et d'un plan π_2 non double, et par suite intersection du plan Π_4, et de la variété $\mathcal{L}_5$ déterminée par le plan π_2 et le plan π'_2 associé. La variété s correspondant à cette droite comprend un plan P_3 et une pseudo-sphère qui ont, comme nous le verrons, une génératrice commune.

Si la droite Δ est double, sans être spéciale, le plan Π_4 qui la contient est dans la variété $\mathcal{L}_5$ considérée. La pseudo-sphère est donc dans le plan P_3. Les cônes $\mathcal{C}_4$ correspondant aux points de cette droite ont alors en commun le plan P_3 et se touchent suivant une pseudo-sphère de ce plan. On voit par cet exemple que la variété s correspondant à une droite Δ double non spéciale ne contient aucun point de plus que celle qui correspond à son plan Π_4; mais en considérant la variété s comme l'intersection des variétés s_3 ou s_4 d'une famille linéaire, la distinction entre ces deux types de variétés s devient très nette.

75. *Relation avec la transformation de Lie.* — Ce qui précède montre l'existence d'une relation entre les points exceptionnels doubles de l'espace E_{13} et les parallèles aux génératrices du cône $\mathcal{C}_3$, dans l'espace E_6. La variété s correspondant à un point exceptionnel double A est, en effet, un cône $\mathcal{C}_4$, bien déterminé par son axe $\mathfrak{D}$. Si l'on ne considère que les points A d'un plan Π_3 double, les droites $\mathfrak{D}$ correspondantes sont, dans un plan P_3 déterminé, les droites qui coupent une conique située à l'infini. Nous allons voir que cette correspondance entre les points A et les droites $\mathfrak{D}$ est une transformation de Lie.

Si, en effet, on considère les points A d'une droite Δ du plan Π_3

double, les cônes $\mathcal{C}_4$ correspondants se touchent (d'après le n° **74**), suivant une pseudo-sphère du plan P_3. Or, les points singuliers de certains d'entre eux, puisqu'il s'agit d'un faisceau linéaire, sont certainement des points de contact de tous les cônes $\mathcal{C}_4$ considérés. Les axes $\mathcal{D}$ de ces cônes décrivent donc la pseudo-sphère. Si A décrit une droite Δ, la droite $\mathcal{D}$ correspondante dans la transformation étudiée décrit donc une pseudo-sphère, qui est, d'après le n° **74**, la variété $\mathcal{S}$ correspondant à la variété $\mathcal{L}_5$ dont le plan π_2 contient Δ. Si A décrit la droite Δ' conjuguée de Δ par rapport au complexe des droites spéciales, la variété $\mathcal{L}_5$ est la même, et l'on trouve pour les droites $\mathcal{D}$ les génératrices de l'autre système de la même pseudo-sphère. Si enfin la droite Δ appartient au complexe des droites spéciales, la pseudo-sphère correspondante est de rayon nul.

Ces propriétés sont caractéristiques de la transformation de Lie. La correspondance entre les points A d'un plan Π_3 double et les axes $\mathcal{D}$ des cônes $\mathcal{C}_4$ correspondants est bien une transformation de Lie.

Une transformation d'Hermite conservant Π_4 définit, dans le plan Π_3 double, une transformation homographique conservant le complexe des droites spéciales, et dans le plan P_3, une transformation ponctuelle transformant les droites $\mathcal{D}$ en droites analogues. Ces deux transformations sont évidemment celles qui se correspondent dans la transformation de Lie considérée.

76. *Variétés* $\mathcal{S}$ *contenant un plan* P_3 *donné.* — Elles correspondent évidemment aux sections d'un même plan Π_4. Nous connaissons déjà celles qui correspondent à un point, simple ou double, et à une droite, simple, double, ou spéciale.

Considérons maintenant un plan Π_2 non double, contenant une droite spéciale. A ses points correspondent les variétés $\mathcal{S}_4$ d'un *réseau* (famille linéaire doublement infinie); ce réseau est bien déterminé par le faisceau linéaire de cônes $\mathcal{C}_4$ correspondant aux points de la droite spéciale, et une autre variété $\mathcal{S}_4$. Ces cônes $\mathcal{C}_4$ ont en commun le plan P_3 et un cône $\mathcal{C}_3$ de sommet M situé dans P_3; cette variété $\mathcal{S}_4$ contient P_3 et M, et coupe par suite le cône $\mathcal{C}_3$ de sommet M suivant un cône $\mathcal{C}_2$ situé dans P_3 et une génératrice isolée $\mathcal{D}$. L'intersection

de toutes les variétés s_4 du réseau comprend donc le plan P_3 et la droite $\mathfrak{D}$ qui le coupe en M; leur ensemble constitue la variété s correspondant au plan Π_2 considéré.

Le cas d'un plan Π_2 double se traite d'une manière analogue, ou comme cas limite du précédent. La variété s correspondante comprend le plan P_3, et une droite $\mathfrak{D}$ de ce plan considérée comme droite double; cette droite est celle qui correspond par la transformation de Lie au plan Π_2 double, ou au point A commun aux droites spéciales de ce plan.

Considérons maintenant un plan Π_3. Il contient une double infinité de plans Π_2 contenant des droites spéciales qui ont un point commun A; à ces plans correspondent des variétés s constituées par le plan P_3 et des droites $\mathfrak{D}'$, dont on ne peut rien dire, si ce n'est qu'elles coupent une même droite $\mathfrak{D}$ de P_3, celle qui correspond à A. La variété s cherchée représente donc l'intersection d'une famille triplement infinie de variétés s_4, sans autre point commun que ceux de P_3, et sans point de contact fixe; mais deux variétés de cette famille, correspondant à deux points A_1 et A_2, se touchent en un point mobile de la droite $\mathfrak{D}$, celui qui correspond par la transformation de Lie à la droite spéciale du plan AA_1A_2.

Parmi les plans Π_2 contenant des droites spéciales passant par A, considérons ceux qui contiennent une droite Δ simple contenant A. Il leur correspond des droites $\mathfrak{D}'$ coupant la droite $\mathfrak{D}$ du plan P_3. Leur lieu est évidemment la pseudo-sphère qui, avec le plan P_3, constitue la variété s correspondant à la droite Δ. Nous voyons que, comme nous l'avons énoncé au n° **74**, cette pseudo-sphère et le plan P_3 ont une génératrice commune.

77. *Variété s constituée par une droite $\mathfrak{D}$ et une pseudo-sphère ayant un point commun.* — Par une transformation d'Hermite, on peut ramener la pseudo-sphère à être un plan P_2. La variété s étudiée est alors dans un plan $\mathfrak{S}_3$ bien déterminé, représenté d'une infinité de manières par un système de relations singulières, c'est-à-dire que les coefficients du premier degré, dans les équations d'une variété s_3 contenant s, dépendent d'un paramètre. Les coefficients λ, λ', λ'' vérifient une relation, puisque le cône $\mathfrak{C}_1$ qu'ils définissent doit contenir le

plan P_2 (et par suite le plan P_3 contenant P_2). La variété $\mathcal{S}$, contenue dans des variétés $\mathcal{S}_3$ représentées par des systèmes dépendant de 3 paramètres, correspond à un plan $\mathcal{P}_3$ ou $\mathcal{L}_3$.

Cherchons les variétés $\mathcal{S}_4$ contenant $\mathcal{S}$, qui correspondent aux points exceptionnels de ce plan. Le plan tangent $\mathcal{T}_4$ à une telle variété, au point M commun à $\mathcal{D}$ et P_2, peut être celui déterminé par $\mathcal{D}$, et le plan P_3 contenant P_2; les coefficients λ, λ', λ'' doivent être alors tels que la génératrice $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ soit dans P_3 (sinon on aurait une variété $\mathcal{S}_3$, et non $\mathcal{S}_4$); cela leur impose une condition, et l'on a une double infinité de variétés $\mathcal{S}_4$. On peut, d'autre part, pour déterminer $\mathcal{T}_4$, prendre comme génératrice isolée une génératrice $\mathcal{D}'$ du plan P_2, et comme plan P_3 celui déterminé par $\mathcal{D}$ et l'autre génératrice $\mathcal{D}''$ du plan P_2; il faut alors que la génératrice $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ soit la droite $\mathcal{D}''$, et l'on n'a qu'une simple infinité de variétés $\mathcal{S}_4$; on obtient une autre famille analogue en intervertissant $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$.

Cela montre que la variété $\mathcal{S}$ étudiée correspond à un plan $\mathcal{L}_3$, dans lequel les points exceptionnels constituent un plan Π_2 et deux droites Δ et Δ'. La pseudo-sphère contenue dans cette variété correspond à la variété $\mathcal{L}_5$ contenant $\mathcal{L}_3$.

78. *Variété $\mathcal{S}$ constituée par trois droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ se coupant en un point* M *et non situées dans un même plan* P_3. — Pour une variété $\mathcal{S}_3$ contenant $\mathcal{S}$, le plan tangent en M est bien déterminé; les coefficients λ, λ', λ'' sont quelconques. On a ainsi une triple infinité de variétés $\mathcal{S}_3$, correspondant aux droites D d'une variété L_4.

La variété $\mathcal{S}$ est située sur le cône $\mathcal{C}_3$ de sommet M; la variété L_4 comprend donc un plan π_2 double.

En dehors des cônes $\mathcal{C}_4$ contenant ce cône $\mathcal{C}_3$, les variétés $\mathcal{S}_4$ contenant $\mathcal{S}$ sont obtenues de la manière suivante : le plan $\mathcal{T}_4$ tangent en M est défini par une des droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ et le plan P_3 des deux autres; les coefficients λ, λ', λ'' sont ceux d'une génératrice de ce plan P_3. On a ainsi trois séries doublement infinies de variétés $\mathcal{S}_4$.

La variété L_4 à laquelle correspond $\mathcal{S}$ comprend donc un plan π_2 double, nappe spéciale, et trois plans Π_2. C'est la variété $\mathfrak{M}_4$ étudiée n° **47**.

79. *Variété* $\mathcal{S}$ *constituée par un pseudo-cercle.* — Le pseudo-cercle est l'intersection d'une simple infinité de pseudo-sphères dans un même plan P_3. Il correspond donc à la variété $\mathfrak{M}_6$, lieu d'une simple infinité de pseudo-sphères ayant même plan de base.

Le pseudo-cercle peut se réduire en particulier, soit à une droite qui ne soit pas une droite $\mathfrak{D}$, mais qui soit dans un plan P_3 et, par suite, parallèle à une génératrice du cône $\mathcal{C}_5$, soit à deux droites $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ qui se coupent. Dans ce dernier cas, il y a décomposition entre les deux séries de variétés $\mathcal{S}_4$ qui le contiennent sans contenir le plan P_3; les unes admettent $\mathfrak{D}$, les autres $\mathfrak{D}'$, comme génératrice isolée. La variété $\mathfrak{M}_6$, à laquelle correspond le couple de droites $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$, contient alors, en dehors du plan de base, des points exceptionnels constituant deux nappes à trois dimensions algébriquement distinctes; elles ont en commun le plan π_2 double auquel correspond le cône $\mathcal{C}_3$ de sommet M.

En dehors de ce cas, un pseudo-cercle est situé sur deux cônes $\mathcal{C}_3$; la variété à trois dimensions, qui constitue avec le plan de base le lieu des points exceptionnels dans la variété $\mathfrak{M}_6$, contient donc deux plans π_2 doubles.

80. *Variété* $\mathcal{S}$ *constituée par une droite* $\mathfrak{D}$. — Les variétés $\mathcal{S}_3$ contenant $\mathcal{S}$ sont assujetties à cinq conditions (trois pour écrire qu'elles contiennent un point choisi sur $\mathfrak{D}$, deux pour que le plan tangent en ce point contienne $\mathfrak{D}$); elles correspondent donc à des droites D décrivant une variété $\mathfrak{M}_8$.

Chacune de ces variétés contient deux pseudo-sphères contenant $\mathfrak{D}$. La variété $\mathfrak{M}_8$ est alors le lieu des variétés $\mathcal{L}_5$, auxquelles correspondent ces pseudo-sphères. Or, la droite $\mathfrak{D}$ est dans une simple infinité de plans P_3, appartenant au cône $\mathcal{C}_4$ d'axe $\mathfrak{D}$, et dans chacun de ces plans P_3 est située une double infinité de pseudo-sphères contenant $\mathfrak{D}$. Les variétés $\mathcal{L}_5$ considérées ont une infinité de plans de base distincts, contenant un même point exceptionnel double A (celui auquel correspond le cône $\mathcal{C}_4$ d'axe $\mathfrak{D}$, celui par conséquent que la transformation de Lie transforme en la droite $\mathfrak{D}$); à chacun de ces plans de base correspond une double infinité de variétés $\mathcal{L}_5$.

La variété $\mathfrak{M}_8$, contenant une infinité de plans Π_4 contenant A, et, par suite, le cône Γ de sommet A, n'est autre que le plan $\mathfrak{T}_8$ tangent en A à la variété V. Aux points du cône Γ correspondent des variétés $\mathfrak{s}_4$ dans lesquelles $\mathfrak{D}$ appartient à un cône $\mathfrak{C}_2$ situé dans $\mathfrak{s}_4$, tandis qu'aux points de la quadrique Q associée à A correspondent des variétés $\mathfrak{s}_4$ ayant $\mathfrak{D}$ comme génératrice isolée.

Aux points de la variété $\mathfrak{M}_7$, lieu des droites $\mathfrak{D}$ situées dans $\mathfrak{T}_8$ et coupant un plan Π_4 bien déterminé du cône Γ, correspondent évidemment des variétés $\mathfrak{s}_3$ contenant $\mathfrak{D}$, et pour lesquelles une des pseudosphères contenant $\mathfrak{D}$ est dans un plan P_3 bien déterminé.

On remarque que les variétés $\mathfrak{s}$ correspondant, d'une part, au point exceptionnel double A, d'autre part, au plan $\mathfrak{T}_8$ tangent en A à la variété V, sont l'une le cône $\mathfrak{C}_4$ d'axe $\mathfrak{D}$, l'autre la droite $\mathfrak{D}$. Du premier de ces résultats, on peut aisément déduire le second. La droite $\mathfrak{D}$, lieu des points doubles de $\mathfrak{C}_4$, est évidemment l'intersection de $\mathfrak{C}_4$ et de toutes les variétés $\mathfrak{s}_4$ qui en diffèrent infiniment peu. La variété $\mathfrak{M}$ correspondante comprend donc A et tous les points infiniment voisins sur la variété V, et, comme elle est linéaire, tous ceux du plan $\mathfrak{T}_8$ tangent à cette variété.

81. *Variété* $\mathfrak{s}$ *constituée par un point* M. — Elle correspond évidemment à une variété $\mathfrak{M}_{10}$. Or, toutes les variétés $\mathfrak{s}_3$ ou $\mathfrak{s}_4$ contenant M contiennent des droites $\mathfrak{D}$ passant par ce point, et M est l'intersection d'une double infinité de droites $\mathfrak{D}$, dont le lieu est un cône $\mathfrak{C}_3$. La variété $\mathfrak{M}_{10}$ est donc le lieu d'une double infinité de plans $\mathfrak{T}_8$, dont les points de contact décrivent un plan π_2 double. On voit ainsi que ce lieu, étudié n° **52**, est bien une variété $\mathfrak{M}$.

Aux points du plan π_2 double correspondent les cônes d'axes $\mathfrak{D}$ passant par M. Par suite, à l'intersection de deux ou trois plans tangents $\mathfrak{T}_8$ dont les points de contact sont sur un même plan π_2 double correspondent donc l'ensemble de deux ou trois génératrices d'un même cône $\mathfrak{C}_3$. On retrouve ainsi aisément des résultats obtenus n^{os} **78** et **79**.

82. *Variété* $\mathfrak{s}$ *constituée par deux points* M *et* M'. — Elle cor-

respond à l'intersection des variétés $\mathfrak{M}_{10}$ et $\mathfrak{M}'_{10}$ auxquelles correspondent M et M'. Trois cas sont à distinguer.

Premier cas. — La droite MM' est une droite $\mathfrak{D}$. Les plans π_2 doubles dont les variétés $\mathfrak{M}_{10}$ et $\mathfrak{M}'_{10}$ sont déduites ont un point commun A, celui auquel correspond le cône $\mathfrak{S}_4$ d'axe $\mathfrak{D}$. Les variétés $\mathfrak{M}_{10}$ et $\mathfrak{M}'_{10}$ ont alors en commun le plan $\mathfrak{T}_8$ tangent en A à la variété V, et la variété $\mathfrak{s}$ comprend, non seulement M et M', mais toute la droite MM'.

Deuxième cas. — La droite MM' est parallèle à une génératrice du cône $\mathfrak{S}_5$; elle est alors dans un plan P_3. Les variétés $\mathfrak{M}_{10}$ et $\mathfrak{M}'_{10}$ ont alors un plan Π_4 commun. Leur intersection est une variété $\mathfrak{M}_7$ ayant ce plan pour plan de base; les deux autres nappes de points exceptionnels y constituent une surface unique à 4 dimensions, contenant une simple infinité de plans π_2 doubles (puisque l'ensemble des points M et M' d'un même plan P_3 est dans une simple infinité de cônes $\mathfrak{S}_2$, et, par suite, de cônes $\mathfrak{S}_3$, dont les sommets décrivent un pseudo-cercle).

Troisième cas. — La droite MM' est quelconque. Les variétés $\mathfrak{M}_{10}$ et $\mathfrak{M}'_{10}$ ont pour intersection une variété $\mathfrak{M}_7$ dans laquelle le lieu des points exceptionnels n'est pas décomposable.

Nuove osservazioni su alcuni metodi d'approssimazione dell'analisi;

Per Mauro PICONE.

PREFAZIONE.

Considerando, per esempio, i problemi nel campo delle equazioni lineari alle derivate parziali del tipo ellittico, dei quali la fisica ha chiesto la soluzione all'analisi matematica, si può ben dire che, se le trattazioni fino ad oggi date di quei problemi possono essere, alla fine, ritenute del tutto esaurienti dal matematico, esse tuttavia non contengono metodi per l'effettivo calcolo approssimato della soluzione che riescano, in ogni caso, di facile e di utile applicazione al fisico.

Il potente ausilio delle equazioni integrali ha permesso oggi di conseguire, con una grande generalità, i teoremi d'esistenza per molti e per i più importanti di quei problemi, ma si deve, pur troppo, convenire che, nelle successive approssimazioni della soluzione, date con le dimostrazioni di questi teoremi, non si può vedere un pratico metodo di calcolo.

Mi sono proposto di indagare se non sia possibile, in alcuni casi, di realizzare tali metodi di calcolo. L'indagine mi ha per intanto condotto ad un nuovo metodo di calcolo approssimato per la soluzione del problema di Dirichlet, metodo che, dal punto di vista accennato, mi sembra possedere i desiderati requisiti. L'esposizione di tale metodo sarà l'oggetto di una memoria che, in questo stesso Giornale, seguirà la presente.

Nella presente memoria sottopongo ad una diffusa trattazione il

problema generale *dell'approssimazione di un'assegnata funzione per combinazione lineare di assegnate altre funzioni*. Sui risultati di tale trattazione si fonda l'indicato metodo d'approssimazione per la soluzione del problema di Dirichlet, ma è sperabile che questi risultati forniranno le basi per ulteriori proficue applicazioni all'integrazione approssimata di equazioni alle derivate parziali, dei varii tipi, della fisica-matematica.

I metodi classici prescrivono, quasi, lo sviluppo della soluzione in serie di note funzioni, senza domandare se, anche ottenuta una serie uniformemente ed assolutamente convergente, derivabile termine a termine quante volte si vuole, essa serie, arrestata ai primi n termini, fornisca poi, fra tutte le combinazioni lineari delle stesse n funzioni, la migliore approssimazione possibile della soluzione, *in tutto il dominio* Γ *di sua esistenza nel quale deve essere considerata*. Quasi sempre, invece, avviene che delle medesime funzioni che compaiono in quei primi n termini della serie si può trovare una diversa combinazione lineare che assai meglio approssima la soluzione *in tutto l'indicato dominio* Γ. Nelle scienze sperimentali si constata che tanto meglio si approssima qnanto più piccolo è l'errore quadratico medio che si commette e che la migliore approssimazione è quella che rende minimo tale errore. A questo concetto si informa il *metodo dei minimi quadrati* di Gauss che ha dato e dà così cospicui frutti nella scienza della misura.

Orbene, concependo anche in analisi l'errore d'approssimazione al modo delle scienze sperimentali, io riprendo il metodo dei minimi quadrati e oso pensarne l'applicazione sistematica all'integrazione approssimata di intiere classi di equazioni alle derivate parziali.

L'idea di introdurre tale metodo nell'analisi, non è nuova. Essa già si trova in Tchebychef (1) e fu anche, nello stesso indirizzo, successivamente elaborata da Heine (2), da Gram (3) e da altri. Loddove, assai

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (Journal de Liouville), 2e série, t. III, p. 319.

(2) Heine, *Handbuch Kugelfunction*, Bd I, Kap. V.

(3) Gram, *Ueber die Entwickelung reeller Function in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate* (*Journal für die reine und angewandte Mathematick*, Bd 94, 1883, p. 41).

più recentemente, l'applicazione del metodo a determinati problemi di fisica, dipendenti appunto dall'integrazione dell'equazione $\Delta_2 u = 0$, è stata anche effettuata o proposta da Somigliana e Vercelli [1] e poscia da Brillouin [2], non ostante che del metodo non si possedesse alcuna nozione sulla sua convergenza.

Oggi però, dopo la scoperta di Lebesgue delle funzioni sommabili, dopo l'introduzione, dovuta al Fischer, della convergenza in media, il metodo dei minimi quadrati acquista una nuova, inesperata potenza, anche nel campo della pura analisi matematica, e là ove esso non arrivava che per una congettura, vi arriva, come qui ho dimostrato (al n° **20**, § V), con matematica certezza.

Ai metodi classici di integrazione per serie rimane il grave compito, di interesse prevalentemente teorico, di provare l'esistenza e di trovare il numero delle soluzioni dei problemi sull'integrazione delle equazioni alle derivate parziali; ed io sarei pago se questo mio lavoro ed i successivi nei quali applicherò i risultati di questo, riuscissero, almeno, a stabilire che *al metodo dei minimi quadrati spetta, invece, il compito di* calcolare *la soluzione*.

Nell'esposizione del presente lavoro, per comodità del lettore e allo scopo di fare un tutto organico, non ho trascurato di trattare rapidamente alcuni risultati noti fondamentali.

Degna di relievo mi pare che sia la nuova semplicissima trattazione che qui ricevono (ai §§ VI et VII) i sistemi di infinite equazioni lineari in infinite quantità incognite, la cui soluzione si riconnette appunto alle nostre ricerche d'approssimazione. Al § VII si ritrovano i bei risultati di E. Schmidt su tali sistemi.

---

(1) Somigliana e Vercelli, *Sulla provisione matematica della temperatura nei grandi trafori alpini* (*Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, t. LXIII, 1913, p. 327).

(2) Brillouin, *La méthode des moindres carrés et les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique* (*Annales de Physique*, t. VI, 1916, p. 137).

I. — Sulla convergenza in media.

1. Definizioni e teorema Fischer-Weyl. — Indicheremo sempre con la lettera E un insieme di punti, limitato, misurabile (al senso di Lebesgue) e di misura non nulla, di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni. Sia P un punto variabile in E e $f(P)$ una funzione di P definita in E [1] ivi di quadrato sommabile (al senso di Lebesgue), la $f(P)$ risulterà sommabile in E. Se $g(P)$ è un'altra funzione definita in E, ivi pur essa di quadrato sommabile, le funzioni fg, $(f-g)^2$, $(f+g)^2$ risulteranno sommabili in E.

Ciò posto, consideriamo il fecondo concetto di *convergenza in media* introdotto da E. Fischer [2].

La successione di funzioni

$$(1) \qquad F_0(P), \quad F_1(P), \quad F_2(P), \quad \ldots, \quad F_n(P), \quad \ldots,$$

sia costituita di funzioni definite in E ed ivi di quadrato sommabile, si dice che *la successione converge su* E *in media* se :

$$\lim_{r,s=\infty} \int_E [F_r(P) - F_s(P)]^2 \, dP = 0.$$

Si dice che la stessa successione (1) *converge su* E *in media verso la funzione* $f(P)$ e scriveremo

$$\lim_{n=\infty} F_n(P) = f(P),$$

se

$$\lim_{n=\infty} \int_E [f(P) - F_n(P)]^2 \, dP = 0.$$

Evidentemente : se una successione converge su E in media, essa converge in media su ogni insieme misurabile contenuto in E; se una successione converge su E in media verso una funzione f, essa con-

---

(1) Sottintenderemo sempre (salvo a dichiarare espressamente il contrario) reale e finito il valore assegnato ad una funzione in ogni punto.

(2) E. Fischer, *Sur la convergence ou moyenne* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, 1er semestre 1907, p. 1022).

verge in media verso la stessa funzione su ogni insieme misurabile contenuto in E; se una successione converge su E in media verso una funzione f, ogni altra funzione verso la quale la stessa successione converga su E in media sarà equivalente alla f [1]; condizione necessaria affinchè una successione converga su E in media verso una funzione f è che la successione converga su E in media; condizione sufficiente affinchè una successione converga su E in media è che esista un insieme E′, avente la misura di E e contenuto in E, nel quale la successione converge uniformemente.

La convergenza in media per una serie

$$(2) \qquad u_0(\mathrm{P}) + u_1(\mathrm{P}) + \ldots + u_n(\mathrm{P}) + \ldots,$$

di funzioni definite in E ed ivi di quadrato sommabile, si riporta a quella della successione

$$(1) \quad \mathrm{F}_0(\mathrm{P}) = u_0(\mathrm{P}), \quad \mathrm{F}_1(\mathrm{P}) = u_0(\mathrm{P}) + u_1(\mathrm{P}), \quad \ldots, \quad \mathrm{F}_n(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} u_k(\mathrm{P}), \quad \ldots.$$

Se

$$f(\mathrm{P}) = \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(\mathrm{P}),$$

si scriverà

$$f(\mathrm{P}) \sim u_0(\mathrm{P}) + u_1(\mathrm{P}) + \ldots + u_n(\mathrm{P}) + \ldots.$$

Sussiste il

Teorema Fischer-Weyl [2]. — *Se una successione di funzioni converge su* E *in media, esiste una funzione, determinata quasi ovunque in* E, *verso la quale la successione converge su* E *in media.*

Questo fondamentale teorema è stato scoperto dal Fischer, e dimostrato, dal Fischer ed in seguito di nuovo dal Weyl, nel caso che l'insieme E si riduca ad un intervallo lineare. Alla denominazione del

---

(1) Due funzioni f e g definite, in E, saranno dette fra di loro equivalenti in E se si ha $f(\mathrm{P}) = g(\mathrm{P})$ quasi ovunque in E, cisè fatta, al più, eccezione per i punti di un insieme di misura nulla. Si scriverà allora $f(\mathrm{P}) \doteq g(\mathrm{P})$.

(2) Fischer, *loc. cit.* — H. Weyl, *Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunctionen fortschreiten* (*Mathematische Annalen*, Bd 68, 1909, p. 225).

teorema da noi enunciato è giusto però aggiungere il nome di Weyl, poichè soltanto la dimostrazione di questo autore è suscettibile d'essere immediatamente estesa ad un qualsiasi insieme limitato e misurabile di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni.

2. Alcune proprietà della convergenza in media. — Esporremo ora alcune notevoli proprietà della convergenza in media, sostanzialmente già osservate.

I. *Sia* Λ *un insieme misurabile contenuto in* E, *se la successione* (1) *converge su* E *in media, esisterà un numero positivo* K *tale che, per ogni indice* n, *qualunque sia* Λ, *risulta*

$$\int_\Lambda [F_n(P)]^2 \, dP \leqq K.$$

Ed invero, dato ε positivo e arbitrario, è possibile trovare un indice n_ε tale che, se $n \geqq n_\varepsilon$, si ha

$$\int_E (F_n - F_{n_\varepsilon})^2 \, dP \leqq \varepsilon,$$

ma è

$$\int_\Lambda F_n^2 \, dP \leqq \int_E F_n^2 \, dP \leqq 2 \int_E (F_n - F_{n_\varepsilon})^2 \, dP + 2 \int_E F_{n_\varepsilon}^2 \, dP,$$

ne segue, che il numero K, di cui abbiamo asserito l'esistenza, è il più grande fra i seguenti $n_\varepsilon + 1$ numeri :

$$2\left(\varepsilon + \int_E F_k^2 \, dP\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n_\varepsilon).$$

II. *Le successioni* $\{F_n\}$ *e* $\{G_n\}$ *convergano su* E *in media, rispettivamente, verso le funzioni* f *e* g, *dico che allora*

$$\lim_{n=\infty} \int_\Lambda F_n G_n \, dP = \int_\Lambda fg \, dP,$$

uniformemente per Λ *variabile in* E.

Difatti

$$\begin{aligned}
&\left|\int_A (fg - F_n G_n)\, dP\right| \\
&\quad = \left|\int_A (f - F_n) g\, dP + \int_A (g - G_n) F_n\, dP\right| \\
&\quad \leqq \sqrt{\int_A (f - F_n)^2\, dP \int_A g^2\, dP} + \sqrt{\int_A (g - G_n)^2\, dP \int_A F_n^2\, dP} \\
&\quad \leqq \sqrt{\int_E g^2\, dP} \sqrt{\int_E (f - F_n)^2\, dP} + \sqrt{K} \sqrt{\int_E (g - G_n)^2\, dP}.
\end{aligned}$$

In particolare : per $G_n \equiv 1$, si ha :

$$\lim_{n=\infty} \int_A F_n\, dP = \int_A f\, dP,$$

uniformemente in E; per $G_n \equiv F_n$, si ha :

$$\lim_{n=\infty} \int_A F_n^2\, dP = \int_A f^2\, dP,$$

uniformemente in E.

II. — Sulla convergenza uniforme in generale.

5. Definizione e teorema di Weyl. — Si deve al Weyl (*loc. cit.*, p. 339) uno studio approfondito della convergenza in media con il quale si consegue una più adeguata conoscenza del modo di comportarsi della differenza $f(P) - F_n(P)$ nei punti dell'insieme. Per enunciare questo importante risultato occorre introdurre il concetto di *convergenza uniforme in generale*, del pari dovuto al Weyl.

Nell'insieme E, limitato, misurabile e di misura non nulla, siano definite, nel modo più arbitrario, le funzioni

$$(1) \qquad \begin{cases} G_0(P) = v_0(P), \qquad G_1(P) = v_0(P) + v_1(P), \qquad \ldots, \\ \qquad\qquad G_n(P) = \sum_{k=0}^{n} v_k(P), \qquad \ldots, \end{cases}$$

costituenti una successione; si dirà, con Weyl, che tale successione,

oppure che la serie

$$(2) \qquad v_0(P) + v_1(P) + \ldots + v_n(P) + \ldots$$

converge su E *uniformemente in generale*, se, comunque si assegni un numero positivo $\varepsilon < mE$ [1], è possibile costruire un insieme E_ε, contenuto in E e di misura $mE - \varepsilon$, nel quale la successione, cioè la serie, converge uniformemente.

Evidentemente : se la successione (1) converge su E uniformemente in generale, essa converge quasi ovunque in E, esisterà, cioè, un insieme E′, avente la misura di E ed in questo contenuto, nel quale la successione (1), cioè la serie (2), converge. Ogni funzione $g(P)$, definita in tutto E, che in E′ coincide col limite della successione (1), cioè con la somma della serie (2), si dirà *rappresentata* da quella successione o da quella serie.

Ciò posto, siamo in grado di enunciare l'accenuato risultato di Weyl col seguente.

Teorema di Weyl. — *Se la successione*

$$(3) \qquad \begin{cases} F_0(P) = u_0(P), \quad F_1(P) = u_0(P) + u_1(P), \quad \ldots, \\ F_n(P) = \sum_{k=0}^{n} u_k(P), \quad \ldots, \end{cases}$$

di funzioni definite in E, *ivi ciascuna di quadrato sommabilo, converge su* E *in media, è possibile costruire quante si vogliano successioni* $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$ *di indici crescenti, tali che la successione di funzioni*

$$(4) \qquad F_{n_1}(P), \quad F_{n_2}(P), \quad \ldots, \quad F_{n_s}(P), \quad \ldots,$$

cioè la serie,

$$(5) \qquad \sum_{k=0}^{n_1} u_k(P) + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} u_k(P) + \ldots + \sum_{k=n_s+1}^{n_{s+1}} u_k(P) + \ldots,$$

converge su E *uniformemente in generale. La successione* (3)

---

[1] Se con una determinata lettera designamo un insieme misurabile, con la stessa lettera preceduta dalla lettera m designeremo la misura dell'insieme.

converge su E *in media verso ogni funzione* $f(P)$ *rappresentata dalla successione* (4), *cioè dalla serie* (5).

Ecco poi come il Weyl costruisce le indicate successioni di indici $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$.

Sia ε_n l'estremo superiore dell'insieme di numeri descritto da

$$(6) \qquad \int_E [F_{n+\nu}(P) - F_n(P)]^2 \, dP,$$

al variare di ν da o a ∞. Per la supposta convergenza in media della successione (3), si avrà $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. È possibile per ciò costruire quante si vogliano successioni crescenti di indici $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$, tali che la serie $\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2} + \ldots + \varepsilon_{n_s} + \ldots$ converga; orbene, *per ogni tale successione di indici la successione* (4) *converge su* E *uniformemente in generale.*

4. Osservazione sulla costruzione di Weyl. — La costruzione del Weyl, dianzi esposta, appare in generale difficile per la ricerca, che essa richiede, per ogni valore dell'indice n, dell'estremo superiore (o di un numero a questo non inferiore) dell'insieme numerico descritto dall'integrale (6) al variare di ν da o a ∞ [1]. Vi è un caso però, molto importante per le nostre future applicazioni, in cui quella ricerca è immediatamente compiuta. È il caso in cui già si conosce una funzione $f(P)$ verso la quale la successione (3) converge su E in media, e questa convergenza è tale che, posto

$$(7) \qquad \sigma_n = \int_E (f - F_n)^2 \, dP,$$

la successione $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$ (che ha per limite zero) non è mai

---

[1] *Cf.* C. Severini, *Sulla teoria di chinsura dei sistemi di funzioni ortogonali* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 2e semestre 1913). In questo lavoro già si trova (al n° **6**) la critica del testo alla costruzione del Weyl, però anche nel caso contemplato dal Severini si verifica la circostanza semplificatrice osservata più oltre nel testo.

crescente. In tale ipotesi risulta invero :

$$\int_E (F_{n+\nu} - F_n)^2 \, dP \leqq 2 \int_E (f - F_n)^2 \, dP + 2 \int_E (f - F_{n+\nu})^2 \, dP \leqq 4\sigma_n.$$

Si ha pertanto :

Se la successione (3) *converge su* E *in media verso la funzione* $f(P)$, *in maniera che l'integrale* (7) *non cresca mai al crescere di* n, *e se, ad esempio, per la successione di indici* $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$ *si ha :*

$$\int_E (f - F_{n_s})^2 \, dP \leqq \frac{1}{s^2} \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

la successione (4) *converge su* E *uniformemente in generale e vi rappresenta la funzione* $f(P)$.

III. — Posizione del problema d'approssimazione.

5. Considerazioni preliminari. — Nell'insieme limitato e misurabile E, di misura non nulla, di uno spazio lineare S_r ad un numero qualunque r di dimensioni, siano assegnate le funzioni

$$(1) \qquad f_0(P), \quad f_1(P), \quad \ldots, \quad f_n(P), \quad \ldots,$$

ciascuna di quadrato sommabile, costituenti una successione. Come ben si sa, un problema di capitale importanza nell'analisi è il seguente :

Data, arbitrariamente, una funzione $f(P)$ *in* E, *ivi di quadrato sommabile, approssimare la funzione, in tutto* E, *per mezzo di combinazioni lineari, a coefficienti costanti, di funzioni della successione* (1).

È nella natura stessa del problema il fare l'ipotesi che, per ogni valore di n, le funzioni $f_0, f_1, \ldots, f_n$, siano, in E, *linearmente indipendenti*, siano cioè tali che non esistano $n+1$ costanti $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$, non tutte nulle, per le quali si abbia, quasi ovunque in E,

$$c_0 f_0(P) + c_1 f_1(P) + \ldots + c_n f_n(P) = 0.$$

Poniamo

$$\int_E f_i(P) f_j(P)\, dP = f_{ij},$$

l'ipotesi ora detta, che noi appunto facciamo, equivale ad ammettere, com' è noto, che per ogni valore di n si ha :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} f_{00} & f_{01} & \cdots & f_{0n} \\ f_{10} & f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} > 0 \quad (^1).$$

Diremo in tal caso, semplicemente, che il sistema $[f_n]$ di funzioni è *di funzioni linearmente indipendenti.*

Il generale problema d'approssimazione, testè sommariamente indicato, contiene, evidentemente, come caso particolare, il classico problema dello sviluppo di una funzione, arbitrariamente data, in serie di assegnate altre funzioni. Supposto, in particolare, che in E sia :

$$f_0 = 1, \quad f_1 = x_1, \quad f_2 = x_2, \quad \ldots, \quad f_r = x_r, \quad f_{r+1} = x_1^2, \quad f_{r+2} = x_1 x_2, \quad \ldots,$$

ove $x_1, x_2, \ldots, x_r$ designano coordinate di un punto di E, si ha il problema dell'approssimazione di una funzione per mezzo di polinomii.

6. Caso in cui le funzioni d'approssimazione sono in numero limitato. — Rispondiamo, in primo luogo, al quesito seguente : *Come si può approssimare in* E *un' assegnata funzione* $f(P)$, *di quadrato sommabile, mediante combinazioni lineari di funzioni della successione limitata* $f_0, f_1, \ldots, f_\nu$? A tale questione si risponde subito al modo seguente :

O è possibile determinare $\nu + 1$ costanti $a_0, a_1, \ldots, a_\nu$ per modo che, quasi ovunque in E, sia $f = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_\nu f_\nu$, oppure la richiesta approssimazione non può scendere al disottoto di un termine assegnabile δ, si può cioè determinare una quantità positiva δ, tale che,

---

(1) In ogni caso, qualisisiano le funzioni $f_0, f_1, \ldots, f_n$ di quadrato sommabile, il determinante al primo membro della diseguaglianza del testo non è mai negativo. Il suo annularsi è condizione necessaria e sufficiente affinchè le funzioni $f_0, f_1, \ldots, f_n$ siano in E linearmente dipendenti.

comunque si scelgano le costanti $a_0, a_1, \ldots, a_\nu$, quella porzione di E nei punti della quale risulta

$$|f-(a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_\nu f_\nu)| \geqq \delta$$

è di misura non nulla.

Consideriamo invero l'integrale

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_\nu) = \int_E (f - a_0 f_0 - a_1 f_1 - \ldots - a_\nu f_\nu)^2 \, dP,$$

dipendente dai parametri $a_0, a_1, \ldots, a_\nu$. Esso ha un minimo determinato che raggiunge per i valori delle a verificanti il sistema di equazioni lineari

$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{\nu} a_k \int_E f_i f_k \, dP = \int_E f f_i \, dP \qquad (i = 0, 1, \ldots, \nu),$$

il determinante delle quali, in virtù della supposta indipendenza lineare delle funzioni $[f_a]$, riesce positivo. Designamo con σ_ν questo minimo. Se $\sigma_\nu = 0$, per il sistema delle a verificanti le (3) si avrà, quasi ovunque in E, $f = \sum_{k=0}^{\nu} a_k f_k$; se $\sigma_\nu > 0$, l'approssimazione della f, per combinazioni lineari di funzioni della successione limitata $f_0, f_1, \ldots, f_\nu$, non può scendere al disotto del termine

$$\delta = \sqrt{\frac{\sigma_\nu}{mE}}.$$

Adunque : *Al problema dell'approssimazione in* E *di una funzione f, di quadrato sommabile, mediante combinazioni lineari di funzioni della successione limitata $f_0, f_1, \ldots, f_\nu$, si risponde al modo seguente : Se il determinante*

$$\begin{vmatrix} \int_E f^2 \, dP & \int_E f_0 f \, dP & \ldots & \int_E f_\nu f \, dP \\ \int_E f_0 f \, dP & f_{00} & \ldots & f_{0\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_E f_\nu f \, dP & f_{\nu 0} & \ldots & f_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

è nullo, le equazioni (3) *determinano* ν *costanti tali che, quasi ovunque in* E, *risulta* $f = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_\nu f_\nu$; *se lo stesso determinante è positivo, le stesse equazioni* (3) *determinano* ν *costanti tali che, detto* σ_ν *il valore dell'integrale* $\mathrm{I}(a_0, a_1, \ldots, a_\nu)$ *che ad esse corrisponde, la richiesta approssimazione, non può scendere al disotto del termine* $\sqrt{\sigma_\nu : m\mathrm{E}}$.

7. Posizione precisa del problema generale d'approssimazione. — Consideriamo ora il generale problema, di vero interesse, dell'approssimazione dell'assegnata funzione f, di quadrato sommabile, mediante combinazioni lineari di funzioni della successione *illimitata* (1).

Il problema deve ancora essere precisato. Cominciamo a far ciò dicendo : *Si richiede la determinazione delle constanti, in infinità numerabile, del seguente quadro*

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} a_0^{(0)}, & & & \\ a_0^{(1)}, & a_1^{(1)}, & & \\ a_0^{(2)}, & a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & & & \\ a_0^{(n)}, & a_1^{(n)}, & a_2^{(n)}, & \ldots, \quad a_n^{(n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & & & \end{array} \right.$$

per modo che la combinazione lineare

$$\mathrm{F}_n(\mathrm{P}) = a_0^{(n)} f_0(\mathrm{P}) + a_1^{(n)} f_1(\mathrm{P}) + \ldots + a_n^{(n)} f_n(\mathrm{P}),$$

al divergere di n, *approssimi in* E *l'assegnata funzione* $f(\mathrm{P})$ *di quadrato sommabile.*

Occorre ancora precisare il significato della frase: « La combinazione lineare $\mathrm{F}_n(\mathrm{P})$, al divergere di n, approssima in E l'assegnata funzione $f(\mathrm{P})$. » Per far ciò, prendendo una proprietà comune a tutti gli sviluppi in serie e a tutte le approssimazioni, fin ad oggi conosciuti, porremo la seguente.

Definizione. — *Diremo che la combinazione lineare* $\mathrm{F}_n(\mathrm{P})$, *al divergere di* n, *approssima in* E *la funzione* $f(\mathrm{P})$ *di quadrato sommabile, se, comunque si definisca in* E *la funzione* $g(\mathrm{P})$, *di qua-*

drato sommabile, si ha :

$$\lim_{n=\infty} \int_E [f(P) - F_n(P)]\, g(P)\, dP = 0. \tag{5}$$

Evidentemente : Se la combinazione lineare $F_n(P)$ approssima in E la funzione $f(P)$, l'approssima anche in qualunque insieme misurabile contenuto in E; se la combinazione lineare $F_n(P)$ approssima in E due funzioni, queste dovranno ivi essere equivalenti; se le due combinazioni lineari $F'_n(P)$ e $F''_n(P)$ approssimano in E, rispettivamente, le due funzioni f' e f'', indicando con a' e a'' due costanti arbitrarie, la combinazione lineare $a' F'_n + a'' F''_n$ approssima in E la funzione $a' f' + a'' f''$ (¹).

Se, valendo la (5), le quantità $a_i^{(k)}$ del quadro (4) risultano, per ogni valore dell'indice i, indipendenti dal secondo indice k, diremo che *la funzione* $f(P)$ *è approssimabile in* E *per serie di funzioni* $f_0, f_1, \ldots$. Posto $a_i^{(k)} = a_i$, si avrà $F_n = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$, si dirà perciò anche che *la serie* $a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots$ *approssima in* E *la funzione* f. In tal caso dunque la serie

$$a_0 \int_E f_0\, g\, dP + a_1 \int_E f_1\, g\, dP + \ldots,$$

qualunque sia la funzione $g(P)$, di quadrato sommabile, è convergente ed ha par somma $\int_E f g\, dP$.

8. Esempii notevoli d'approssimazione. — Vediamo ora dei casi notevoli d'approssimazione nei quali è soddisfatta la condizione (5).

(¹) Nella sola ipotesi che la combinazione lineare F_n, al divergere di n, approssimi in E la funzione f, nel senso ora precisato, interesserebbe studiare il modo di comportarsi della differenza $f - F_n$, nei punti di E, nel mentre che n diverge. A questo riguardo si dimostra, per esempio, facilmente che, indicando con δ una qualsiasi quantità positiva, con $E'_n(\delta)$ e $E''_n(\delta)$ le due porzioni di E nei punti delle quali è, rispettivamento, $f - F_n \geqq \delta$ e $f - F_n \leqq -\delta$, si ha :

$$\text{misura} \overset{*}{\lim_{n=\infty}} E'_n(\delta) = \text{misura} \overset{*}{\lim_{n=\infty}} E''_n(\delta) = 0,$$

ove $\overset{*}{\lim} E'_n(\delta)$ e $\overset{*}{\lim} E''_n(\delta)$ designano gli insiemi *più piccoli limiti* rispettivamente di $E'_n(\delta)$ e di $E''_n(\delta)$ per n crescente all'infinito.

I. Nelle scienze sperimentali, come misura dell' errore d'approssimazione commesso sostituendo, in tutto E, alla funzione $f(P)$, la combinazione lineare $F_n(P)$, si prende l'integrale

$$(6) \qquad \int_E [f(P) - F_n(P)]^2 \, dP;$$

e, fissato il numero n, si ritiene anzi che, quella combinazione lineare $F_n(P)$, i cui coefficienti dànno all' integrale (6) il suo minimo valore, fornisca, in tutto E, la migliore approssimazione *relativa alle combinazioni lineari di quel prefissato numero n di funzioni del sistema* $[f_k]$. Uniformandoci a questo concetto, vogliamo vedere se, risultando :

$$(7) \qquad \lim_{n=\infty} \int_E [f(P) - F_n(P)]^2 \, dP = 0,$$

si possa dire, nel senso precisato al numero precedente, che la combinazione lineare F_n, al divergere di n, approssima in E la funzione f. Ciò si può effettivamente dire, poichè, nell'ipotesi (7), la successione $[F_n]$ converge su E in media verso la funzione f, e la proprietà II della convergenza in media, osservata al n° **2**, dà allora che, qualunque sia la funzione $g(P)$, di quadrato sommabile, riesce verificata la (5). Adunque :

La combinazione lineare $F_n(P)$, *al divergere di n, approssima in* E *la funzione* $f(P)$, *se*

$$\lim_{n=\infty} F_n(P) = f(P),$$

in particolare, e ovviamente, se in un insieme E′, *avente la misura di* E *e contenuto in* E, *la successione* $[F_n]$ *converge uniformemente verso la funzione f.*

II. In virtù del noto teorema di Lebesgue del passaggio al limite sotto il segno integrale, si ha anche :

La combinazione lineare $F_n(P)$, *al divergere di n, approssima in* E *la funzione* $f(P)$, *se in un insieme* E′, *avente la misura di* E *e contenuto in* E, *si ha* $\lim_{n=\infty} F_n(P) = f(P)$, *ed inoltre la differenza*

$f(P) - F_n(P)$ *si mantiene in* E′, *in valore assoluto, non superiore ad una funzione, indipendente da* n, *di quadrato sommabile.*

9. Condizione alla quale deve soddisfare un sistema d'approssimazione. Sistemi completi di funzioni. — Domandiamo ora : Ogni successione illimitata $[f_k(P)]$ è forse suscettibile, mediante combinazioni lineari dei suoi termini e al divergere del numero di questi termini, di approssimare in E ogni assegnata funzione di quadrato sommabile? A tale importante questione daremo una risposta negativa; stabiliremo anzi una condizione necessaria e sufficiente, che deve essere soddisfatta dalle funzioni del sistema $[f_k(P)]$, affinchè esse siano in grado, mediante loro combinazioni lineari, di approssimare in E ogni funzione assegnata, di quadrato sommabile.

Si dice che la successione illimitata $f_0(P), f_1(P), \ldots, f_n(P), \ldots$, di funzioni di quadrato sommabile in E, costituisce *un sistema completo in un dato insieme misurabile* E′, di misura non nulla, contenuto in E, se dalle due ipotesi :

I^a^ La funzione $g(P)$ è di quadrato sommabile in E′;

II^a^ Riescono simultaneamente soddisfatte le infinite equazioni :

$$\int_E f_k(P)\, g(P)\, dP = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

si trae come necessaria conseguenza

$$\int_E [g(P)]^2 dP = 0,$$

si trae cioè l'equivalenza a zero in E′ della funzione $g(P)$.

Osserviamo che : *Se un sistemo di funzioni è completo in un insieme* E, *esso è altresì completo in ogni insieme misurabile* E′ *contenuto in* E *di misura non nulla* (¹).

Ed invero, se per una funzione $g'(P)$, di quadrato sommabile in E′,

(¹) Come farò vedere, con un esempio, nella memoria (annunziata nella prefazione) a questa successiva, la proposizione reciproca, se si suppone inoltre $mE' < mE$, è falsa.

si avesse

$$\int_{E'} [g'(P)]^2 \, dP > 0, \qquad \int_{E'} f_k(P) g'(P) \, dP = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

la funzione $g(P)$ definita in E dalle eguaglianze :

$$g(P) \begin{cases} = g'(P) & \text{se P è in E}', \\ = 0 & \text{se P è in E} - \text{E}', \end{cases}$$

sarebbe in E di quadrato sommabile e non equivalente a zero, mentre verificherebbe le (8).

Ad esempio, si sa (*cf.* n° **22**) che il sistema di funzioni

$$(9) \qquad H_0(P) = 1, \quad H_1(P) = x_1, \quad \ldots, \quad H_r(P) = x_r,$$
$$H_{r+1}(P) = x_1^2, \quad H_{r+2}(P) = x_1 x_2, \quad \ldots, \quad H_k(P) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r}, \quad \ldots,$$

ove l'indice k è una certa nota funzione degli esponenti $k_1, k_2, \ldots, k_r$, è completo in ogni dominio limitato dello spazio S_r, definito dalle limitazioni $a_i \leqq x_i \leqq a'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, il sistema è pertanto completo anche in ogni insieme limitato e misurabile di S_r.

Ciò posto, si dimostra facilmente il

Teorema I. — *Condizione necessaria affinchè con una combinazione lineare di funzioni della successione* (1), *si possa, al divergere del numere dei termini della combinazione, approssimare in* E *ogni assegnata funzione di quadrato sommabile è che la successione costituisca un sistema completo in* E.

Siano invero $g(P)$ una funzione di quadrato sommabile per la quale risultino verificate le (8) e $F_n(P)$ quella combinazione lineare delle f_k che, al divergere di n, approssima in E la funzione g. In forza della (5), ove si ponga g in luogo di f, e in forza delle (8), si avrà :

$$\lim_{n=\infty} \int_E F_n(P) g(P) \, dP = \int_E [g(P)]^2 \, dP,$$

$$\int_E F_n(P) g(P) \, dP = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

e quindi, ciò che dimostra la completezza del sistema $[f_k]$,

$$\int_E [g(P)]^2 dP = 0.$$

Il teorema è suscettibile della seguente seconda dimostrazione di maggiore significato.

Nell'ipotesi del teorema potremo, per ogni valore dell'indice i, trovare una combinazione lineare :

$$F_{in}(P) = a_{i0}^{(n)} f_0(P) + a_{i1}^{(n)} f_1(P) + \ldots + a_{in}^{(n)} f_n(P),$$

tale che, al divergere di n, approssimi in E il monomio $H_i(P)$, introdotto in (9), tale cioè che, per ogni funzione $g(P)$ definita in E ed ivi di quadrato sommabile, si abbia

$$(10) \qquad \int_E H_i(P) g(P) dP = \lim_{n=\infty} \int_E F_{in}(P) g(P) dP \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Se per una funzione $g(P)$ di quadrato sommabile riescono soddisfatte le (8), si avrà

$$\int_E F_{in}(P) g(P) dP = 0 \qquad (i, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

e quindi anche, per le (10),

$$\int_E H_i(P) g(P) dP = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

il che, per la nota completezza del sistema $[H_i]$, ha di conseguenza l'equivalenza a zero della $g(P)$ in E. Il sistema $[f_k]$ è dunque, come si voleva dimostrare, completo in E.

Se si osserva questa seconda dimostrazione si vede subito che si può altresì enunciare il

Teorema II. — *La completezza in* E *del sistema* $[f_k]$ *è anche necessaria se si vuole, mediante combinazioni lineari dei suoi termini, approssimare in* E *ogni funzione di una determinata classe di funzioni di quadrato sommabile, nella quale sia contenuto un sistema di funzioni completo. In particolare, l'indicata completezza è necessaria se, soltanto, si vuole approssimare in* E *ogni monomio.*

10. Esempii. — L'insieme E sia ad una dimensione e costituito dall'intervalle (a, b) dell'asse delle x. Si sa bene, dalla più elementare teoria delle serie trigonometriche, che, posto

$$(11) \quad f_0(x) = 1, \qquad f_{2n-1}(x) = \operatorname{sen} nx, \qquad f_{2n} = \cos nx \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ogni potenza $x^i (i = 0, 1, 2, \ldots)$ si può approssimare in (a, b) in serie di funzioni (11), anche da ciò dunque segue già la completezza del sistema (11) nell'intervallo (a, b) (*cf.* n° **22**).

Viceversa, dalla completezza del sistema (11) si deduce quella del sistema $[x^i]$. Ed invero, ogni funzione del sistema (11) si può approssimare per serie di potenze.

Dalla completezza in un insieme E, del sistema $[x^k]$ si deduce *immediatemente* la nota completezza ivi di ogni sistema $[P_k(x)]$ di polinomii, i cui gradi coincidono con i rispettivi indici. Le relazioni

$$P_0 = a_{00}, \quad P_1 = a_{10} + a_{11}x, \quad \ldots, \quad P_k = a_{k0} + a_{k1}x + \ldots + a_{kk}x^k, \quad \ldots,$$

avendo supposto $a_{kk} \neq 0$, dànno invero ciascuna potenza x^k come combinazione lineare dei polinomii $P_0, P_1, \ldots, P_k$.

Allo stesso modo, dalla completezza in un insieme E dei monomii (9) si deduce la completezza ivi di ogni sistema di polinomii, nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_r$, tale che :

I° Per ogni numero intiero e non negativo n vi sono $\binom{r+n-1}{n}$ polinomii di grade n; II° è diverso da zero il determinante formato con i coefficienti dei monomii di grado n di questi polinomii (in ogni linea del determinante disponendo i coefficienti di uno stesso polinomio, ed in ogni colonna i coefficienti di uno stesso monomio).

Esempii di sistemi non completi se ne hanno, assai facilmente, quanti se ne vuole. Il sistema $f_k(x) = x^{2k} (k = 0, 1, 2, \ldots)$ è incompleto in ogni intervallo (a, b) dell'asse delle x che contenga l'origine come punto interno (è invece completo in ogni intervallo al quale l'origine sia esterna).

IV. — Approssimazione per combinazioni lineari di funzioni di un sistema ortogonale e completo.

11. Sistemi ortogonali di funzioni. Ortogonalizzazione. — La completezza nell'insieme E del sistema $[f_k(P)]$, che abbiamo trovato essere condizione necessaria, affinchè, mediante combinazioni lineari dei suoi termini, si possa approssimare, in E, ogni funzione di quadrato sommabile, *è anche sufficiente*. Per giungere a tale importante risultato faremo uso dei sistemi ortogonali di funzioni e ci appoggeremo sulla teoria dell'approssimazione per serie di funzioni di tali sistemi, sostanzialmente dovuta al Riesz e al Fischer, teoria che rapidamente esporremo, aggiungendo ad essa taluni risultati nuovi.

Un sistema di funzioni

$$\varphi_0(P), \quad \varphi_1(P), \quad \ldots, \quad \varphi_n(P), \quad \ldots,$$

di quadrato sommabile in E, dicesi ortogonale in E, se sono soddisfatte le relazioni

$$(1) \qquad \int_E [\varphi_i(P)]^2\, dP = 1, \qquad \int_E \varphi_i(P)\varphi_j(P)\, dP = 0, \quad \text{per } i \neq j$$
$$(i, j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Per ogni valore di n, le funzioni ortogonali $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sono certo linearmente indipendenti in E, poichè, in forza delle (1), l'eguaglianza

$$\int_E (c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n)^2\, dP = 0,$$

si scrive $c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_n^2 = 0$. Del resto, il determinante al primo membro della (2) del n° 5 ha, per queste funzioni, il valore *uno*.

Dato il sistema $[f_k(P)]$ di funzioni di quadrato sommabile in E — per le quali si suppone solamente l'indipendenza lineare in E — esso si può sempre ivi *ortogonolizzare*: Si può [1], ad ogni funzione f_n del sistema far corrispondere una funzione φ_n, combinazione lineare delle

---

[1] *Cf.* E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, I. Teil (*Mathematische Annalen*, Bd 63, 1907, p. 442).

funzioni $f_0, f_1, \ldots, f_n$, in modo che il sistema delle φ_n riesca ortogonale in E. Si abbia

$$(2) \qquad \varphi_n = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} f_k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Per la già notata indipendenza lineare delle φ_n, dovrà risultare $c_{nn} \neq 0$, qualunque sia n, e perciò le (2) si possono invertire, si abbia

$$(3) \qquad f_n = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{nk} \varphi_k.$$

Dalle (2), (3), segue, evidentemente, che la completezza del sistema $[f_k]$ ha di conseguenza la completezza del sistema ortogonalizzato $[\varphi_k]$ e viceversa.

12. Primi risultati generali. — Volendo, con la combinazione lineare

$$\Phi_n(\mathrm{P}) = \alpha_0^{(n)} \varphi_0(\mathrm{P}) + \alpha_1^{(n)} \varphi_1(\mathrm{P}) + \ldots + \alpha_n^{(n)} \varphi_n(\mathrm{P}),$$

di funzioni del sistema ortogonale e completo $[\varphi_k]$, approssimare in E l'assegnata funzione $f(\mathrm{P})$, di quadrato sommabile, si debbono determinare le costanti $\alpha_k^{(n)}$ in modo che si abbia sempre

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{\mathrm{E}} \Phi_n(\mathrm{P}) g(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} = \int_{\mathrm{E}} f(\mathrm{P}) g(\mathrm{P})\, d\mathrm{P},$$

qualunque sia la funzione $g(\mathrm{P})$, di quadrato sommabile in E. In particolare, per $g(\mathrm{P}) \equiv \varphi_k(\mathrm{P})$, si dovrà avere

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \alpha_k^{(n)} = \int_{\mathrm{E}} f(\mathrm{P}) \varphi_k(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Adunque : *Pei i coefficienti della più generale combinazione lineare* $\Phi_n(\mathrm{P})$, *di funzioni di un sistema* $[\varphi_k(\mathrm{P})]$, *ortogonale in* E, *atto ad approssimare ivi ogni data funzione* $f(\mathrm{P})$ *di quadrato sommabile, devono essere soddisfatte le condizioni* (5).

Soddisfatte queste condizioni, data la completezza in E del sis-

tema $[\varphi_k]$, vediamo subito che, se la combinazione $\Phi_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k'' \varphi_k$ approssima in E una funzione f', ivi di quadrato sommabile, questa sarà equivalente alla f, vediamo cioè che la Φ_n approssimerà in E anche la f. Ed invero, dalla (4), ponendovi f' in luogo di f e φ_k in luogo di g, si ricava in virtù delle (5),

$$\int_E f \varphi_k \, dP = \int_E f' \varphi_k \, dP, \qquad \int_E (f' - f) \varphi_k \, dP = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

e quindi, per la completezza del sistema $[\varphi_k]$, se ne deduce l'equivalenza a zero in E della differenza $f' - f$. Si ha pertanto il

Teorema. — *Per approssimare in* E *una funzione* $f(P)$, *di quadrato sommabile, mediante una combinazione lineare*

$$\Phi_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k'' \varphi_k(P),$$

di funzioni di un sistema $[\varphi_k]$ *ortogonale e completo in* E, *è necessario e sufficiente determinare i coefficienti della combinazione in modo che siano soddisfatte le condizioni* (5) *e che la combinazione* Φ_n, *al divergere di* n, *approssimi in* E *una funzione. In particolare, è sufficiente determinare le costanti* $\alpha_k^{(n)}$ *in modo che siano soddisfatte le* (5) *e che la combinazione* Φ_n, *al divergere di* n *converga su* E *in media.*

13. Approssimazione per serie. — Alle (5) si può, per esempio, soddisfare ponendo, senz'altro,

$$\alpha_k^{(n)} = \alpha_k = \int_E f(P) \varphi_k(P) \, dP \qquad (n \geq k, \; k = 0, 1, 2, \ldots),$$

con che si approssimerebbe in E la $f(P)$ mediante la serie di Fourier:

$$(6) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(P), \qquad \alpha_k = \int_E f(P) \varphi_k(P) \, dP.$$

Tale serie approssima in E effettivamente la $f(P)$, poichè essa vi con-

verge in media. Ed invero, anche nella sola ipotesi dell'ortogonalità del sistema $[\varphi_k]$, avendosi (diseguaglianza di Bessel),

$$(7) \qquad \int_E \left(f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k \right)^2 dP = \int_E f^2(P) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 \geq 0,$$

si può asserire le convergenza della serie $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots$, e quindi che

$$\lim_{n=\infty} \int_E \left(\sum_{k=0}^{n+p} \alpha_k \varphi_k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k \right)^2 dP = \lim_{n=\infty} (\alpha_{n+1}^2 + \alpha_{n+2}^2 + \ldots + \alpha_{n+p}^2) = 0,$$

uniformemente al variare di p per valori intieri e positivi. Ciò esprime appunto la convergenza in media su E della serie (6). Si ha pertanto il

Teorema. — *La completezza, in* E, *del sistema ivi ortogonale* $[\varphi_k]$ *è non soltanto condizione necessaria, ma anche sufficiente affinchè si possa, mediante combinazioni lineari dei suoi termini, approssimare in* E *ogni data funzione* f *di quadrato sommabile. L'approssimazione può essere fornita dalla serie* (6), *la quale, anzi, converge su* E *in medio verso la* f.

Si ha inoltre che (*cf.* n° **20**) :

Per ogni prefissato valore di n, *la combinazione lineare* $\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_n\varphi_n$, *fornisce la migliore approssimazione possibile, in* E, *della* f, *per combinazione lineare delle funzioni* φ_0, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Osserviamo ancora che, come si deduce dalla (7), l'integrale

$$\int_E \left(f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k \right)^2 dP,$$

infinitesimo al divergere di n, non cresce mai al crescere di n e quindi che (*cf.* n° **4**) :

Data la completezza e l'ortogonalità del sistema $[\varphi_k]$, *se, ad*

esempio, per la successione di indici $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$ *si ha*

$$\int_E \left(f - \sum_{k=0}^{n_s} \alpha_k \varphi_k \right)^2 dP = \int_E f^2 \, dP - \sum_{k=0}^{n_s} \alpha_k^2 \geq \frac{1}{s^2} \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

la serie

$$\sum_{k=0}^{n_1} \alpha_k \varphi_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \alpha_k \varphi_k + \ldots + \sum_{k=n_3+1}^{n_{s+1}} \alpha_k \varphi_k + \ldots,$$

converge su E *uniformemente in generale e vi rappresenta la funzione* f; *essa dunque converge, quasi ovunque in* E, *verso la funzione* f.

14. Determinazione di tutte le combinazioni d'approssimazione convergenti in media. — Passiamo ora a dare tutte le possibili combinazioni lineari $\Phi_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k(P)$, atte ad approssimare in E un'assegnata funzione $f(P)$ di quadrato sommabile, in modo però che la combinazione converga su E in media.

Occorre e basta perciò determinare le costanti $\alpha_k^{(n)}$ in modo che siano soddisfatte le (5) ed inoltre che si abbia :

$$(8) \qquad \lim_{n=\infty} \int_E \left(f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k \right)^2 dP$$

$$= \lim_{n=\infty} \left\{ \left(\int_E f^2 \, dP - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 \right) + \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k)^2 \right\} = 0.$$

Ma, data la completezza del sistema $[\varphi_k]$, è, come abbiamo visto,

$$\lim_{n=\infty} \left(\int_E f^2 \, dP - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 \right) = 0.$$

e pertanto si ha il

Teorema. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la combinazione lineare* $\Phi_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k(P)$, *di funzioni di un sis-*

tema $[\varphi_k]$ *ortogonale e completo in* E, *possa, al divergere di* n, *approssimare in* E *una funzione* $f(P)$ *di quadrato sommabile, convergendo su* E *in media, è che si abbia*

$$(9) \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k)^2 = 0, \qquad \alpha_k = \int_E f(P)\,\varphi_k(P)\,dP.$$

Ed invero, in tale ipotesi, riescono soddisfatte le (5) e la (8).

La relazione di limite (9) è già stata, con molto profitto, considerata da Schmidt [1], e precisamente nel modo che andiamo ad esporre. Si abbia il sistema infinito di quantità reali o complesse

$$(10) \qquad X_0^{(n)}, \quad X_1^{(n)}, \quad \ldots, \quad X_k^{(n)}, \quad \ldots,$$

i cui elementi dipendono altresì dall'indice n che puo prendere i valori 0, 1, 2, ..., ∞. Secondo Schmidt, *si dice che il sistema* (10), *al diverge di* n, *convergere fortemente verso il sistema*

$$X_0, \quad X_1, \quad \ldots, \quad X_k, \quad \ldots,$$

se si hà

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |X - X_k^{(n)}|^2 = 0.$$

Ritornando al nostro risultato, volendolo enunciare alla maniera di Schmidt, estenderemo la definizione delle quantità $\alpha_k^{(n)}$, ponendo $\alpha_k^{(n)} = 0$ se $n < k$; potremo allora scrivere :

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k)^2 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2,$$

e per la convergenza della serie $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots$, la (9) ha di conseguenza la convergenza forte del sistema $[\alpha_k^{(n)}]$ verso il sistema $[\alpha_k]$, e viceversa, tale convergenza ha di conseguenza la (9). Pertanto potremo enunciare il nostro ultimo teorema al modo seguente :

---

(1) E. Schmidt, *Ueber die auflösung linearer Gleichungen mit unendlichvilen unbekannten* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXV, 1908, p. 53).

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la combinazione lineare $\Phi_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k(P)$, *di funzioni di un sistema* $[\varphi_k]$, *ortogonale e completo in* E, *possa, al divergere di* n, *approssimare in* E *una funzione* $f(P)$ *di quadrato sommabile, convergendo su* E *in media, è che il sistema* $[\alpha_k^{(n)}]$, *per il quale si ha* $\alpha_k^{(n)} = 0$ *se* $n < k$, *converga fortemente verso il sistema* $[\alpha_k]$, *ove*

$$\alpha_k = \int_E f(P)\, \varphi_k(P)\, dP.$$

15. Metodo d'approssimazione di Fejér. — Come caso particolarissimo troviamo il metodo d'approssimazione di Fejér. Ponendo infatti

$$\alpha_k^{(n)} = \frac{n+1-k}{n+1}\, \alpha_k,$$

si ha

$$\Phi_n(P) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i\, \varphi_i(P),$$

ed è subito visto che

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k - \alpha_k^{(n)})^2 = \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2 \alpha_k^2}{(n+1)^2} = 0.$$

16. Alcune notevoli relazioni. — Siano $f_1(P)$ e $f_2(P)$ due funzioni arbitrarie definite in E, ivi di quadrato sommabile, e si ponga

$$\alpha_{1k} = \int_E f_1(P)\, \varphi_k(P)\, dP, \qquad \alpha_{2k} = \int_E f_2(P)\, \varphi_k(P)\, dP \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Siano poi $[\alpha_{1k}^{(n)}]$ e $[\alpha_{2k}^{(n)}]$ due arbitrarii sistemi che, verificando la condizione $\alpha_{1k}^{(n)} = \alpha_{2k}^{(n)} = 0$ per $k > n$, al divergere dell'indice n, convergano in modo forte rispettivamente verso i sistemi $[\alpha_{1k}]$ e $[\alpha_{2k}]$. Si ponga

$$\Phi_{1n} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{1k}^{(n)} \varphi_k, \qquad \Phi_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{2k}^{(n)} \varphi_k;$$

data, sempre, la completezza del sistema ortogonale $[\varphi_k]$, si avrà:

$$\lim_{n=\infty} \Phi_{1n} = f_1, \qquad \lim_{n=\infty} \Phi_{2n} = f_2,$$

e quindi (*cf.* n° **2**)

$$\lim_{n=\infty} \int_E \Phi_{1n} \Phi_{2n}\, dP = \int_E f_1 f_2\, dP,$$

ma

$$\int_E \Phi_{1n} \Phi_{2n}\, dP = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{1k}^{(n)} \alpha_{2k}^{(n)},$$

ne segne

$$\int_E f_1 f_2\, dP = \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_{1k}^{(n)} \alpha_{2k}^{(n)}. \tag{11}$$

In particolare, per $\alpha_{1k}^{(n)} = \alpha_{1k}$, $\alpha_{2k}^{(n)} = \alpha_{2k}$, si ha la nota relazione

$$\int_E f_1 f_2\, dP = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k} \alpha_{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_E f_1 \varphi_k\, dP \int_E f_2 \varphi_k\, dP. \tag{12}$$

Siano ora Λ_1 et Λ_2 due arbitrarii insiemi misurabili contenuti in E e siano g_1 et g_2 due funzioni arbitrarie definite, rispettivamente, in Λ_1 e in Λ_2, ciascuna di quadrato sommabile. Si ponga

$$f_1(P) \begin{cases} = g_1(P) & \text{se } P \text{ è in } \Lambda_1, \\ = 0 & \text{se } P \text{ è in } E - \Lambda_1, \end{cases}$$

$$f_2(P) \begin{cases} = g_2(P) & \text{se } P \text{ è in } \Lambda_2, \\ = 0 & \text{se } P \text{ è in } E - \Lambda_2. \end{cases}$$

Per queste funzioni f_1 e f_2 sussistono le (11) e (12), mentre, indicando con $\Lambda_1 \Lambda_2$ l'insieme comune ai due insiemi Λ_1 e Λ_2, si ha

$$\int_E f_1 f_2\, dP = \int_{\Lambda_1 \Lambda_2} g_1 g_2\, dP,$$

$$\alpha_{1k} = \int_E f_1 \varphi_k\, dP = \int_{\Lambda_1} g_1 \varphi_k\, dP, \qquad \alpha_{2k} = \int_E f_2 \varphi_k\, dP = \int_{\Lambda_2} g_2 \varphi_k\, dP,$$

ne segne:

Se il sistema $[\varphi_k]$ *è in* E *ortogonale e completo, per due arbitrarii insiemi misurabili* Λ_1 *et* Λ_2, *contenuti in* E, *e per due arbitrarie*

funzioni f_1 e f_2, definite in E *ed ivi di quadrato sommabile, sussiste la relazione*

$$(13) \qquad \int_{\Lambda_1 \Lambda_2} f_1(P) f_2(P)\, dP = \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k}^{(n)} \alpha_{2k}^{(n)},$$

ove $[\alpha_{1k}^{(n)}]$ *e* $[\alpha_{1k}^{(n)}]$ *sono due arbitrarii sistemi che, verificando la condizione* $\alpha_{1k}^{(n)} = \alpha_{2k}^{(n)} = 0$ *se* $k > n$, *convergono in modo forte, rispettivamente, verso i sistemi*

$$\left[\alpha_{1k} = \int_{\Lambda_1} f_1 \varphi_k\, dP\right] \quad \text{e} \quad \left[\alpha_{2k} = \int_{\Lambda_2} f_2 \varphi_k\, dP\right].$$

in particolare, si ha

$$(14) \quad \int_{\Lambda_1 \Lambda_2} f_1(P) f_2(P)\, dP = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Lambda_1} f_1(P) \varphi_k(P) \int_{\Lambda_2} f_2(P) \varphi_k(P)\, dP \quad (^1).$$

(¹) Si osservino le curiose conseguenze di questa proposizione.

Per due arbitrarii insiemi misurabili Λ_1 *e* Λ_2, *contenuti in* E, *si ha*

$$(a) \qquad m(\Lambda_1 \Lambda_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Lambda_1} \varphi_k\, dP \int_{\Lambda_2} \varphi_k\, dP.$$

Per due arbitrarii insiemi misurabili Λ_1 *e* Λ_2 *contenuti in* E, *i cui punti comuni costituiscono, al più, un insieme di misura nulla e per due arbitrarie funzioni* f_1 *e* f_2 *definite in* E *e ivi di quadrato sommabile, sussiste la relazione*

$$\sum_{k=0} \int_{\Lambda_1} f_1(P) \varphi_k(P)\, dP \int_{\Lambda_2} f_2(P) \varphi_k(P)\, dP = 0.$$

Se ne ricava un modo assai semplice di dedurre da un sistema di funzioni $[\varphi_k]$, ortogonale e completo in E, un'infinità numerabile di sistemi schmidtiani di quantità $[X_k^{(i)}]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ a due a due ortogonali, di sistemi cioè (*cf.* Schmidt, *loc. cit.*, p. 359, § 1) per i quali le serie $\sum_{k=0}^{\infty} (X_k^{(i)})^2$ convergono e si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k^{i} X_k^{j} = 0 \qquad \text{per} \qquad i \neq j.$$

Basta perciò prendere in E un'infinità numerabile $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots$ di insiemi misu-

17. Generalizzazioni. — Per il sistema $[\alpha_k^{(n)}]$ togliamo la condizione $\alpha_k^{(n)} = 0$ se $k > n$. Nella definizione di convergenza forte del sistema $[\alpha_k^{(n)}]$ verso il sistema $[\alpha_k]$, è insita la convergenza della

---

rabili, aventi a due a due in comune, al più, insiemi di misura nulla, e porre

$$(b) \qquad X_k^{(i)} = \int_{\Lambda_i} \varphi_k(P)\, dP \qquad (i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Le relazioni trovate possono essere utilizzate per ottenere degli sviluppi notevoli. Sia, ad esempio, E l'intervallo $(0,\ 2\pi)$ dell'asse delle x, e si ponga

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx, \quad \varphi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Se $0 \leqq a' \leqq b' \leqq a'' \leqq b'' \leqq 2\pi$, dalla (a), facendo coincidere Λ_1 e Λ_2 rispettivamente con gli intervalli $(a',\ b')$ e $(a'',\ b'')$, si trae lo sviluppo:

$$\frac{(a'-b')(b''-a'')}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{sen}\left(k\,\frac{b'-a'}{2}\right) \operatorname{sen}\left(k\,\frac{b''-a''}{2}\right) \cos\left(k\,\frac{b''+a''-b'-a'}{2}\right),$$

in particolare, per $a' = 0$, $a'' = b' = \pi$, $b'' = 2\pi$, si trova il noto sviluppo

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Prendendo, ad esempio, per Λ_i l'intervallo $\left(\frac{\pi}{2^i},\ \frac{\pi}{2^{i-1}}\right)$ dell'asse delle x, per l'attuale sistema ortogonale, le (b) dànno

$$X_0^{(i)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{2^i}.$$

$$X_{2n-1}^{(i)} = \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2^{i+1}} \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{2^{i+1}}, \qquad X_{2n}^{(i)} = \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2^{i+1}} \cos \frac{3n\pi}{2^{i+1}}$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Si osservi, infine, che, convergendo le serie $\sum_{k=0} \alpha_{1k}^2$ e $\sum_{k=0} \alpha_{2k}^2$, la serie $\sum_{k=0} \alpha_{1k}\alpha_{2k}$, al secondo membro della (14), converge assolumente. Il quadrato della somma della serie dei valori assoluti non supera la quantità $\int_{\Lambda_1} f_1^2\, dP \int_{\Lambda_2} f_2^2\, dP$.

serie $\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k - \alpha_k^{(n)})^2$, per valori di n abbastanza grandi. Dalla convergenza di questa serie e della serie $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^2$, si deduce la convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k^{(n)})^2$. Noi supporremo — senza perciò che si introduca restrizione alcuna — che quest'ultima serie converga per ogni valore di n. Allora, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{(n)}\ \varphi_k(\mathrm{P})$$

converge, per ogni valore di n, su E in media verso una funzione $\Phi_n(\mathrm{P})$ di quadrato sommabile. E, data la completezza del sistema ortogonale $[\varphi_k]$, si ha

$$\int_{\mathrm{E}}[f(\mathrm{P}) - \Phi_n(\mathrm{P})]^2\,d\mathrm{P} = \sum_{k=0}(\alpha_k - \alpha_k^{(n)})^2.$$

Se ne deducono i seguenti teoremi che generalizzano quelli dei n^i **14** e **16**.

Dato il sistema di funzioni $[\varphi_k]$, *ortogonale e completo in* E, *siano* $f(\mathrm{P})$ *una funzione ivi di quadrato sommabile e* $[\alpha_k^{(n)}]$ *il più arbitrario sistema di quantità, per il quale la serie* $\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k^{(n)})^2$ *converga, qualunque sia* n. *Si ponga*

$$\Phi_n(\mathrm{P}) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{(n)}\ \varphi_k(\mathrm{P}),$$

condizione necessaria e sufficiente affinchè si abbia in E :

$$\varliminf_{n=\infty}\Phi_n(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P}),$$

è che il sistema $[\alpha_k^{(n)}]$, *al divergere di* n, *converga fortemente verso il sistema* $\left[\alpha_k = \int_{\mathrm{E}} f(\mathrm{P})\,\varphi_k(\mathrm{P})\,d\mathrm{P}\right]$. *Siano* $f_1(\mathrm{P})$ *e* $f_2(\mathrm{P})$ *due arbitrarie funzioni definite in* E, *ivi di quadrato sommabile,* Λ_1 *e* Λ_2

due arbitrarii insiemi misurabili contenuti in E. *Allora, per i più arbitrarii sistemi* $[\alpha_{1k}^{(n)}]$ *e* $[\alpha_{2k}^{(n)}]$ *che, al divergere di* n, *convergano fortemente verso i sistemi* $\left[\alpha_{1k} = \int_{\Lambda_1} f_1 \varphi_k \, dP\right]$ *e* $\left[\alpha_{2k} = \int_{\Lambda_2} f_2 \varphi_k \, dP\right]$, *si ha*

$$\int_{\Lambda_1 \Lambda_2} f_1(P) f_2(P) \, dP = \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k}^{(n)} \alpha_{2k}^{(n)}.$$

18. Criterii di completezza per i sistemi ortogonali. — Poniamo, nella (14), $\Lambda_1 \equiv E$, il risultare verificata, per due quali si vogliano funzioni f_1 e f_2, di quadrato sommabile in E, e per ogni insieme misurabile Λ contenuto in E, la relazione

$$\int_{\Lambda} f_1 f_2 \, dP = \sum_{k=0}^{\infty} \int_E f_1 \varphi_k \, dP \int_{\Lambda} f_2 \varphi_k \, dP, \tag{15}$$

alla quale si riduce la (14), è come abbiamo visto, condizione necessaria per la completezza in E del sistema ivi ortogonale $[\varphi_k]$, ma questa condizione, evidentemente, è altresì sufficiente. Poniamo nella (15), una prima volta, $f_2 \equiv 1$, $f_1 \equiv f$, ed una seconda volta, $f_1 \equiv f_2 \equiv f$, $\Lambda \equiv E$; se ne deduce :

I. Condizione necessaria e (evidentemente) sufficiente per la completezza in E del sistema ivi ortogonale $[\varphi_k]$, è che, per ogni insieme misurabile Λ contenuto in E e per ogni funzione ivi di quadrato sommabile, si abbia

$$\int_{\Lambda} f(P) \, dP = \sum_{k=0}^{\infty} \int_E f(P) \varphi_k(P) \, dP \int_{\Lambda} \varphi_k(P) \, dP. \tag{16}$$

II. Condizione necessaria e (evidentemente) sufficiente per la completezza in E del sistema ivi ortogonale $[\varphi_k]$ è che, per ogni funzione di quadrato sommabile in E, si abbia

$$\int_E [f(P)]^2 dP = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_E f(P) \varphi_k(P) \, dP\right]^2. \tag{17}$$

Stekloff, Lauricella e Severini ([1]) hanno in definitiva stabilito che l'equazione (17) oppure (Severini) la (16) sarà verificata per ogni funzione f di quadrato sommabile in E, se, solamente, essa è verificata per tutte le funzioni di un particolare sistema completo in E. Questo risultato si ottiene immediatamente della nostra analisi. Dimostriamo che :

Condizione necessaria e sufficiente per la completezza in E *del sistema ivi ortogonale* $[\varphi_k]$ *è che, per ogni funzione* $g_\nu(P)$ *di un particolare sistema* $[g_\nu]$, *completo in* E, *si abbia*

$$(18) \qquad \int_E [g_\nu(P)]^2\, dP = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_E g_\nu(P)\, \varphi_k(P)\, dP \right]^2 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

La necessità di tale condizione è stata dimostrata. La sufficienza deriva da quanto si è stabilito col teorema II del n° **9**, poichè, il verificarsi della (18), esprime che ogni funzione g_ν del sistema $[g_\nu]$, completo in E, è approssimabile per serie di funzioni del sistema ortogonale $[\varphi_k]$, precisamente, dalla serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(P) \int_E g_\nu \varphi_k\, dP;$$

anzi la (18) esprime che questa serie converge su E in media verso la g_ν.

Quest' ultimo teorema (in modo speciale) si suole considerare come *un criterio di completezza* per il sistema ortogonale $[\varphi_k]$. Le equazioni (16) et (17) [entrambe contenute nella (15)] si chiamano *le equazioni di completezza* per il sistema ortogonale $[\varphi_k]$. Si osservi che (*cf.* n° **2**) la serie nel secondo membro della (15) converge *uni-*

([1]) W. Stekloff, *Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales dépendant d'un nombre quelconque de variables* (*Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences de Saint-Pétersbourg*, vol. XXX). — G. Lauricella, *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle equazioni integrali* (*Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, vol. XXI, 1° semestre 1911, p. 675). — C. Severini, *loc. cit.*, p. 343.

formemente (in ogni caso) al variare in E dell' insieme A. Essa converge anche assolutamente [*cf.* nota (¹), p. 362].

V. — Approssimazione per combinazioni lineari di funzioni del più generale sistema completo.

19. Prima soluzione del problema generale d'approssimazione. — Ritorniamo ora al problema generale dell' approssimazione in E di una funzione ivi assegnata, di quadrato sommabile, mediante combinazioni lineari di funzioni di un sistema

$$(1) \qquad f_0(\mathrm{P}),\quad f_1(\mathrm{P}),\quad \ldots,\quad f_n(\mathrm{P}),\quad \ldots,$$

per il quale si suppone soltanto l'indipendenza lineare e la completezza in E.

Al problema si può dare immediatamente una prima soluzione. Ortogonalizziamo, invero, il sistema (1) e sia $[\varphi_k]_k$ il sistema, ortogonale e completo, che se ne deduce, risultando $\varphi_k = \sum_{i=0} c_{ki} f_i$. Per quanto si è ottenuto al n° **13**, posto

$$\alpha_k = \int_{\mathrm{E}} \varphi_k f \, d\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{k} c_{ki} \int_{\mathrm{E}} f_i f \, d\mathrm{P},$$

$$\Phi_n(\mathrm{P}) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i(\mathrm{P}) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \sum_{k=0}^{i} c_{ik} f_k(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=k}^{n} \alpha_i c_{ik} \right) f_k(\mathrm{P}),$$

$$\alpha_k^{(n)} = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i c_{ik},$$

la combinazione lineare

$$\Phi_n(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} f_k(\mathrm{P}) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i(\mathrm{P}),$$

al divergere di n, approssima in E l'assegnata funzione $f(\mathrm{P})$, anzi, essa converge su E in media verso quella funzione, ed in maniera che l'integrale

$$(2) \qquad \int_{\mathrm{E}} (f - \Phi_n)^2 \, d\mathrm{P} = \int_{\mathrm{E}} \left(f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} f_k \right)^2 d\mathrm{P},$$

infinitesimo con n divergente, non cresce mai al crescere di n. Si ha dunque il

Teorema. — *La completezza in* E *del sistema* $[f_k]$, *di funzioni linearmente indipendenti, è non soltanto condizione necessaria, ma anche sufficiente affinchè si possa, mediante combinazioni lineari dei suoi termini, approssimare in* E *ogni funzione* f *ivi di quadrato sommabile. Si può anzi trovare una combinazione lineare* $\Phi_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} f_k$ *che, al divergere di* n, *converge su* E *in media verso la funzione* f, *ed in maniera che l'integrale* (2) *non cresca mai al crescere di* n. *Per modo che, se, ad esempio, per la successione di indici* $[n_s]$, *il detto integrale non sapera la frazione* $1 : s^2$, *la successione* Φ_{n_s} *converge su* E *uniformemente in generale e vi rappresenta la* f. *Si deduce adunque immediatamente dalla successione* $[\Phi_n]$ *una successione* $[\Phi_{n_s}]$ *di combinazioni lineari delle* f_k *che converge, quasi ovunque in* E, *verso la funzione* f.

20. Metodo d'approssimazione dei minimi quadrati. — Passiamo ora ad esporre un più pratico metodo d'approssimazione, per combinazioni lineari di funzioni del sistema completo (1), che — pur potendo coincidere, nel resultato, col precedente — non richiede la preliminare ortogonalizzazione del sistema e che, inoltre (e sta in ciò il suo principale vantaggio), per ogni fissato numero n di funzioni del sistema, partecipanti alla combinazione, fornisce la migliore approssimazione possibile.

Fissato un valore di n, si consideri l'integrale

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_E (f - a_0 f_0 - a_1 f_1 - \ldots - a_n f_n)^2 \, dP,$$

e si diano alle costanti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ quei valori per i quali l'integrale assume il suo minimo valore. Questi valori sono determinati univocamente dal seguente sistema di equazioni lineari al quale devono soddisfare

$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k \int_E f_i f_k \, dP = \int_E f f_i \, dP \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

il cui determinante risulta positivo per la supposta indipendenza lineare delle funzioni del sistema $[f_k]$. Indichiamo con

$$a_0^{(n)}, \quad a_1^{(n)}, \quad \ldots, \quad a_n^{(n)}$$

i valori in discorso e poniamo

$$F_n(P) = a_0^{(n)} f_0(P) + a_1^{(n)} f_1(P) + \ldots + a_n^{(n)} f_n(P), \tag{4}$$

$$\sigma_n = \int_E [f(P) - F_n(P)]^2 \, dP. \tag{5}$$

Facciamo orva variare n. In ogni caso, la quantità σ_n, evidentemente, non crescerà mai al crescere di n, sia o no completo il sistema $[f_k]$. Esisterà pertanto, in ogni caso, determinato e finito e non negativo il limite σ di σ_n, al divergere di n. Se il sistema $[f_k]$ è completo, poichè σ_n non supera certo il valore dell' integrale (2), che riesce allora, come abbiamo visto, infinitesimo con n divergente, si avrà $\sigma = \lim_{n=\infty} \sigma_n = 0$. Si ha dunque il seguente.

Metodo generale d'approssimazione (dei minimi quadrati). — *Dato il sistema completo* $[f_k]$, *di funzioni linearmente indipendenti, volendo, mediante combinazioni lineari di queste funzioni, approssimare in* E *un' assegnata funzione* f, *ivi di quadrato sommabile, si determinino, per ogni valore dell' indice* n, *le costanti* $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$, *soluzioni del sistema* (3) *di equazioni lineari; la combinazione lineare* $F_n(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} f_k(P)$, *al divergere di* n, *approssima allora in* E *l'assegnata funzione* $f(P)$. *Anzi, al divergere di* n, *l'indicata combinazione converge su* E *in media verso la* f, *ed in maniera che l'integrale* (5) *non cresce mai al crescere di* n. *Inoltre, per ogni prefissato valore di* n, *la stessa combinazione, fra tutte quelle delle medesime funzioni* $f_0, f_1, \ldots, f_n$, *approssima, in tutto* E, *la* f *nel miglior modo possibile, cioè col minimo errore quadratico medio possibile.*

Nel caso particolare che il sistema $[f_k]$ sia ortogonale, le (3) si scrivono

$$a_i = \int_E f f_i \, dP,$$

e l'esposto metodo d'approssimazione si riduce a quello già dato al n° **13**.

21. Criterio di completezza per il più generale sisemta di funzioni. — Siamo ora in grado di stabilire un semplice criterio di completezza per il più generale sistema di funzioni linearmente indipendenti. Siano $[f_k]$ un sistema de funzioni, di quadrato sommabile in E, ivi linearmente indipendenti, e $[g_\nu]$ un particolare sistema di funzioni, completo in E. Per ogni funzione g_ν del sistema $[g_\nu]$ e per ogni valore dell' indice n si determinino le costanti $a_{\nu k}^{(n)}(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ soluzioni del sistema (3) di equazioni lineari, ove si è sostituita la f con la g_ν; indi si calcoli l'integrale

$$\sigma_{\nu n} = \int_E (g_\nu - a_{\nu 0}^{(n)} f_0 - a_{\nu 1}^{(n)} f_1 - \ldots - a_{\nu n}^{(n)} f_n)^2 \, dP.$$

Esiste, in ogni caso, il limite di tale integrale al divergere di n, al quale esso integrale tende non crescendo mai; orbene, *condizione necessaria e sufficiente per la completezza in* E *del sistema* $[f_k]$ *è che per ogni valore dell'indice* ν, *si abbia*

$$\lim_{n=\infty} \sigma_{\nu n} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

La condizione è già stata dimostrata necessaria. La sua sufficienza deriva dal teorema del n° **9**, poichè il verificarsi di essa esprime che ogni funzione g_ν del sistema $[g_\nu]$, completo in E, è ivi approssimabile per combinazioni lineari di funzioni del sistema $[f_k]$.

Per il calcolo di $\sigma_{\nu n}$, poniamo

$$\int_E f_i f_j \, dP = f_{ij}, \qquad \int_E f_i g_\nu \, dP = \gamma_{\nu i}, \qquad \int_E g_\nu^2 \, dP = \gamma_\nu, \tag{7}$$

indichiamo con Δ_n il determinante d'ordine n che ha f_{ij} per elemento della riga orizzontale i^{ma} e della colonna j^{ma} ed indichiamo con $F_{ij}^{(n)}$ il complemento algebrico di f_{ij} in Δ_n. Il sistema di equazioni (3) si scrive allora

$$\sum_{k=0}^{n} f_{ik} a_{\nu k}^{(n)} = \gamma_{\nu i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Ciò posto, si ha

$$
(8) \qquad \begin{aligned}
\sigma_{\nu n} &= \gamma_\nu - 2\sum_{k=0}^{n} a_{\nu k}^{(n)}\gamma_{\nu k} + \sum_{i=0}^{n} a_{\nu i}^{(n)} \sum_{k=0}^{n} f_{ik}\, a_{\nu k}^{(n)} \\
&= \gamma_\nu - \sum_{k=0}^{n} a_{\nu k}^{(n)}\gamma_{\nu k} \\
&= \frac{1}{\Delta_n}\left(\gamma_\nu \Delta_n - \sum_{r,s=0}^{n} \gamma_{\nu r}\gamma_{\nu s} F_{rs}^{(n)}\right) \\
&= \frac{\begin{vmatrix} \gamma_\nu & \gamma_{\nu 0} & \gamma_{\nu 1} & \cdots & \gamma_{\nu n} \\ \gamma_{\nu 0} & f_{00} & f_{01} & \cdots & f_{0n} \\ \gamma_{\nu 1} & f_{10} & f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{\nu n} & f_{n0} & f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{00} & f_{01} & \cdots & f_{0n} \\ f_{10} & f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n0} & f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}}.
\end{aligned}
$$

Enunceremo pertanto al modo seguente il

Criterio di completezza per un sistema di funzioni. — *Dato il sistema* $[f_k]$ *di funzioni, di quadrato sommabile in* E *ed ivi linearmente indipendenti, condizione necessaria e sufficiente per la completezza in* E *del sistema è che, per qualunque valore dell' indice* ν, *si abbia* $\lim_{n=\infty} \sigma_{\nu n} = 0$, $\sigma_{\nu n}$ *essendo dato dal membro finale delle eguaglianze* (8), *col concorso delle* (7), *mentre* $[g_\nu(P)]$ *è un particolare sistema di funzioni, completo in* E. *In ogni caso, la quantità* $\sigma_{\nu n}$ *non è mai negativa, ed essendo sempre positivo il determinante a denominatore, non sarà mai negativo il determinante a numeratore* (1), *per ogni fissato valore di* ν, *al crescere di* n, *essa non cresce mai.*

---

(1) Ciò che segue del resto anche dalla considerazione che tale determinante è il discriminante della seguente forma quadratica nei parametri $\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$:

$$\int_E (\lambda g_\nu + \mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_n f_n)^2\, dP.$$

In particolare, nell' ipotesi che il sistema $[f_k]$ sia ortogonale in E, si ritrova il criterio Lauricella-Severini dato al n° **18**.

Se il sistema $[f_k]$ non è completo in E, non tutte le funzioni possono ivi essere approssimate per combinazioni lineari delle f_k. In proposito, è facile dimostrare il teorema seguente.

Supposto che le funzioni del sistema $[f_k]$, *non completo in* E, *siano ivi linearmente indipendenti, tutte e sole le funzioni* f, *di quadrato sommabile in* E, *che ivi non possono essere approssimate per combinazioni lineari delle* f_k, *sono quelle per le quali, calcolata la quantità* σ_n *mediante le* (3) *e* (5) *del n° precedente, si ha*

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n = \sigma > 0.$$

Per ciascuna di tali funzioni, l'errore quadratico medio che si commette nel sostituirla, in tutto E, *con una qualsiasi combinazione lineare delle* f_k, *non è mai inferiore a* σ, *e quindli* (*cf.* n° **6**), *posto* $\delta = \sqrt{\sigma : m\mathrm{E}}$, *l'approssimazione di* f *per combinazione lineare delle* f_k, *non può scendere al disotto di* δ, *cioè comunque si prenda una combinazione lineare* G_n *delle* f_k, *vi è sempre una porzione di* E, di misura non nulla, *nei punti della quale riesce* $|f - \mathrm{G}_n| \geqq \delta$.

22. Sistemi completi fondamentali. — Per la generale pratica applicazione degli esposti criterii di completezza, nel campo delle funzioni a r variabili, occorre anzitutto conoscere un sistema di funzioni $[g_\nu(\mathrm{P})]$ tale che : I, ogni suo elemento g_ν risulti di quadrato sommabile in ogni insieme limitato e misurabile della spazia S_r a r dimensioni; II, il sistema riesca completo in ogni tale insieme. Un sistema di funzioni così fatto sarà da noi chiamato *un sistema completo fondamentale delle spazio* S_r.

Per la costruzione di sistemi completi fondamentali è utile il séguente teorema che subito discende dal teorema di Fubini (¹) sugli integrali multipli di Lebesgue.

(¹) G. Fubini, *Sugli integrali multipli* (*Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, 1° semestre 1907).

Siano $[g'_i(P')]$ *e* $[g''_k(P'')]$ *due sistemi completi fondamentali, rispettivamente, degli spazii* $S_{r'}$ *e* $S_{r''}$, *allora la funzione* $g'_i(P')\,g''_k(P'')$, *al variare di* i *e di* k, *indipendentemente l'uno dall'altro, nell'insieme dei numeri* 0, 1, 2, ..., *descrive un sistema completo fondamentale dello spazio* $S_{r'+r''}$.

Detta x l'ascissa di un punto di un S_1, il sistema $[x^k]$ è completo fondamentale di S_1 (¹). Ne segue che, *dette* $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *le coordi-*

(¹) *Cf.* C. Severini, *Sulle equazioni integrali* $\int_a^b \theta(x)x^n\,dx = 0$ (*Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, seduta del 2 gennaio 1921). In questa elegante nota il Severini dà una semplicissima dimostrazione della completezza del sistema $[x^k]$ in un intervallo (a, b) qualsiasi dell'asse delle x. Se ne deduce (*cf.* n° **9** del testo) la completezza dello stesso sistema in un qualunque insieme limitato e misurabile di S_1.

La dimostrazione del S. è divisa in due parti. Nella I^a parte, semplificando assai un procedimento già seguito dallo Stieltjes, si dimostra che, fra le funzioni $\Theta(x)$, continue in (a, b), solamente lo zero può simultaneamente soddisfare alle equazioni

$$(a) \qquad \int_a^b \theta(x)x^k\,dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dopo ciò, nella II^a parte, si fa il segrente ragionamento : Se per una funzione $\theta(x)$ sommabile in (a, b) [veramente, l'a suppone anche la sommabilità del quadrato di $\theta(x)$, ma ciò non è necessario] riescono soddisfatte le (a), ponendo $\Theta(x) = \int_a^x \theta(x)\,dx$, si trova, integrando per parti, che la funzione continua, anzi assolutamente continua, $\Theta(x)$ soddisfa alle stesse (a), e quindi, per quanto si è ottenuto con la I^a parte della dimostrazione, si deduce che $\Theta(x)$ è identicamente nulla in (a, b) e pertanto che è ivi $\theta(x) \doteq 0$.

Con la dimostrazione del S., non soltanto si prova la completezza del sistema $[x^k]$, non soltanto cioè, supposta $\theta(x)$ di quadrato sommabile, dal simultaneo verificarsi delle (a) si deduce $\theta(x) \doteq 0$, ma, di più, supposta, semplicemente, $\theta(x)$ sommabile, dal simultaneo verificarsi delle (a) si deduce ancora $\theta(x) \doteq 0$.

L'elegante artificio — che rammenta quello di Du Bois-Reymond per il calcolo della variazione prima di un integrale (nel calcolo delle variazioni) — escogitato dal S. nella II^a parte della sua dimostrazione, parmi assai fecondo ; esso è stato da me ripetuto con successo in una dimostrazione di completezza per un sistema di funzioni, particolarmente interessante, che si presenta nel nuovo metodo

nate di un punto di un S_r, *il sistema*

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_\nu^{k_\nu} \qquad (k_1, k_2, \ldots, k_r = 0, 1, 2, \ldots)$$

è completo fondamentale dello spazio S_r. Così pure il sistema $[\cos kx, \operatorname{sen} kx]$ è completo fondamentale di S_1 (*cf.* nota, p. 373), e pertanto, *il sistema*

$$\cos(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_r x_r), \quad \operatorname{sen}(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_r x_r)$$
$$(k_1, k_2, \ldots, k_r = 0, 1, 2, \ldots),$$

è completo fondamentale dello spazio S_r.

---

d'approssimazione da me trovato per la soluzione del problema di Dirichlet (*cf.* la Prefazione).

Ma c'è da osservare che, considerando bene la II^a parte della dimostrazione del S., si vede che essa permette di enunciare il seguente

Teorema. — *Sia* $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... *una successione di funzioni sommabili in* (a, b), *tale che, fra le funzioni* $\Theta(x)$, *assolutamente continue in* (a, b), *verificanti simultaneamente le equazioni*

$$\int_a^b g_\nu(x)\, \Theta(x)\, dx = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

e nulle in a e in b, non esista che lo zero; allora, indicando con $c_0, c_1, c_2, \ldots$ *una successione arbitraria di costanti, delle quali la prima non nulla, il sistema di funzioni :*

$$f_0(x) = c_0, \qquad f_1(x) = c_1 + \int_a^x g_1(x)\, dx, \qquad \ldots,$$
$$f_n(x) = c_n + \int_a^x g_n(x)\, dx, \qquad \ldots.$$

è non soltanto completo in (a, b), *ma, di più, è tale che, supposta* $\theta(x)$, *semplicemente, sommabile, dal simultaneo verificarsi delle equazioni*

$$\int_a^b f_k(x)\, \theta(x)\, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

si deduce l'equivalenza a zero di $\theta(x)$ *in* (a, b).

Esempio. — Dalla teoria elementare (Jordan) delle serie trigonometriche si deduce subito che, fra le funzioni $\Theta(x)$, continue e a variazione limitata in un

VI. — Approssimazione per serie.

23. Connessione fra il problema d'approssimazione per serie e quello della risoluzione dei sistemi di infinite equazioni lineari in infinite quantità incognite. — Come abbiamo rilevato nella Prefazione, le approssimazioni per serie, hanno in generale — dal pratico punto di vista colà accennato — un interesse prevalentemente teorico, però, l'esame, che ci accingiamo a fare, della loro possibilità si riconnette a questioni d'analisi assai interessanti da parecchi lati.

Assegnato il sistema

$$(1) \qquad f_0(\mathrm{P}),\quad f_1(\mathrm{P}),\quad \ldots,\quad f_n(\mathrm{P}),\quad \ldots,$$

completo in E, di funzioni ivi linearmente indipendenti, si tratta di determinare un'infinità numerabile di costanti :

$$(2) \qquad a_0,\quad a_1,\quad \ldots,\quad a_n,\quad \ldots,$$

in modo che la serie

$$(3) \qquad a_0 f_0(\mathrm{P}) + a_1 f_1(\mathrm{P}) + \ldots + a_n f_n(\mathrm{P}) + \ldots,$$

---

intervallo (a, b) — fra le quali si trovano le funzioni assolutamente continue in (a, b) — verificanti simultaneamente le equazioni

$$\int_a^b \Theta(x) \operatorname{sen} \nu x \, dx = \int_a^b \Theta(x) \cos \nu x \, dx = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

e nulle in a, non esiste che lo *zero*. Da ciò segue allora, in virtù del teorema ora enunciato, che il sistema di funzioni

$$\operatorname{sen} kx, \quad \cos kx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

è tale che, supposta la sommabilità di $\theta(x)$ in (a, b), il simultaneo verificarsi delle equazioni

$$\int_a^b \theta(x) \operatorname{sen} kx \, dx = \int_a^b \theta(x) \cos kx \, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ha di conseguenza che in (a, b) è $\theta(x) \doteq 0$. In particolare, segue la completezza in (a, b) del sistema $[\operatorname{sen} kx, \cos kx]$.

approssimi in E la funzione $f(P)$, ivi di quadrato sommabile, arbitrariamente data; in modo cioè che, comunque si scelga una funzione $g(P)$ di quadrato sommabile in E, risutti sempre :

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_E f_k g \, dP = \int_E f g \, dP.$$

Poniamo nella (4), in luogo di g, successivamente, le funzioni della successione (1), troviamo allora che le costanti (2) dovranno simultaneamente soddisfare alla seguente infinità numerabile di equazioni lineari :

$$(5) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_E f_i f_k \, dP = \int_E f f_i \, dP \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Adunque : *Il problema dell'approssimazione di una funzioni f, di quadrato sommabile, per serie di funzioni, pur esse di quadrato sommabile, di un sistema $[f_k]$, si riconnette al problema della risoluzione del sistema* (5) *di un'infinità numerabile di equazioni lineari e ad un'infinità numerabile di quantità incognite* (¹).

24. Prime condizioni d'approssimabilità per serie. — Per quanto precede, si ha intanto : *Condizione necessaria affinchè la funzione f, di quadrato sommabile in* E, *sia ivi approssimabile per serie di funzioni, pur esse di quadrato sommabile, del sistema $[f_k]$, è che, il sistema* (5) *di infinite equazioni lineari, nelle infinite quantità incognite a_k, sia risolubile, sia cioè possibile determinare le costanti*

(¹) Una trattazione a fondo di tali sistemi ha fatto F. Riesz, nel suo ammirevole libro : *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (*Collection Borel*, Paris, Gauthier-Villars, 1913). Qui sono esposti in forma brillante e spesso nuova i fondamentali risultati sull'argomento conseguiti da Poincaré, da von Koch, da Hilbert e dai suoi scolari e dal Riesz medesimo. Vi si trovano criterii di risolubilità degli indicati sistemi, interessanti casi di risolubilità, metodi di risoluzione, nonchè utilissime indicazioni per gli ulteriori sviluppi di cui è suscettibile la bella teoria trattata.

della successione (2) *in modo che :* I° *le infinite serie nei primi membri delle* (5) *siano convergenti;* II° *esse abbiano per somma i secondi membri.*

Dimostriamo facilmante il

TEOREMA. — *Condizione sufficiente affinchè la funzione f, di quadrato sommabile in* E, *sia ivi approssimabile per serie di funzioni del sistema* $[f_k]$, *supposto completo in* E, *è che il sistema di equazioni* (5) *ammetta una tale soluzione che la corrispondente serie* (3) *approssimi in* E *una funzione ivi di quadrato sommabile; in particolare, sia tale che la serie converga su* E *in media, si abbia cioè, uniformemente al variare di p per valori intieri e positivi,*

$$\lim_{\nu=\infty}\int_E\left(\sum_{k=\nu}^{\nu+p}a_kf_k\right)^2 dP=\lim_{\nu=\infty}\sum_{i,k=\nu}^{\nu+p}a_ia_k\int_E f_if_k\,dP=0,$$

o, più particolarmente ancora, sia tale che la serie converga uniformamente in un insieme E' *contenuto in* E *e avente la misura di* E.

Ed invero, se le costanti della successione (2) sone tali che la serie (3) approssima in E una funzione f' ivi di quadrato sommabile, si avrà :

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_E f_if_k\,dP=\int_E f'f_i\,dP \qquad (i=0,1,2,\ldots),$$

e se, inoltre, quelle costanti verificano il sistema (5), ne seguirà

$$\int_E (f'-f)f_i\,dP=0 \qquad (i=0,1,2,\ldots),$$

il che, per la completezza, in E, del sistema $[f_k]$, ha di conseguenza l'equivalenza ivi delle due funzioni f' e f, ha di conseguenza cioé che proprio la serie (3) approssima in E anche l'assegnata funzione f.

25. METODO DELLE RIDOTTE PER LA RISOLUZIONE DEL SISTEMA (5). — La

condizione sufficiente ora data per l'approssimabilità di un'assegnata funzione f per serie di funzioni del sistema $[f_k]$, presuppone già la conoscenza di una soluzione del sistema di equazioni (5); noi daremo, in ciò che segue, altre condizioni sufficienti, le quali, al contrario, contengono nuovi criterii di risolubilità del sistema di equazioni (5). Vedremo anzi, ciò che è di un certo interesse, che in tali condizioni, per la risoluzione del sistema (5) è applicabile *il metodo delle ridotte* (*cf.* Riesz, *loc. cit.*, p. 376, capitoli I e II). Tale classico metodo consiste semplicemente in ciò : Delle equazioni (5) si conservano le sole prime $n+1$ e delle incognite a_k si cancellano tutte le successive alla a_n. Si ottiene così un sistema di $n+1$ equazioni lineari in $n+1$ incognite — il così detto *sistema ridotto d'ordine* $n+1$ — che coincide col sistema (3) del n° **20**. Tale sistema di equazioni, per la supposta indipendenza lineare delle funzioni del sistema $[f_k]$, è a determinante positivo; ne sia $(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)})$ la soluzione. Si fa ora variare n e, per ogni fissato valore dell'indice k, si esamina se, al divergere di n, esiste, determinato e finito, il limite di $a_k^{(n)}$. Il metodo riesce se : I° esiste, determinato e finito, tale limite; II° se, posto

$$\lim_{n=\infty} a_k^{(n)} = a_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

le quantità a_k così definite verificano il sistema (5).

26. Una condizione sufficiente d'approssimabilità per serie. — Ai casi osservati — nella teoria dei determinanti infiniti — da Poincaré e da von Kock in cui riesce il metodo, testè esposto, delle ridotte, ne aggiungeremo due nuovi, specialmente interessanti per le nostre applicazioni. Un primo caso si verifica nelle condizioni espresse dal seguente

Teorema. — *Il sistema* $[f_k]$, *di funzioni linearmente indipendenti in* E, *sia ivi completo. Sia* $(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)})$ *la soluzione del sistema ridotto*

$$(6) \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k \int_E f_i f_k \, dP = \int_E f f_i \, dP \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

e si abbia

$$\lim_{n=\infty} a_k^{(n)} = a_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{i,\,k=\nu}^{\nu+p} a_i a_k \int_E f_i f_k \, dP = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{i,\,k=\nu}^{\nu+p} a_i^{(\nu+p)} a_k^{(\nu+p)} \int_E f_i f_k \, dP = 0, \tag{9}$$

uniformemente al variare di p per valori intieri e positivi. Allora, la serie (3), *convergendo su* E *in media, approssima ivi la funzione f di quadrato sommabile, arbitravriamente data, ed in particolare, dunque, le* a_k *verificano il sistema* (5).

Ed invero, posto

$$F_n = a_0^{(n)} f_0 + a_1^{(n)} f_1 + \ldots + a_n^{(n)} f_n,$$

al divergere di n, la F_n, come abbiamo visto al n° **20**, converge su E in media verso la funzione f, e perciò, comunque si scelga la funzione g in E, ivi di quadrato sommabile, si avrà :

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \int_E f_k g \, dP = \int_E f g \, dP. \tag{10}$$

La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_E f_k g \, dP,$$

risulta convergente, in virtù della (8). Si ha infatti

$$\left(\sum_{k=\nu}^{\nu+p} a_k \int_E f_k g \, dP\right)^2 = \left[\int_E g \left(\sum_{k=\nu}^{\nu+p} a_k f_k\right) dP\right]^2 \leq \left(\int_E g^2 \, dP\right) \sum_{i,\,k=\nu}^{\nu+p} a_i a_k \int_E f_i f_k \, dP,$$

e quindi uniformemente al variare di p,

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{k=\nu}^{\nu+p} a_k \int_E f_k g \, dP = 0.$$

Si trae poi dalla (9), allo stesso modo, che, uniformemente al variare di p,

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{k=\nu}^{\nu+p} a_k^{(\nu+p)} \int_E f_k g \, dP = 0, \tag{11}$$

poichè

$$\left(\sum_{k=\nu}^{\nu+p} a_k^{(\nu+p)} \int_E f_k g \, dP \right)^2 \leq \left(\int_E g^2 \, dP \right) \sum_{i,k=\nu}^{\nu+p} a_i^{(\nu+p)} a_k^{(\nu+p)} \int_E f_i f_k \, dP.$$

Ma, valendo la (11), è facile dimostrare che

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \int_E f_k g \, dP = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_E f_k g \, dP,$$

e pertanto, segue dalla (10),

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_E f_k g \, dP = \int_E f g \, dP,$$

ciò che appunto si voleva dimostrare. La (8) esprime inoltre la convergenza su E in media della serie (3).

27. Una seconda condizione sufficiente d'approssimabilità per serie. — Un secondo caso in cui, per la risoluzione del sistema (5), è applicabile il metodo delle ridotte, si trova appoggiandosi sulla seguente proposizione della teoria der limiti [*cf.* Riesz, *loc. cit.*, n° **40**] :

I sistemi di quantità finite (reali o complesse)

$$\begin{array}{lllll} a_0^{(n)}, & a_1^{(n)}, & \ldots, & a_k^{(n)}, & \ldots \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ X_0, & X_1, & \ldots, & X_k, & \ldots, \end{array}$$

siano tali che esistano due numeri reali e positivi q e L, *il primo maggiore di uno, per i quali le due serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} | a_k^{(n)} |^q, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} | X_k |^{\frac{q}{q-1}},$$

convergano, mentre la somma della prima non supera, qualunque

sia n, il numero L. *Allora se esistono, determinati e finiti, i limiti*

$$\lim a_k^{(n)} = a_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

si avrà

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q \leqq \mathrm{L}, \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{X}_k a_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{X}_k a_k,$$

risultando convergente l'ultima serie scritta.

In base a questa proposizione è facile dimostrare il

Teorema. — *Il sistema* $[f_k]$ *di funzioni linearmente indipendenti in* E, *sia ivi completo. Sia* $(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)})$ *la soluzione del sistema ridotto* (6) *e si abbia :*

I° *esiste un numero reale p maggiori di* $\frac{1}{2}$ *per cui converge la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathrm{E}} f_k^2 \, d\mathrm{P} \right)^p ;$$

II° $$\lim_{n=\infty} a_k^{(n)} = a_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) ;$$

III° *esiste un numero positivo* L, *tale che, qualunque sia n, risulta :*

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k^{(n)}|^{\frac{2p}{2p-1}} \leqq \mathrm{L}.$$

Allora la serie (3) *approssima in* E *la funzione f di quadrato sommabile arbitrariamento data, ed in particolare, dunque, le* a_k *verificano il sistema* (5).

Si ha, invero, comunque si scelga la funzione g in E, ivi di quadrato sommabile,

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \int_{\mathrm{E}} f_k g \, d\mathrm{P} = \int_{\mathrm{E}} f g \, d\mathrm{P},$$

basterà perciò demostrare che :

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \int_{\mathrm{E}} f_k g \, d\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{\mathrm{E}} f_k g \, d\mathrm{P}.$$

In virtù delle ipotesi del teorema, ciò è un' immediata conseguenza della proposizione di limite ultimamente enunciata, poichè, posto :

$$\frac{2p}{2p-1} = q, \qquad \int_E f_k g \, dP = X_k,$$

si ha :

$$q > 1, \qquad p = \frac{q}{2(q-1)}, \qquad \sum_{k=0}^{n} |a_k^n|^q \leq L,$$

$$|X_k|^{\frac{q}{q-1}} \leq \left(\int_E f_k^2 \, dP\right)^p \left(\int_E g^2 \, dP\right)^p,$$

e l'ultima diseguaglianza, in forza dell' ipotesi I^a, conduce alla convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} |X_k|^{\frac{q}{q-1}}$.

VII. — Sui sistemi schmidtiani.

28. Preliminari. — Assegnate le quantità finite e reali

$$a_{ik}, \quad b_i \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots),$$

prendiamo a considerare il sistema di infinite equazioni lineari

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} x_k = b_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

nelle infinite quantità reali incognite x_0, x_1, x_2, ... Schmidt (*loc. cit.*, p. 359) ha studiato il sistema (1) nell' ipotesi che le serie

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}^2 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

convergano per ogni valore dell' indice i. In tale ipotesi noi diremo il sistema (1) *un sistema schmidtiano*. Diremo poi, con Schmidt, che il sistema di quantità $[x_k]$ è *una soluzione del sistema* (1) se :

I° la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2$ è convergente, ciò che, per la convergenza delle

serie (2), ha di conseguenza l'assoluta convergenza delle serie ai primi membri delle (1);

II° per il sistema $[x_k]$ di valori, le serie ai primi membri delle (1) hanno por somma i secondi membri.

In questo paragrafo finale vogliamo brevemente trattare i sistemi schmidtiani e ciò allo scopo, principalmente, di conseguire una nuova interpretazione del difficile problema di vedere se un dato sistema di funzioni è completo o pur no, interpretazione che può talvolta giovare alla risoluzione di quel problema. Vedremo di più che, in alcuni risultati dei §§ IV et V sono contenuti i principali risultati di Schmidt (*loc. cit.*) concernenti i sistemi (1).

29. Connessione fra i sistemi schmidtiani e certi sistemi di infinite equazioni integrali. — Dato il sistema $[f_k(\mathrm{P})]$ di funzioni di quadrato sommabile in un insieme E, per deciderne la completezza ivi, occorre considerare il seguente sistema di infinite equazioni integrali lineari ed omogenee :

$$(3) \qquad \int_{\mathrm{E}} f_i(\mathrm{P})\, g(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

nella funzione incognita $g(\mathrm{P})$, supposta pur essa di quadrato sommabile in E. Il sistema (3) rientra, come caso particulare, nel seguente

$$(4) \qquad \int_{\mathrm{E}} f_i(\mathrm{P})\, g(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} = b_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

ove le b_i sono quantità reali, arbitrariamente assegnate. Diremo, brevemente, che la $g(\mathrm{P})$ è *una soluzione del sistema* (4) se : I° essa è in E di quadrato sommabile; II° essa soddisfa alle equazioni del sistema.

Un criterio di risolubilità del sistema (4) è già contenuto nei risultati del n° **13**. Ortogonalizzando, invero, il sistema $[f_k]$, supposto di funzioni linearmente indipendenti — al quale caso ci si può sempre ridurre — si abbia $\varphi_k = \sum_{\nu=0}^{k} c_{k\nu} f_\nu$. Il sistema (4), poichè $c_{ii} \neq 0$, equi-

vale al seguente

$$\sum_{\nu=0}^{i} c_{i\nu} \int_E f_\nu(P)\, g(P)\, dP = \int_E \varphi_i(P)\, g(P)\, dP = \sum_{\nu=0}^{i} c_{i\nu} b_\nu,$$

onde (*cf.* n° **13**), in virtù dell' ortogonalità del sistema $[\varphi_i(P)]$ si ha:

Teorema Riesz-Fischer [1]. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema* (4) *possieda una soluzione è che risulti convergente la serie*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{i} c_{i\nu} b_\nu \right)^2;$$

soddisfatta questa condizione, una soluzione del sistema è data da:

$$g(P) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(P) \sum_{\nu=0}^{k} c_{k\nu} b_\nu.$$

Ora noi vogliamo mostrare che [2] la ricerca di tutte le soluzioni del sistema (4) equivale alla ricerca di tutte le soluzioni del più generale sistema schmidtiano.

Sia $[\varphi_k(P)]$ un particolare sistema di funzioni, ortogonale e completo in E, che riteniamo fissato una volta per tutte. Ponendo

$$(5) \qquad a_{ik} = \int_E f_i(P)\, \varphi_k(P)\, dP \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots),$$

si avrà (*cf.* n^i **13**, **16**, **18**)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}^2 = \int_E [f_i(P)]^2\, dP \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

e pertanto, il sistema (1) di infinite equazioni lineari, i cui coefficienti

---

(1) F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, 15 mars 1907). — E. Fischer, *loc. cit.*, p. 338.

(2) *Cf.* F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen* (*Mathematische Annalen*, Bd **69**, 1910, p. 449).

sono dati dalle (5) è un sistema schmidtiano. Esso si dirà *il sistema schmidtiano associato al sistema* (4) *di equazioni integrali.*

Viceversa dato il sistema schmidtiano (1), poniamo

$$(6) \qquad f_i(\mathrm{P}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}\, \varphi_k(\mathrm{P}) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

il sistema di equazioni integrali (4), per il quale le $f_i(\mathrm{P})$ son date dalle (6), si dirà *il sistema di equazioni integrali associato al dato sistema schmidtiano.*

Evidentemente : Si il sistema (4) di equazioni integrali è associato al sistema schmidtiano (1), reciprocamente, questo sistema è associato a quello.

I due sistemi (1) e (4) siano associati l'uno all'altro. Sia $g(\mathrm{P})$ una soluzione del sistema (4) di equazioni integrali, ponendo :

$$(7) \qquad x_k = \int_{\mathrm{E}} g(\mathrm{P})\, \varphi_k(\mathrm{P}) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

si avrà

$$b_i = \int_{\mathrm{E}} f_i(\mathrm{P})\, g(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} x_k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 = \int_{\mathrm{E}} [g(\mathrm{P})]^2\, d\mathrm{P},$$

e quindi le (7) forniscono una soluzione del sistema schmidtiano (1). Viceversa, sia $[x_k]$ una soluzione del sistema schmidtiano (1), ponendo allora

$$(8) \qquad g(\mathrm{P}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, \varphi_k(\mathrm{P}),$$

si avrà una soluzione del sistema (4) di equazioni integrali. Onde il

Teorema. — *Dato il sistema* (4) *di equazioni integrali, ad esso, mediante le formole* (5), *è associato un sistema schmidtiano* (1). *Viceversa, dato il sistema schmidtiano* (1), *ad esso, mediante le formole* (6), *è associato un sistema* (4) *di equazioni integrali. Vi è corrispondenza biunivoca fra le soluzioni di due sistemi associati. Le* (7) *fanno passare da una soluzione del sistema* (4) *di equazioni integrali ad una soluzione dell'associato sistema schmidtiano; viceversa, la* (8) *fa passare da una soluzione del sistema schmid-*

tiano (1) *ad una soluzione dell'associato sistema di equazioni integrali.*

Al sistema (3) di equazioni integrali è associato il sistema schmidtiano omogeneo

$$(9) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} x_k = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

e dal teorema ora ennunciato si deduce il

Corollario. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema di funzioni* $[f_k]$ *sia completo in* E, *è che il sistema schmidtiano omogeneo* (9), *associato al sistema* (3) *di equazioni integrali, non abbia che la soluzione nulla, cioè la soluzione*

$$x_k = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

30. Un esempio. — Con quest'ultima proposizione il problema di decidere se un dato sistema di funzioni è o no completo, viene trasformato in quello di vedere se il sistema schmidtiano omogeneo corrispondente possiede soltanto la soluzione nulla o ne possiede altre. Ora tale trasformazione può talvolta riuscire utile per la risoluzione di quel problema. Convinciamocene con un esempio.

Sia α una costante reale, si tratta di vedere se il sistema di funzioni della variabile θ :

$$(10) \quad \begin{cases} f_0(\theta) = 1, \qquad f_{2n-1}(\theta) = (1 + \alpha \cos\theta)^n \operatorname{sen} n\theta \\ f_{2n}(\theta) = (1 + \alpha \cos\theta)^n \cos n\theta \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

è, nell' intervalle $(0, 2\pi)$, completo o pur no.

Come sistema $[\varphi_k]$, ortogonale e completo in $(0, 2\pi)$, prendiamo quello definito dalle eguaglianze

$$\varphi_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \varphi_{2n-1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} n\theta, \qquad \varphi_{2n}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n\theta$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Il sistema schmidtiano associato al sistema (3) di equazioni inte-

grali, si scrive, nel caso attuale, dopo facili trasformazioni,

$$x_0 = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^k x_{2(i+k)} = 0, \qquad \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^k x_{2(i+k)-1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Se $|\alpha| > 2$, una soluzione evidente di tale sistema si ottiene ponendo

$$x_0 = 0, \qquad x_{2\nu-1} = x_{2\nu} = (-1)^\nu \left(\frac{2}{\alpha}\right)^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Pertanto, per $|\alpha| > 2$, il sistema di funzioni (10) non è completo in $(0, 2\pi)$, ed una funzione $g(\theta)$ che verifica simultaneamente le (3) è data da,

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2}{\alpha}\right)^k (\cos k\theta + \operatorname{sen} k\theta) \quad (^1).$$

31. I risultati di Schmidt. — Nella citata memoria (*loc. cit.*, p. 359) lo Schmidt ha formulato varii criterii di risolubilità per i sistemi schmidtiani e ha dato inoltre una condizione necessaria e suffi-

---

(1) L'interesse per questo esempio è suscitato vieppiù dal fatto che il considerato sistema (10) di funzioni è, al contrario, completo in $(0, 2\pi)$ se $|\alpha| < 1$: per $\alpha = 0$ il sistema si riduce a quello solito di Fourier. L'asserita completezza, per $|\alpha| < 1$, del sistema (10) si troverà dimostrata, come caso particolarissimo, nella memoria a questa successiva trattante il problema di Dirichlet, annunziata nella Prefazione. (L'indicato sistema si presenta appunto nel problema esterno di Dirichlet per l'ellisse.) Ne seguirà che il sistema schmidtiano omogeneo

$$\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \beta^k \xi_{i+k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

al quale — ponendo $\frac{\alpha}{2} = \beta$, $x_{2\nu} = \xi_\nu$, ovvero $x_{2\nu-1} = \xi_\nu$ — si riduce quello ottenuto nel testo, non possiede, per $|\beta| < \frac{1}{2}$, che la soluzione nulla. Di ciò non sono riuscito a dare una dimostrazione diretta, per quanto, a prima vista, essa sembri facilmente conseguibile.

ciente affinchè un sistema schmidtiano omogeneo non abbia che la soluzione nulla. Orbene, tali risultati sono contenuti nei nostri, in virtù del teorema enunciato al n° **29**.

Il criterio, enunciato al n° **29**, di risolubilità per il sistema di equazioni integrali (4), associato al sistema schmidtiano (1), dà per quest'ultimo un criterio che coincide con quello dato dallo Schmidt al § 14 della sua memoria.

Il criterio di completezza, enunciato al n° **21**, applicato al sistema $[f_k]$ di funzioni definite dalle (6), dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema schmidtiano omogeneo (9) non abbia che la soluzione nulla. Tale condizione contiene come caso particolare quella trovata dallo Schmidt al § 11 della sua memoria. Per avere il *preciso* enunciato di Schmidt, premettiamo la seguente osservazione: Indicando con $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ dei parametri indeterminati, condizione necessaria e sufficiente affinchè, qualunque sia n, i primi membri delle prime $n+1$ equazioni del sistema schmidtiano (9), siano linearmente indipendenti è che la seguente forma quadratica negli indicati parametri,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{ik}\mu_i\right)^2 = \sum_{i,j=0}^{n}\mu_i\mu_j\sum_{k=0}^{\infty}a_{ik}a_{jk} \quad (^1),$$

sia definita positiva. Adunque, osservando che

$$\int_E f_i(P)f_j(P)\,dP = \sum_{k=0}^{\infty}a_{ik}a_{jk},$$

supposta l'indipendenza lineare delle funzioni f_k, ne segue l'indipendenza lineare, qualunque sia n, dei primi membri delle prime $n+1$ equazioni del sistema schmidtiano (9), associato al sistema (3) di equazioni integrali, e viceversa.

---

(1) Data la convergenza delle serie $\sum_{k=0}^{\infty}a_{ik}^2$, è facile dimostrare la convergenza della serie al primo membro, per quali si vogliano valori dei parametri μ_i, nonchè l'eguaglianza.

Poniamo ora

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} a_{jk}, \tag{11}$$

e, per enunciare il criterio di completezza del n° **21**, usiamo, in particolare, in luogo del sistema completo arbitrario $[g_\nu]$, il sistema $[\varphi_\nu]$, ortogonale e completo del n° **29**, allora, con le attuali notazioni, si ha *precisamente* il

Teorema di Schmidt. — *Dato il sistema schmidtiano omogeneo* (9), *tale che, qualunque sia n, i primi membri delle prime $n+1$ equazioni siano linearmente indipendenti, condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema non possieda che la soluzione nulla, è che, per qualunque valore dell'indice ν, si abbia :*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{0\nu} & a_{1\nu} & \dots & a_{n\nu} \\ a_{0\nu} & \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0n} \\ a_{1\nu} & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\nu} & \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{0n} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots) \tag{12}$$

ove le quantità α_{ij} sono date dalle (11). *In ogni caso, il determinante a denominatore è sempre positivo, quello al numeratore non è mai negativo, ed il loro quoziente, per ogni fissato valore di ν, non cresce mai al crescere di n.*

32. Un'utile aggiunta al teorema di Schmidt. — Nelle applicazioni del teorema di Schmidt ora enunciato è utile un'osservazione, che vogliamo ora qui fare, la quale non si trova neppure nella citata esposizione del Riesz (*loc. cit.*, p. 376). Secondo questa osservazione, si ha :

Il verificarsi della (12), *per un particolare valore m dell'indice ν,*

ha di conseguenza che, per ogni soluzione del sistema schmidtiano omogeneo (9), *è* $x_m = 0$ [1].

Sia invero verificata la (12) per il particolare valore m dell'indice ν, dico che allora non potrà esistere una soluzione del sistema schmidtiano omogeneo (9) per la quale risulti $x_m \neq 0$. Ed infatti, in caso contrario, il seguente sistema schmidtiano

$$(13) \qquad \begin{cases} x_m = 1, \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} x_k = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

possiederebbe una soluzione $[x_k]$. Per tale soluzione sia

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 = \mathrm{M}.$$

Comunque sè scelgano gli $n+2$ parametri $\mu, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$, dalle prime $n+2$ equazioni del sistema (13) deduciamo

$$\mu = \mu x_m + \sum_{k=0}^{\infty} x_k \sum_{i=0}^{n} a_{ik} \mu_i,$$

onde segne la diseguaglianza

$$\mu^2 \leq \mathrm{M} \left(\mu^2 + 2\mu \sum_{i=0}^{n} a_{im} \mu_i + \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} \mu_i \mu_j \right),$$

segne cioè che la forma quadratica

$$(\mathrm{M} - 1)\mu^2 + 2\mathrm{M} \sum_{i=0}^{n} a_{im} \mu \mu_i + \mathrm{M} \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} \mu_i \mu_j,$$

nei parametri $\mu, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$, è definita o semidefinita positiva per ogni valore di n. Il suo discriminante sarà perciò non negativo, si

---

[1] Mentre, secondo il teorema di Schmidt, per dedurre che $x_m = 0$, parrebbe necessario verificare che la (12) ha luogo per ogni valore dell'indice ν, e non semplicemente per il solo valore m.

avrà cioè, per ogni valore di n,

$$M \begin{vmatrix} 1 & a_{0m} & a_{1m} & \dots & a_{nm} \\ a_{0m} & \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0n} \\ a_{1m} & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nm} & \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0n} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \geqq 0,$$

ciò che, valendo la (12) per $\nu = m$, à assurdo per ogni valore finito di M.

Si ha così, si noti, una nuova semplicissima dimostrazione elementare della sufficienza della condizione (12) — verificata per ogni valore dell'indice ν — perchè il sistema schmidtiano omogeneo (9) non abbia che la soluzione nulla.

Differential Properties of Functions of a Complex Variable which are Invariant under Linear Transformations;

By E.-J. WILCZYNSKI.

PART I[1].

INTRODUCTION.

If $w = f(z)$ is a function of the complex variable z, other functions may be obtained from it by subjecting z, or w, or both variables to linear transformations. Clearly there will exist properties which are left unchanged by all such linear transformations, and it is evident that such properties are likely to be of considerable interest. It is the purpose of the present paper to show that this is actually the case.

In the first eleven articles we consider linear transformations of the independent variable only. Thus a given function $w = f(z)$ gives rise to a three-parameter family of functions

$$\overline{w} = f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \overline{f}(z), \tag{1}$$

where α, β, γ, δ are arbitrary constants. It is quite evident that many of the most important properties of the function $f(z)$ are left unchanged by such linear transformations. If w is uniform, so is $\overline{w}$; to every singular point of w will correspond one of $\overline{w}$; the cross-ratio of four singular points, or of four zeros of the function will be

(1) La seconde partie du présent Mémoire paraîtra dans le premier fascicule du Journal, en 1923.

preserved; etc. Moreover, we may look upon the investigation of those properties which all of the functions (1) have in common, as an extension of the theory of invariants of an algebraic binary form to the case of transcendental forms or functions.

Let us denote the independent variable by Z, and let

$$(2) \qquad w = f(Z) = a_0 + a_1(Z - z) + a_2(Z - z)^2 + \dots$$

be the expansion of $f(Z)$ in the neighborhood of $Z = z$. Those functions of the coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots$ which are left invariant by all transformations of the three parameter group

$$(3) \qquad \overline{Z} = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta},$$

are called *invariants*. Since these invariants may be regarded as functions of w, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{d^2 w}{dz^2}$, etc., and since their values change with z, we speak of them more specifically as *differential* invariants. Several complete systems of such invariants are obtained in Art. 1. In Art. 2 we introduce the notion of *integral invariant*. The most important integral invariant is

$$(4) \qquad \varphi = \int \sqrt{\{w, z\}}\, dz,$$

where

$$(5) \qquad \{w, z\} = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2,$$

is the Schwarzian derivative of w with respect to z. The most important differential invariant is

$$(6) \qquad \theta = \frac{\sqrt{\{w, z\}}}{w'}.$$

It turns out that, from our point of view, an analytic function is essentially determined when the relation between θ and φ is given. We speak of this relation as the *intrinsic equation* of the function $w = f(z)$. The actual determination of a function whose intrinsic equation is given, requires the integration of a linear differential equation of the second order, and may be reduced to the solution of an integral equation with a skew-symetric kernel.

In Art. 4 we introduce rational osculating functions of various orders, a notion very closely related to certain investigations due to Frobenius and Padé. The relations which exist between the poles of these functions, and also between their zeros, are very simple and elegant and seem to appear here for the first time. The *osculating logarithm*, introduced in Art. 5, serves to round out this theory in an essential fashion, and gives rise to further simple geometrical results. The osculating logarithm plays an essential role on account of the fact that every logarithmic function has an intrinsic equation of the form $\theta =$ constant.

The poles and zeros of the osculating rational functions and the singularities of the osculating logarithm are functions of the position of the point z at which the osculation takes place. If z is subjected to a linear transformation, each of these points is transformed by the same linear transformation, and we therefore speak of these points as *cogredients*. Special classes of functions may be defined by means of prescribed relations between certain ones of these cogredients. Numerous illustrations of this method are worked out in detail in Arts. 9, 10 and 11. One of the most interesting results obtained in this way is a new property of certain elliptic functions. Let

$$(7) \qquad Q(z) = \frac{A_0 + A_1 z + A_2 z^2}{B_0 + B_1 z + B_2 z^2},$$

be the rational quadratic function which osculates $w = F(Z)$ at $Z = z$, and let q_1 and q_2 be its poles. Let τ be the harmonic conjugate of z, the point of contact, with respect to q_1 and q_2. Then τ is the point which we call the *quadratic satellite* of z. We ask the question; what functions are those for which τ is a fixed point? It is evident that this will be so whenever $F(Z)$ is a quadratic function with coincident poles. But there is another case when τ is a fixed point; namely, when $w = F(Z)$ may be obtained by linear transformation from a Weierstrass ζ-function for which the invariant g_2 has the value zero, so that the cross-ratio of the branch points of the corresponding Riemann surface is equi-anharmonic.

The general expressions of the cogredients enable us to write down several new formulae which are valid for any analytic function. Each

of these formulae gives an expression for $w = f(z)$ in the form of an integral whose integrand depens upon one or several of the cogredients. These formulae admit iteration and are likely to be very useful in a large number of investigations. Similar expressions have also been found for the integral invariant φ, the most important one in terms of the singularities of the osculating logarithm. These formulae for φ are developed in Art. 7. But we also give, in Art. 7, an independent definition of φ which is of still greater interest, because this definition is formulated entirely in terms of notions which remain invariant under linear transformations, and by means of a limit process which is the multiplicative analogon of the process used for defining a definite integral.

In Art. 8 we introduce the integral invariant φ as a new independent variable. Thus from $w = f(z)$, we have

$$z_1 = \varphi = \int \sqrt{\{w, z\}}\, dz.$$

If we introduce $z_1 = \varphi$ as independent variable, w becomes a function of z_1, and we may put

$$z_2 = \int \sqrt{\{w, z_1\}}\, dz_1.$$

We may now introduce z_2 as independent variable and continue in this way. The resulting relations between the Schwarzian derivatives $\{w, z\}$, $\{w, z_1\}$, ..., $\{w, z_k\}$ take the form of continued fractions of a very simple and remarkable form. A number of new problems present themselves at once; in what cases will these continued fractions terminate? when will they be periodic? if they do not terminate, and k is allowed to grow beyond bound, will they converge? We have actually solved some of the simplest of these problems; but here, as elsewhere in this memoir, the new problems are too numérous and too far-reaching to make an immediate solution of all, or even of many of them, a possible undertaking.

In Art. 12 we enlarge our group by considering independent linear transformations of both dependent and independent variables. The corresponding invariant combinations are called *hyper invariants*. The integral invariant φ retains its invariantive property even under

the enlarged group. The simplest differential hyperinvariant, denoted by I, is of the fifth order. The relation between I and φ, called the *hyperintrinsic equation*, defines a function $w = f(z)$ except for linear transformations of both variables. The simplest hyperintrinsic equation, namely I = const., defines the power functions

$$\frac{aw + b}{cw + d} = \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)^r,$$

where a, b, c, d, α, β, γ, δ, and r are constants. The problem immediately presents itself to determine a power function of this form which shall have the closest possible contact with a given analytic function at a given point. This problem is solved completely in Art. 13, and leads again to interesting geometric relations between the singularities of the osculating power function and the singularities of other osculants which have been introduced before.

We have presented in this introduction only a few of the most striking features of this new theory, just enough to indicate the general point of view. And even in the body of the paper we have purposely refrained at many points from developing the theory more in detail, because it was our desire to obtain merely a first general outlook over this new territory. There remains much to be done.

I. — The differential invariants of a function of a complex variable.

Let $w = f(z)$ be a function of the complex variable z defined, in the neighborhood of the origin, by means of its Taylor expansion

$$(1) \qquad w = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_k z^k + \ldots.$$

If we transform the independent variable by putting

$$(2) \qquad \bar{z} = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad ad - bc \neq 0,$$

where a, b, c, d are arbitrary constants, w becomes a function $\bar{f}(\bar{z})$ of $\bar{z}$ and to properties of the function $f(z)$ in the neighborhood of $z = 0$ will correspond properties of the transformed function $\bar{f}(\bar{z})$

in the neighborhood of $\bar{z} = \frac{b}{d}$. Let us assume $d \neq 0$ and put $\frac{b}{d} = K$. We may then write (2) in the form

$$\bar{z} - K = \frac{\varepsilon z}{1 + \eta z}, \qquad \varepsilon \neq 0.$$

or

$$(3) \qquad z = \frac{\alpha z_1}{1 - \beta z_1}, \qquad z_1 = \bar{z} - K.$$

If $d = 0$, the transformation (2) may also be reduced to the same form (3) provided that z_1 in that case be interpreted to mean $\frac{1}{z}$, as is customary.

As a result of the substitution (3) the series (1) will become a power series in z_1, where z_1 is eiter equal to $\bar{z} - K$ or $\frac{1}{z}$. We proceed to determine the coefficients of this new expansion. We find from (3)

$$(4) \qquad z^k = \alpha^k z_1^k (1 - \beta z_1)^{-k} = \alpha^k z_1^k \left[1 + k\beta z_1 + \frac{k(k+1)}{2!} \beta^2 z_1^2 + \ldots \right].$$

If we substitute these values for z^k in (1) and denote by $\bar{a}_s$ the coefficient of z_1^s we find

$$(5) \quad \bar{a}_0 = a_0, \qquad \bar{a}_s = \sum_{k=1}^{s} \frac{k(k+1)\ldots(s-1)}{(s-k)!} a_k \alpha^k \beta^{s-k} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

The following special cases of (5) are especially important

$$(6) \qquad \bar{a}_1 = \alpha a_1, \qquad \bar{a}_2 = \alpha(a_2 \alpha + a_1 \beta), \qquad \bar{a}_3 = \alpha[a_3 \alpha^2 + 2 a_2 \alpha \beta + a_1 \beta^2].$$

By an *absolute invariant* of the function $f(z)$ under the transformations of the group (2) or (3) we mean a function of the coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots$, which, as a result of the relations (5), is identically equal to the corresponding function of $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$. Evidently a_0 is such an invariant. In order to find the others we might use the method of infinitesimal transformations. Thus (3) represents an infinitesimal transformation if we put

$$\alpha = 1 + \lambda \delta t, \qquad \beta = \mu \delta t,$$

where δt is an infinitesimal. The corresponding infinitesimal trans-

formations of the coefficients are given by

$$(7) \qquad \delta a_0 = 0, \qquad \delta a_k = [k a_k \lambda + (k-1) a_{k-1} \mu] \delta t, \qquad k > 0.$$

Therefore *every absolute invariant must be a solution of the two differential equations*

$$(8) \qquad \sum k a_k \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_k} = 0, \qquad \sum (k-1) a_{k-1} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_k} = 0.$$

The first of these two equations is easy to interpret. Let us attribute to a_k the *weight* k, and let us agree that the weight of a product shall be the sum of the weights of it factors. Then, the first equation (8) merely asserts that *every absolute invariant is isobaric of weight zero*. We may therefore find the invariants by constructing isobaric functions of a given weight p, in such a way as to also satisfy the second equation of (8), and then divide by a_1^p. Isobaric functions of weight different from zero, which also satisfy the second equation of (8), shall be called *relative invariants*.

But it is easier to obtain a complets set of invariants by a different process. Let us assume $a_1 \neq 0$. We may then according to (6) determine α and β in a unique fashion so as to make $\overline{a_1} = 1$, $\overline{a_2} = 0$, namely by putting

$$(9) \qquad \alpha = \frac{1}{a_1}, \qquad \beta = -\frac{a_2}{a_1^2}.$$

We obtain in this way the *canonical expansion* (*of the first kind*)

$$(10) \qquad w = f(z) = \mathrm{A}_0 + z_1 + \mathrm{A}_3 z_1^3 + \mathrm{A}_4 z_1^4 + \ldots$$

where, on account of (5), (6), and (9),

$$(11) \quad \begin{cases} \mathrm{A}_0 = a_0, \qquad \mathrm{A}_1 = 1, \qquad \mathrm{A}_2 = 0, \qquad \mathrm{A}_3 = \dfrac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_1^4}, \\ \mathrm{A}_s = \dfrac{1}{a_1^s}\left[a_s + \displaystyle\sum_{t=1}^{s-1} \frac{(-1)^t (s-1)(s-2)\ldots(s-t)}{t!} \frac{a_2^t a_{s-t}}{a_1^t}\right] \quad (s = 3, 4, 5, \ldots). \end{cases}$$

Another canonical form (the *second* kind) is obtained by putting

$$(12) \qquad \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_2^2 - a_1 a_3}}, \qquad \beta = \frac{-a_2}{\sqrt{a_2^2 - a_1 a_3}}.$$

The resulting expansion is characterized by the relations

$$\overline{a_1} + \overline{a_3} = 0, \qquad \overline{a_2} = 0. \tag{13}$$

This form is very useful.

We shall discuss the convergence of (10) later. At present we only wish to emphasize the fact that this canonical expansion (10) is *unique*. That is, to every series of the form (1), in which a_1 is not equal to zero, there corresponds a uniquely defined canonical expansion of form (10). From this it follows that *the coefficients of the canonical expansion are absolute invariants of* $f(z)$.

In fact, suppose we consider any function

$$g(\bar{z}) = b_0 + b_1\bar{z} + b_2\bar{z}^2 + \ldots, \qquad b_1 \neq 0,$$

obtainable from $f(z)$ by a transformation of form (2). By means of the transformation

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{b_1}\bar{z}_1}{1 + \frac{b_2}{b_1^2}\bar{z}_1},$$

$g(\bar{z})$ would be transformed into *its* canonical form

$$B_0 + \bar{z}_1 + B_3\bar{z}_1^3 + \ldots, \tag{14}$$

where B_0, B_3, etc., are related to b_0, b_1, b_2, ... in the same way as are A_0, A_3, ..., to a_0, a_1, a_2, ... But the expansions (10) and (14) must be identical on account of the uniqueness of the canonical form, so that

$$B_s = A_s,$$

showing that A_0, A_3, A_4, ... are actually absolute invariants. It is not difficult, moreover, to verify this fact by applying the infinitesimal transformations (7) to the expression (11) for A_s. For we find $\delta A_s = 0$, which again proves that A_s is an invariant.

The invariants A_0, A_3, A_4, ..., A_s, ... *are independent functions of the coefficients* a_0, a_1, a_2, ... — For, taken in this order, each of the invariants involves a coefficient a_s wich does not appear in any of the earlier invariants.

Every absolute invariant is a function of $A_0, A_3, A_4, \ldots$ — For, let $I(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ be an absolute invariant. Then we shall have

$$(15) \qquad I(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots) = I(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

whenever $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ are connected with $a_0, a_1, a_2, \ldots$ by means of the relations (5). In particular, (15) will be verified if we choose the values (9) for α and β, as a result of which choice, the expansion assumes its canonical form. Therefore we shall have

$$I(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots) = I(A_0, 1, 0, A_3, A_4, \ldots)$$

showing that I is a function of $A_0, A_3, A_4, \ldots$ as stated.

We may summarize our last three theorems by saying, that *the invariants* $A_0, A_3, A_4, \ldots$ *form a complete system of independent absolute invariants whenever* a_1 *is not equal to zero.*

We shall ordinarily maintain the hypothesis $a_1 \neq 0$. If a_1 is equal to zero we study, in place of the expansion (1), the Taylor expansion of $f(z)$ for some point $z = k$ where $k \neq 0$. Of course k may always be chosen in infinitely many ways so as to ensure that the coefficient of $z - k$ in the new expansion will not be equal to zero, provided that w is not *a* constant. It is possible, however, to replace the invariants $A_0, A_3, A_4, \ldots$ by *a* new system adapted to the case

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{p-1} = 0, \qquad a_p \neq 0,$$

by an obvious extension of the method which we have used for the case $a_1 \neq 0$.

Since we have

$$\bar{a}_1 = \alpha a_1,$$

a_1 is *a* relative invariant of weight 1. Consequently $a_1^s A_s$ is *a* relative invariant of weight s. According to (11), the last term of $a_1^s A_s$ (corresponding to $t = s - 1$) contains

$$\frac{a_2^{s-1} a_1}{a_1^{s-1}} = \frac{a_2^{s-2}}{a_1^{s-2}}$$

as a factor, and no other term of $a_1^s A_s$ contains *a* higher power of a_1 in its denominator.

Therefore $a_1^{2s-2} A_s$ *is a relative invariant of weight* $2s-2$, *which is an integral rational function of* $a_1, a_2, \ldots, a_s$. *Moreover this invariant is a linear function of* $a_3, a_4, \ldots, a_s$. *The only coefficients which appear raised to a higher power are* a_1 *and* a_2.

For this reason we shall occasionally refer to the invariants A_s as the *linear invariants* of the function $f(z)$. It is now easy to see that these linear invariants form a complete system in a more specific sense than that mentioned above. *Every absolute invariant, which is a rational function of the coefficients of* $f(z)$, *will be a rational function of the linear invariants.*

The invariant A_3 is of special importance. We have

$$a_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k w}{dz^k}\right)_{z=0},$$

so that A_3 is equal to the value wich

$$\frac{1}{6}\,\frac{\{w, z\}}{(w')^2}$$

assumes for $z=0$, if we write

$$(16)\qquad w' = \frac{dw}{dz}, \qquad w'' = \frac{d^2 w}{dz^2}, \qquad w''' = \frac{d^3 w}{dz^3}, \qquad \{w, z\} = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2,$$

so that $\{w, z\}$ represents the Schwarzian derivative of w with respect to z.

We shall frequently think of an expansion of the function $W = f(Z)$ in the neighborhood of *a* point z, not at the origin, where $f(Z)$ is analytic,

$$W = f(Z) = a_0 + a_1(Z-z) + a_2(Z-z)^2 + \ldots,$$

and we shall then write

$$(17)\qquad a_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k W}{dZ^k}\right)_{Z=z} = \frac{1}{k!}\,\frac{d^k w}{dz^k} = \frac{1}{k!}\,w^{(k)}.$$

We may then think of $a_0, a_1, a_2, \ldots$, as well as $w, w', w'', \ldots$ as functions of z and we shall have

$$(18)\qquad A_3 = \frac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_1^4} = \frac{1}{6}\,\frac{\{w, z\}}{(w')^2} = \frac{1}{6}\,\zeta^2$$

where

$$\theta = \frac{\sqrt{\{w, z\}}}{w'}, \tag{19}$$

a specific determination of the square root being chosen in any particular case.

Since A_3, A_4, A_5, ... are the coefficients of z_1^3, z_1^4, ... in the canonical expansion, it is apparent that A_4, A_5, ... *may be obtained from* A_3 *by repeated differentiation with respect to* z_1.

But we may exhibit another and more convenient differentiation process which accomplishes the same purpose. If we make any linear transformation of the independent variable,

$$\bar{z} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \tag{20}$$

we find

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2}, \tag{21}$$

and

$$\frac{dw}{d\bar{z}} = \frac{dw}{dz} : \frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{dw}{dz}\,\frac{(\gamma z + \delta)^2}{\alpha\delta - \beta\gamma}. \tag{22}$$

From our knowledge of the fact that θ^2 is an absolute invariant and from (22), we conclude

$$\{w, \bar{z}\} = \frac{\{w, z\}}{\left(\frac{d\bar{z}}{dz}\right)^2} = \{w, z\}\,\frac{(\gamma z + \delta)^4}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}, \tag{23}$$

a familiar formula which may also be verified directly.

More generally we make the following remark. *If* I *is a relative invariant of weight* p, *the transformation* (20) *will transform* I *into* $\bar{\mathrm{I}}$ *where*

$$\bar{\mathrm{I}} = \mathrm{I} : \left(\frac{d\bar{z}}{dz}\right)^p = \mathrm{I}\,\frac{(\gamma z + \delta)^{2p}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^p}. \tag{24}$$

If I is an absolute invariant, we have $p = 0$, and therefore

$$\frac{d\bar{\mathrm{I}}}{dw} = \frac{d\mathrm{I}}{dw}.$$

Thus *we may take* w, θ, $\frac{d\theta}{dw}$, $\frac{d^2\theta}{dw^2}$, $\cdots$ *as a fundamental system of invariants.*

II. — Integral invariants.

All of the invariants obtained so far are functions of the values, w, w', w'', ..., which $W = f(Z)$ and its derivatives assume for a given value z of the complex variable Z, the function $f(Z)$ being analytic in the neighborhood of this point. We shall henceforth speak of these invariants as *differential* invariants. But equation (23) of Art. 1 enables us to define a new kind of invariant which we shall call an *integral invariant* of the function. Equation (23) may be written as follows

$$\sqrt{\{w, \bar{z}\}}\, d\bar{z} = \sqrt{\{w, z\}}\, dz, \tag{25}$$

if the square roots are properly determined. Let us select a curve C of finite length in the z plane. This curve may be open or closed but it should be so chosen that $\sqrt{\{w, z\}}$ is analytic in the neighborhood of each of its points. Les $\bar{C}$ be the curve in the $\bar{z}$ plane obtained from C by the transformation (20). Then we shall have

$$\int_{\bar{C}} \sqrt{\{w, \bar{z}\}}\, d\bar{z} = \int_{C} \sqrt{\{w, z\}}\, dz. \tag{26}$$

Thus, *the value of the integral*

$$\varphi = \int_{C} \sqrt{\{w, z\}}\, dz \tag{27}$$

remains unchanged if the independent variable and the path of integration are transformed simultaneously by the same linear transformation.

We may express this by saying that φ is an integral invariant. More specifically we shall speak of φ as a *simple* integral invariant because the function under the integral sign depends only upon w, w', w'', ... The integrand does not itself involve integration.

If I *is any absolute differential invariant, the integral*

$$\int_C \mathrm{I}\, d\varphi = \int_C \mathrm{I}\sqrt{\{w, z\}}\, dz, \tag{28}$$

will be an integral invariant. Conversely, if w is not a linear function of z, any simple integral invariant may be expressed in this form.

The truth of the direct statement is apparent. To prove the converse let

$$\mathrm{J} = \int_C \mathrm{F}(z, w, w', w'', \ldots)\, dz$$

be a simple integral invariant. If w is not a linear function of z, the Schwarzian $\{w, z\}$ will not be equal to zero identicaly, and we may introduce φ as a new independent variable in place of z. Then J becomes

$$\mathrm{J} = \int_C \mathrm{G}\left(z, w, \frac{dw}{d\varphi}, \cdots\right) d\varphi.$$

Since J is invariant for all possible curves C, we must have

$$d\bar{\mathrm{J}} = d\mathrm{J}.$$

Since we have also

$$d\bar{\varphi} = d\varphi,$$

we find

$$\frac{d\bar{\mathrm{J}}}{d\bar{\varphi}} = \frac{d\mathrm{J}}{d\varphi},$$

wich show that $\frac{d\mathrm{J}}{d\varphi}$ or $\log\left(z, w, \frac{dw}{d\varphi}, \cdots\right)$ is an absolute differential invariant.

There exists an integral invariant even simpler than φ, namely $\int dw$, and by an argument analogous to that just completed we can show that any other simple integral invariant may be expressed in the form $\int \mathrm{I}\, dw$ where I is an absolute differential invariant. In fact this form remains valid even if w is a linear function of z, provided it is not a constant.

But the absolute differential invariant of lowest order, excepting w itself, is θ. Therefore

$$\int_C \theta\, dw = \int_C \theta w'\, dz = \int_C \sqrt{\{w, z\}}\, dz \tag{29}$$

is the simple integral invariant of lowest order, excepting only the integral $\int dw$. This latter integral however is related so simply to the values of w at the end points of the path of integration, that we prefer not to think of it as an integral at all. With this understanding we may claim that φ *is the simplest integral invariant of* $w = f(z)$ *for linear transformations of the independent variable.*

III. — The intrinsic equation.

Let w be given as an analytic function of z. We put

$$\theta = \frac{\sqrt{\{w, z\}}}{w'}, \qquad \varphi = \int_{z_0}^{z} \sqrt{\{w, z\}}\, dz = \int_{z_0}^{z} \theta w'\, dz = \int_{w_0}^{w} \theta\, dw,$$

the square root being properly specified, and the integration being performed over a path C at all of whose points $\sqrt{\{w, z\}}$ is analytic. If we regard φ as *a* function of its upper limit z, and eliminate z, we obtain *a* relation of the form

$$\theta = F(\varphi), \tag{30}$$

where F is an analytic function of φ. We shall speak of (30), which expresses the relation between the simplest differential and integral invariants of the function $w = f(z)$, as the *intrinsic equation* of $w = f(z)$, a terminology which corresponds to that used by Cesàro in his intrinsic géometry.

The importance of this notion for our theory appears in the following theorem.

All functions, which can be obtained from each other by linear transformation of the independent variable, have the same intrinsic equation. Conversely, if the intrinsic equation is given,

there will correspond to it infinitely many functions all of which may be obtained from one of them, $w = f(z)$, by adding a constant and making a linear transformation of z.

The truth of the direct theorem is obvious, since θ and φ are absolute invariants for all linear transformations of z.

To prove the converse we observe that

$$\frac{d\varphi}{dw} = \theta = \mathrm{F}(\varphi), \tag{31}$$

so that

$$w = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\mathrm{F}(\varphi)} + k. \tag{32}$$

Consequently w is determined as a function of φ except for an additive constant.

From the definition of θ we find

$$\frac{\{w, z\}}{(w')^2} = \theta^2.$$

On the other hand we have

$$\{w, z\} = -(w')^2 \{z, w\} \quad (^1), \tag{33}$$

so that

$$\{z, w\} = -\theta^2 = -[\mathrm{F}(\varphi)]^2. \tag{34}$$

In the right member of this equation we may replace φ by the function of w which results for it from (32), giving $\{z, w\}$ as a known function of w, say

$$\{z, w\} = \mathrm{G}(w),$$

and $\mathrm{G}(w)$ will be independent of k.

If z is any solution of this equation, the most general solution will be

$$\bar{z} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

(1) CAYLEY, *Collected Mathematical Papers*, vol. XI, p. 152.

where α, β, γ, δ, are arbitrary constants. Thus if $w = f(z)$ is one function which corresponds to the given intrinsic equation,

$$w = f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) + k$$

will be the most general function of the same kind.

The following method of proving the same theorem is more elegant and leads to some further results. Since (32) furnishes an expression for as a w function of φ by means of a simple quadrature, we are naturally led to think of z also as a function of φ. Now Cayley first proved the formula

$$\{s, x\} = \left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}\right)^2 [\{s, \mathfrak{X}\} - \{x, \mathfrak{X}\}] \text{ (}^1\text{)}, \tag{35}$$

which shows how to transform the independent variable of a Schwarzian. If we put $s = w$, $x = z$, $\mathfrak{X} = \varphi$, we find

$$\{w, z\} = \{w, z\}[\{w, \varphi\} - \{z, \varphi\}].$$

If w is not a linear function $\{w, z\}$ is not equal to zero, and we conclude

$$\{w, \varphi\} - \{z, \varphi\} = 1. \tag{36}$$

We may write

$$\{z, \varphi\} = \{w, \varphi\} - 1, \tag{37}$$

and our theorem now follows immediately from the fact that (32) gives the right member of (37) as a known function of φ which is independent of k, and that all solutions z of (37) are linear functions of any particular solution.

But we may actually indicate the analytic nature of this problem a little more closely. If $\theta = F(\varphi)$ is the given intrinsic equation, we find from (32)

$$\{w, \varphi\} = -\left[\frac{d^2 \log F}{d\varphi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d \log F}{d\varphi}\right)^2\right] = 1, \tag{38}$$

---

(1) *Loc. cit.*, p. 152.

where I is now a known function of φ. Of course the most general solution of (38) is a linear function of w.

Consider the linear homogeneous differential equation

$$\frac{d^2 W}{d\varphi^2} + \frac{1}{2} I W = 0, \tag{39}$$

and let W_1, W_2 be two of its linearly independent solutions. Then $\frac{W_2}{W_1}$ will be a solution of (38). Conversely if w is given as function of φ, as in the present case, we may find W_1 and W_2. Let $\varphi = \varphi_0$ be a value of φ for which I is analytic and let

$$\left\{\begin{array}{lll} W_1 = 1, & \dfrac{dW_1}{d\varphi} = 0, & \text{for } \varphi = \varphi_0, \\ W_2 = 0, & \dfrac{dW_2}{d\varphi} = 1, & \text{for } \varphi = \varphi_0; \end{array}\right. \tag{40}$$

moreover let the constant k equation (32) be equal to zero.

Then there exist in the φ-plane a circle of non-vanishing radius around φ_0, such that for all points in this circle

$$W_1 \frac{dW_2}{d\varphi} - W_2 \frac{dW_1}{d\varphi} = 1,$$

whence follows

$$\frac{dw}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{W_2}{W_1}\right) = \frac{1}{W_1^2},$$

if we put

$$w = \frac{W_2}{W_1},$$

and therefore

$$W_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{\dfrac{dw}{d\varphi}}}, \qquad W_2 = \pm \frac{w}{\sqrt{\dfrac{dw}{d\varphi}}}.$$

Since we have

$$\frac{dw}{d\varphi} = \frac{1}{F(\varphi)},$$

we may write

$$W_1 = \sqrt{F(\varphi)}, \qquad W_2 = \sqrt{F(\varphi)} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{F(\varphi)}. \tag{41}$$

In order to determine z as a function of φ, we must integrate the

differential equation

$$\{z, \varphi\} = I - 1.$$

Any solution of this equation may be equated to

$$z = \frac{Z_2}{Z_1}, \tag{42}$$

where Z_1, Z_2 are independent solutions of

$$\frac{d^2 Z}{d\varphi^2} + \frac{1}{2}(I - 1) Z = 0. \tag{43}$$

We may write this equation in the form

$$\frac{d^2 Z}{d\varphi^2} + \frac{1}{2} I Z = \frac{1}{2} Z \tag{44}$$

and integrate it as though the right member were a known function of φ, that is, as though (44) were a non-homogeneous linear differential equation whose right member is given. We find in this way that any solution of (44) satisfies the equation

$$Z = c_1 W_1 + c_2 W_2 + W_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{2} Z(-W_2)\, d\psi + W_2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{2} Z W_1\, d\psi,$$

where W_1 and W_2 are given by (41), or if we put the arguments into evidence,

$$Z(\varphi) = c_1 W_1(\varphi) + c_2 W_2(\varphi) + \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} [W_1(\psi) W_2(\varphi) - W_1(\varphi) W_2(\psi)] Z(\psi)\, d\psi. \tag{45}$$

If Z_1 *and* Z_2 *denote those solutions of* (43) *which are defined by the same initial conditions* (40) *which determine* W_1 *and* W_2, Z_1 *and* Z_2 *will satisfy the two integral equations*

$$Z_k(\varphi) = W_k(\varphi) + \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} [W_1(\psi) W_2(\varphi) - W_1(\varphi) W_2(\psi)] Z_k(\psi)\, d\psi, \tag{46}$$

$$(k = 1, 2)$$

and we shall have

$$Z = \frac{\alpha Z_1 + \beta Z_2}{\gamma Z_1 + \delta Z_2}$$

as the most general expression for the independent variable z which corresponds to the given intrinsic equation.

The common kernel of the two integral equations (46) may be written

$$(47) \qquad K(\varphi, \psi) = \sqrt{F(\varphi)F(\psi)} \int_{\psi}^{\varphi} \frac{d\rho}{F(\rho)},$$

so that

$$(48) \qquad K(\varphi, \psi) = -K(\psi, \varphi).$$

Therefore *the kernel is skew symmetric.* Thus, *the general problem of finding the functions which correspond to a given intrinsic equation has been reduced to a problem in linear integral equations of the Volterra type with a skew symmetric kernel.*

We shall actually determine the intrinsic equations of several important classes of functions later. For our present purposes it suffices to note a few very simple cases.

If w is a linear function of z, but not a constant, θ is identically equal to zero. Thus, *the intrinsic equation of linear functions is* $\theta = 0$.

Let us consider the function

$$w = a \log z, \qquad a \neq 0,$$

we find

$$w' = a z^{-1}, \qquad w'' = -a z^{-2}, \qquad w''' = 2 a z^{-3},$$

so that

$$\{w, z\} = \frac{1}{2} z^{-2},$$

and

$$\theta = \frac{1}{a\sqrt{2}}.$$

The same value of θ will, of course, be obtained if we replace z by a linear function of z.

Therefore, *the intrinsic equation of functions of the form*

$$(49) \qquad w = \frac{1}{k\sqrt{2}} \log \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

where k, α, β, γ, δ are constants, is $\theta = k \neq 0$.

We shall henceforth speak of functions of the form (49) as *logarithmic functions.*

Finally let

$$w = e^{az} + b, \qquad a \neq 0.$$

where a and b are constants. We find

$$\{w, z\} = -\frac{1}{2}a^2, \qquad \theta = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-az} = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{w-b},$$

$$\varphi = \int_{w_0}^{w} \theta \, dw = \frac{i}{\sqrt{2}} \log \frac{w-b}{w_0 - b},$$

whence

$$w - b = (w_0 - b) e^{-i\sqrt{2}\varphi}$$

and therefore

$$\theta = \frac{i}{\sqrt{2}(w_0 - b)} e^{i\sqrt{2}\varphi}.$$

Therefore, *the intrinsic equation of any exponential function of the form*

$$w = e^{\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}} + l, \tag{50}$$

where l, α, β, γ, δ *are constants, is*

$$\theta = k e^{i\sqrt{2}\varphi}, \tag{51}$$

where k *is a constant, which may be equated to unity if the lower limit of the integral invariant* φ *be selected accordingly.*

IV. — Rational osculants.

In order to be able to interpret the invariants already found, and for the purpose of obtaining still others of a more fundamental character, we now introduce a device suggested by differential geometry. In the metric theory of plane curves, for instance, certain osculating curves of a simple character are introduced, such as the tangent, the osculating circle, etc. The properties of these osculants, and their relations to each other constitute the subject matter of differential geometry. But the kind of osculants considered in any part of diffe-

rential geometry depends essentially upon the group of transformations which, in that branch of geometry, is regarded as fundamental. Thus the osculating circle plays no part in projective differential geometry, since a projective transformation does not, in general, transform a circle into a circle.

Our present investigations are in the domain of the theory of functions of a complex variable, and we are interested in those properties of such functions which remain unchanged under any linear transformation of the independent variable. Now obviously *a rational function of degree n will be transformed into another rational function of the same degree by any linear transformation of the independent variable.*

Again, let us consider two analytic functions

$$w_1 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \ldots,$$
$$w_2 = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \ldots,$$

which are so related that

$$a_0 = b_0, \qquad a_1 = b_1, \qquad \ldots, \qquad a_k = b_k, \qquad a_{k+1} \neq b_{k+1}.$$

We shall say that *the two functions have k^{th} order contact at the point $z = 0$.* The point $z = 0$ may be called the *point of contact.* Let us now subject z to any linear transformation. Formulae (5) show that we shall have

$$\bar{a}_0 = \bar{b}_0, \qquad \bar{a}_1 = \bar{b}_1, \quad \ldots, \qquad \bar{a}_k = \bar{b}_k, \qquad \bar{a}_{k+1} \neq \bar{b}_{k+1}.$$

Consequently, the order of contact between two functions remains unchanged under linear transformations of the independent variable.

Therefore, the following problem clearly belongs to our field. *To determine the rational function of degree α which has contact of the highest possible order with a given analytic function at a given point.* We shall henceforth speak of this function as the *osculating rational function of degree α.*

This problem may be solved very easily by explicit formulae. It is included in a more general problem studied by several mathemati-

cians, especially by Frobenius [1], and by Padé [2], namely the following : to determine the rational function, whose numerator is of degree α and whose denominator is of degree β, such that the power series expansion of this fraction at a specified point (say at $z = 0$) shall agree with a given power series

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

as far as possible, that is, ordinarily to $\alpha + \beta + 1$ terms. The fractions obtained in this way may be arranged in a double entry table usually known as Padé's table. We are only interested in those fractions of Padé's table for which $\alpha = \beta$, that is, those which would be located normally in the principal diagonal. The reason for this is apparent. To specify the degrees of numerator and denominator separately is equivalent to the requirement that a certain number of zeros or poles of the rational function shall be at infinity. But in our present theory the point at infinity is in no way distinguished by special properties.

The formulae of Frobenius give us immediately the following results.

Given the expansion of a function, analytic in the neighborhood of $z = 0$,

$$w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_k z^k + \ldots.$$

The osculating rational function of degree α *will be*

$$\frac{T_\alpha}{U_\alpha} \tag{52}$$

where

$$T_\alpha = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_\alpha, & a_0 z^\alpha \\ a_2, & a_3, & \ldots, & a_{\alpha+1}, & a_1 z^\alpha + a_0 z^{\alpha-1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\alpha+1}, & a_{\alpha+2}, & \ldots, & a_{2\alpha}, & a_\alpha z^\alpha + a_{\alpha-1} z^{\alpha-1} + \ldots + a_0 \end{vmatrix} \tag{53}$$

---

(1) *Crelle's Journal*, vol. 90, 1881.

(2) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, 1892, vol. 9.

and

$$(54)\qquad U_\alpha = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_\alpha, & z^\alpha \\ a_2, & a_3, & \ldots, & a_{\alpha+1}, & z^{\alpha-1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ a_{\alpha+1}, & a_{\alpha+2}, & \ldots, & a_{2\alpha}, & 1 \end{vmatrix}.$$

Moreover this rational function will actually be of degree α and in its lowest terms, if and only if the determinant

$$(55)\qquad c_\alpha = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_\alpha \\ a_2, & a_3, & \ldots, & a_{\alpha+1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ a_\alpha, & a_{\alpha+1}, & \ldots, & a_{2\alpha-1} \end{vmatrix}$$

is different from zero.

The following relation between two successive rational osculants should also be noted

$$(56)\qquad \frac{T_{\alpha+1}}{U_{\alpha+1}} - \frac{T_\alpha}{U_\alpha} = \frac{c_{\alpha+1}^2 z^{2\alpha+1}}{U_\alpha U_{\alpha+1}} \quad (^1).$$

One very obvious remark may be made at once. *The quantities c_α, defined by* (55), *are relative invariants of the function $w = f(z)$ under linear transformations of the independent variable.*

To prove this, let us suppose

$$c_1 \neq 0, \qquad c_2 \neq 0, \qquad c_{\alpha-1} \neq 0, \qquad c_\alpha = 0.$$

Then each of the osculants

$$\frac{T_1}{U_1}, \quad \frac{T_2}{U_2}, \quad \ldots, \quad \frac{T_{\alpha-1}}{U_{\alpha-1}},$$

is actually of the degree indicated and is not reductible to a lower degree, but according to (56) we shall have

$$\frac{T_\alpha}{U_\alpha} = \frac{T_{\alpha-1}}{U_{\alpha-1}}.$$

In other words, the rational osculating function of degree α, which has $2\alpha^{\text{th}}$ order contact with w, is not in its lowest terms but reduces

(1) Frobenius, *loc. cit.*, p. 6, équation (16).

to $\frac{T_{\alpha-1}}{U_{\alpha-1}}$. That is, the osculating rational function of degree $\alpha-1$ has not only contact of order $2(\alpha-1)$ with $w=f(z)$ but contact of order at least 2α. We shall say that it *hyperosculates* the function $w=f(z)$. But hyperosculation is obviously a property invariant under linear transformation. The refore the condition $c_\alpha=0$ is an invariant equation, and c_α must be an invariant, as stated above.

Since the sum of the indices in any term of the expanded determinant is α^2, *the weight of c_α is equal to α^2, and the effect of the infinitesimal transformation* (7) *upon c_α is given by*

$$\delta c_\alpha = \alpha^2 \lambda c_\alpha \delta t. \tag{57}$$

The direct proof of (57) is somewhat complicated and may be omitted. The invariants

$$c_1 = a_1, \qquad c_2 = a_1 a_3 - a_2^2,$$

have already made their appearance in Art. 1. Moreover *the conditions*

$$c_{\alpha-1} \neq 0, \qquad c_\alpha = 0, \qquad c_{\alpha+1} = 0, \qquad c_{\alpha+2} = 0, \qquad \ldots \tag{58}$$

obviously imply that $w=f(z)$ is a rational function of degree $\alpha-1$.

This also follows from the fact that the coefficients of the power series will, in this case, possess a scale of relation.

Of course the invariants $c_1, c_2, c_3, \ldots$ do not form a complete system. For, as we advance from c_α to $c_{\alpha+1}$, two new coefficients, $a_{2\alpha}$ and $a_{2\alpha+1}$, are introduced at the same time. It is easy however to form a complete system from these invariants by adding to them the invariants

$$d_\alpha = a_1 c'_\alpha - 2\alpha^2 a_2 c_\alpha. \tag{59}$$

That these quantities are invariants is easily seen as follows. Since c_α is a relative invariant of weight α^2, $\frac{c_\alpha}{a_1^{\alpha^2}}$ is an absolute invariant. Therefore (See Art. 1) its derivative is a relative invariant. But this derivative is

$$\frac{a_1^{\alpha^2} c'_\alpha - \alpha^2 a_1^{\alpha^2-1} c_\alpha a'_1}{a_1^{2\alpha^2}} = \frac{a_1 c'_\alpha - \alpha^2 a'_1 c_\alpha}{a_1^{\alpha^2+1}}.$$

Since a_1 is a relative invariant, the numerator of this fraction is also a relative invariant; but this numerator reduces to d_α since

$$a'_1 = w'' = 2\left(\frac{1}{2}w''\right) = 2a_2.$$

Of course the weight of d_α is $\alpha^2 + 2$.

We can find a simple general expression for c'_α in terms of $a_1, a_2, \ldots, a_{2\alpha}$. To do this we observe in the first place that

$$a'_k = (k+1)a_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{60}$$

since

$$a'_k = \frac{1}{k!}w^{(k+1)} = (k+1)\frac{1}{(k+1)!}w^{(k+1)}.$$

Now let us write c_α as follows

$$c_\alpha = \begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & a_2^{(2)}, & \ldots, & a_{k-1}^{(k-1)}, & a_k^{(k)}, & a_{k+1}^{(k+1)}, & \ldots, & a_\alpha^{(\alpha)} \\ a_2^{(1)}, & a_3^{(2)}, & \ldots, & a_k^{(k-1)}, & a_{k+1}^{(k)}, & a_{k+2}^{(k+1)}, & \ldots, & a_{\alpha+1}^{(\alpha)} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots \\ a_\alpha^{(1)}, & a_{\alpha+1}^{(2)}, & \ldots, & a_{\alpha+k-2}^{(k-1)}, & a_{\alpha+k-1}^{(k)}, & a_{\alpha+k}^{(k+1)}, & \ldots, & a_{2\alpha-1}^{(\alpha)} \end{vmatrix}$$

where the upper indices, which indicate the column to which each element belongs, have been introduced merely for the sake of fixing a notation for the cofactors. We actually have

$$a_k^{(\lambda)} = a_k^{(\mu)} = a_k,$$

and we shall denote by $A_k^{(\lambda)}$ the cofactor of $a_k^{(\lambda)}$, so that

$$c_\alpha = \sum_{i=1}^{\alpha} a_i^{(1)} A_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{\alpha} a_{i+1}^{(2)} A_{i+1}^{(2)} = \ldots = \sum_{i=1}^{\alpha} a_{\alpha+i}^{(\alpha)} A_{\alpha+i}^{(\alpha)}.$$

We find

$$c'_\alpha = \sum_{k=1}^{\alpha-1} \begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & a_2^{(2)}, & \ldots, & a_{k-1}^{(k-1)}, & a_{k+1}, & a_{k+1}^{(k+1)}, & \ldots, & a_\alpha^{(\alpha)} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots \\ a_\alpha^{(1)}, & a_{\alpha+1}^{(2)}, & \ldots, & a_{\alpha+k-2}^{(k-1)}, & \alpha a_{k+\alpha}, & a_{k+\alpha}^{(k+1)}, & \ldots, & a_{2\alpha-1}^{(\alpha)} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_{\alpha-1}, & (\alpha+1)a_{\alpha+1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_\alpha, & a_{\alpha+1}, & \ldots, & a_{2\alpha-2}, & 2\alpha a_{2\alpha} \end{vmatrix},$$

or

$$c'_\alpha = \sum_{k=1}^{\alpha-1} [a_{k+1} A_k^{(k)} + 2 a_{k+2} A_{k+1}^{(k)} + \ldots + \alpha a_{k+\alpha} A_{k+\alpha-1}^{(k)}]$$
$$+ (\alpha+1) a_{\alpha+1} A_\alpha^{(\alpha)} + (\alpha+2) a_{\alpha+2} A_{\alpha+1}^{(\alpha)} + \ldots + 2\alpha a_{2\alpha} A_{2\alpha-1}^{(\alpha)}.$$

Thus we have found

$$\begin{aligned} c'_\alpha = \; & a_2 \; A_1^{(1)} + 2 a_3 \; A_2^{(1)} + \ldots + (\alpha-1) a_\alpha \; A_{\alpha-1}^{(1)} + \alpha a_{\alpha+1} \; A_\alpha^{(1)} \\ & + a_3 \; A_2^{(2)} + 2 a_4 \; A_3^{(2)} + \ldots + (\alpha-1) a_{\alpha+1} \; A_\alpha^{(2)} + \alpha a_{\alpha+2} \; A_{\alpha+1}^{(2)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_\alpha \; A_{\alpha-1}^{(\alpha-1)} + 2 a_{\alpha+1} A_\alpha^{(\alpha-1)} + \ldots + (\alpha-1) a_{2\alpha-2} A_{2\alpha-3}^{(\alpha-1)} + \alpha a_{2\alpha-1} A_{2\alpha-2}^{(\alpha-1)} \\ & + a_{\alpha+1} A_\alpha^{(\alpha)} + 2 a_{\alpha+2} A_{\alpha+1}^{(\alpha)} + \ldots + (\alpha-1) a_{2\alpha-1} A_{2\alpha-2}^{(\alpha)} + \alpha a_{2\alpha} \; A_{2\alpha-1}^{(\alpha)} \\ & + \alpha [a_{\alpha+1} A_\alpha^{(\alpha)} + a_{\alpha+2} A_{\alpha+1}^{(\alpha)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2\alpha} \; A_{2\alpha-1}^{(\alpha)}]. \end{aligned}$$

The sum of the first α terms, in the first column

$$a_2 A_1^{(1)} + \ldots + a_{\alpha+1} A_\alpha^{(\alpha)} = 0.$$

The same thing is true of the sum of the first α terms in all of the other columns, except the last. Consequently

$$\begin{aligned} c'_\alpha = \; & \alpha [a_{\alpha+1} A_\alpha^{(1)} + a_{\alpha+2} A_{\alpha+1}^{(2)} + \ldots + a_{2\alpha} A_{2\alpha-1}^{(\alpha)}] \\ & + \alpha [a_{\alpha+1} A_\alpha^{(\alpha)} + a_{\alpha+2} A_{\alpha+1}^{(\alpha)} + \ldots + a_{2\alpha} A_{2\alpha-1}^{(\alpha)}], \end{aligned}$$

so that we find finally

$$(61) \qquad c'_\alpha = 2\alpha \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_\alpha \\ a_2, & a_3, & \ldots, & a_{\alpha+1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ a_{\alpha-1}, & a_\alpha, & \ldots, & a_{2\alpha-2} \\ a_{\alpha+1}, & a_{\alpha+2}, & \ldots, & a_{2\alpha} \end{vmatrix},$$

where the determinant differs from that for c_α only in the last row. *The derivative of c_α is obtained by increasing the index of each element in the last row of c_α by a single unit, and then multiplying the whole determinant by 2α.*

This formula assumes an interesting form if we remember that

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k w}{dz^k}.$$

As a result of formula (61) we may regard the invariants d_α as being known in terms of the coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{2\alpha}$, in the form of sums of two determinants.

The direct proof of (57), which has been omitted, may be based upon a calculation very similar to the one just completed.

We proceed now to study the distribution of the poles and zeros of these rational osculants. The osculating linear function is $\frac{T_1}{U_1}$, where

$$T_1 = \begin{vmatrix} a_1, & a_0 z \\ a_2, & a_1 z + a_0 \end{vmatrix}, \qquad U_1 = \begin{vmatrix} a_1, & z \\ a_2, & 1 \end{vmatrix}.$$

Therefore we find the formulae

$$(62) \qquad p = \frac{a_1}{a_2}, \qquad e = \frac{a_0 a_1}{a_0 a_2 - a_1^2},$$

where p is the pole, and e the zero of the osculating linear function.

The expression for the osculating quadratic function depends upon a_0, a_1, a_2, a_3 and a_4. If, in this expression, we replace a_4 by an arbitrary parameter λ, we obtain *a* one-parameter family of quadratic functions each of which will have third order contact with the function $w = f(z)$ at $z = 0$. We shall speak of these quadratic functions as *penosculating quadratics*. The osculating quadratic is that penosculating quadratic for which λ has the value a_4.

The denominator of the general penosculating quadratic is

$$(63) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & z^2 \\ a_2 & a_3 & z \\ a_3 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = (\lambda a_2 - a_3^2) z^2 + (a_2 a_3 - \lambda a_1) z + a_1 a_3 - a_2^2.$$

Since its coefficients are linear functions of λ, there will exist in general two values of λ, call them λ_1 and λ_2, for which the linear factors of (63) will become identical. These values of λ are given by

$$(64) \qquad \left.\begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{a_1^2}\left[-a_2(2a_2^2 - 3a_1 a_3) \pm 2(a_2^2 - a_1 a_3)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Those penosculating quadratics which correspond to $\lambda = \lambda_1$, and to $\lambda = \lambda_2$ will be the only ones whose two poles coincide. We shall

call them the *singular penosculating quadratics*. Let p_1 and p_2 be the poles of the singular penosculating quadratics. Then p_1 and p_2 will be obtained from the factors of (63) by equating λ to λ_1 and λ_2 respectively. Thus we find that

$$(65) \qquad p_1 = \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 - a_1 a_3}}{a_3}, \qquad p_2 = \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - a_1 a_3}}{a_3},$$

are the poles of the two singular penosculating quadratics.

Let us assume $a_1 \neq 0$, and that the series under consideration has ben reduced to its first canonical form (See Art. **1**). Then we shall have

$$w = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots,$$

where

$$A_0 = a_0, \qquad A_1 = 1, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = \frac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_1^4}, \qquad \ldots.$$

Thus we find

$$p = \infty, \qquad p_1 + p_2 = 0,$$

showing that the four points $0, p, p_1, p_2$ form a harmonic set, that is, the cross-ratio

$$(66) \qquad (0, p, p_1, p_2) = -1.$$

Now the cross-ratio of four points in the z plane is left unchanged by all linear transformations of z; to *a* function of z and the linear function which osculates it at $z = 0$ will correspond the transformed function and its linear osculating function. Consequently we obtain the following theorem.

Let z be any point of the plane in the neighborhood of which the function $f(z)$ is analytic and where $f'(z)$ is not equal to zero. Consider the osculating linear function and the two singular penosculating quadratics of $f(z)$ which belong to the point z, which shall henceforth be called the point of contact. Then, the point of contact and the pole of the osculating linear function are separated harmonically by the poles of the two singular penosculating quadratics.

Of course this gives us the corollary that *the four points mentioned*

are on one and the same circle, it being understood, as is customary in this theory, that a straight line is to be regarded as a special circle, namely a circle through infinity.

In proving this theorem we made use of the canonical form of the expansion. Of course the theorem may be proved without this device, but not without some calculation. It suffices for this purpose to note that

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \tag{67}$$

an equation which is equivalent to (66).

Let us now consider *any* penosculating quadratic, and let us denote its poles by $p_1^{(\lambda)}$ aud $p_2^{(\lambda)}$. These poles will be distinct, except when λ is equal to either λ_1 or λ_2, and they will always be the roots of the quadratic equation,

$$(\lambda a_2 - a_3^2) z^2 + (a_2 a_3 - \lambda a_1) z + a_1 a_3 - a_2^2 = 0, \tag{68}$$

which is obtained by equating (63) to zero. According to (65) p_1 and p_2 are the roots of the quadratic

$$a_3 z^2 - 2 a_2 z + a_1 = 0. \tag{69}$$

But the harmonic invariant of these two quadratics, namely,

$$(\lambda a_2 - a_3^2) a_1 + (a_1 a_3 - a_2^2) a_3 + (a_2 a_3 - \lambda a_1) a_2$$

is equal to zero for all values of λ. Consequently $p_1^{(\lambda)}$ and $p_2^{(\lambda)}$ are harmonic conjugates with respect to p_1 and p_2. This gives rise to the following theorem.

The poles of every penosculating quadratic, and therefore also the poles of the osculating quadratic, are harmonic conjugates of each other with respect to the poles of the two singular penosculating quadratics.

The same result may also be expressed by saying that the poles of the penosculating quadratics are pairs of an involution.

Equation (68) will furnish, as its roots, the poles of the osculating

quadratic if we put $\lambda = a_4$. Therefore we find

$$(70) \qquad q_1 + q_2 = \frac{a_1 a_4 - a_2 a_3}{a_2 a_4 - a_3^2}, \qquad q_1 q_2 = \frac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_2 a_4 - a_3^2},$$

where q_1 and q_2 denote the poles of the osculating quadratic.

We now pass to the consideration of penosculating and osculating cubics. The osculating cubic is $\frac{T_3}{U_3}$, and the penosculating cubics are obtained from $\frac{T_3}{U_3}$ by writing an arbitrary parameter λ in place of a_6. Thus the poles of the penosculating cubics are the roots of

$$(71) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & z^3 \\ a_2 & a_3 & a_4 & z^2 \\ a_3 & a_4 & a_6 & z \\ a_4 & a_5 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = -Az^3 + Bz^2 - Cz + D = 0,$$

where

$$(72) \qquad \begin{cases} A = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_5 & \lambda \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_5 & \lambda \end{vmatrix}, \\ C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_5 & \lambda \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Since the coefficients of (71) are linear functions of λ, the *poles of every penosculating cubic constitute a triple of a cubic involution.*

The product zU_2, where U_2 is the denominator of the osculating quadratic, will be the denominator of one penosculating cubic, namely that one which corresponds to $\lambda = \infty$. *There also exists a penosculating cubic, one of whose poles coincides with the pole of the osculating linear function.*

In order to determine the essential properties of this latter cubic, let us assume that the given expansion for $w = f(z)$ is in the first canonical form, so that

$$(73) \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = A_3, \qquad \ldots$$

we then find

$$(74) \qquad p = \infty, \qquad p_1 + p_2 = 0, \qquad q_1 + q_2 = -\frac{A_4}{A_3^2}, \qquad q_1 q_2 = -\frac{1}{A_3}.$$

In order that $p = \infty$ may be a root of (71), we must have $A = 0$, and this condition furnishes the following equation for λ :

$$\lambda = \frac{A_4}{A_3^2}(2A_3A_5 - A_4^2). \tag{75}$$

Let r_1 and r_2 be the remaining two poles of this special penosculating cubic. Then r_1 and r_2 are the roots of the quadratic

$$B_0 z^2 - C_0 z + D = 0,$$

obtained from (71) by substituting for λ the value given by (75). Consequently we have

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{C_0}{D}, \qquad \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{B_0}{D}. \tag{76}$$

But we find

$$B_0 = -\frac{D}{A_3^3}(A_3A_5 - A_4^2), \qquad C_0 = \frac{A_4 D}{A_3},$$

so that

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{A_4}{A_3}, \qquad \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{A_4^2 - A_3A_5}{A_3^3}. \tag{77}$$

From (74) we find

$$\tau = \frac{2q_1q_2}{q_1 + q_2} = \frac{2A_3}{A_4}, \tag{78}$$

and from (77) we find similarly

$$\frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} = \frac{2A_3}{A_4}, \tag{79}$$

so that

$$\frac{2}{\tau} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}. \tag{80}$$

According to this equation, τ is the harmonic conjugate of the origin, both with respect to q_1, q_2 and with respect to r_1, r_2. The point τ will appear so frequently in our theorems as to make it desirable to give it a name. We therefore formulate the following definition. *The point τ, which is the harmonic conjugate of the point of contact with respect to the poles of the osculating quadratic, shall be called the quadratic satellite of the point of contact.*

We may now express the contents of equations (80) as follows. *Consider the special penosculating cubic one of whose poles coincide with the pole of the osculating linear function. Its other two poles will be separated harmonically by the point of contact and the quadratic satellite.*

Still another formulation of this theorem is the following. *The involution determined by the two point-pairs* (q_1, q_2) *and* (r_1, r_2) *has as its double points the point of contact and its quadratic satellite.*

We have characterized geometrically, the denominators of two of the penosculating cubics, namely

$$z(z-q_1)(z-q_2) \quad \text{and} \quad (z-p)(z-r_1)(z-r_2),$$

where the latter may be replaced by $(z-r_1)(z-r_2)$ if the expansion of $f(z)$ is assumed to be in its canonical form. The poles of any penosculating cubic will then be the roots of the equation

$$(81) \qquad z(z-q_1)(z-q_2)+\mu(z-r_1)(z-r_2)=0,$$

which is merely another form for the cubic involution (71).

Let s_1, s_2, s_3 be the roots of this cubic for a given value of μ, so that s_1, s_2, s_3 form a triple of the cubic involution. We find

$$(82) \quad \Sigma s_i = q_1+q_2-\mu, \qquad \Sigma s_i s_j = q_1 q_2 - \mu(r_1+r_2), \qquad s_1 s_2 s_3 = -\mu r_1 r_2,$$

and therefore

$$(83) \qquad \begin{cases} \Sigma s_i s_j - (r_1+r_2)\Sigma s_i = q_1 q_2 - (q_1+q_2)(r_1+r_2), \\ s_1 s_2 s_3 - r_1 r_2 \Sigma s_i = -(q_1+q_2) r_1 r_2. \end{cases}$$

The equations (83), being independent of μ, represent those properties of the triples of our involution, which are common to all of them.

Let us determine those triples of the involution which have two coincident points. They correspond to those penosculating cubics which have a multiple pole, and which we shall call the *singular* penosculating cubics. For such a triple we may put

$$s_1 = s_2 = d, \qquad s_3 = e,$$
$$\Sigma s_i = 2d+e, \qquad \Sigma s_i s_j = d^2+2de, \qquad s_1 s_2 s_3 = d^2 e.$$

If we substitute these values in (83), we find

$$(84)\qquad \begin{cases} d^2 + 2de - (r_1 + r_2)(2d + e) = q_1 q_2 - (q_1 + q_2)(r_1 + r_2), \\ d^2 e - r_1 r_2 (2d + e) = -(q_1 + q_2) r_1 r_2, \end{cases}$$

whence

$$(85)\qquad \begin{cases} e = \dfrac{r_1 r_2 [2d - (q_1 + q_2)]}{d^2 - r_1 r_2}, \\ d = \dfrac{(r_1 + r_2) e^2 + [q_1 q_2 - r_1 r_2 - (q_1 + q_2)(r_1 + r_2)] e + (q_1 + q_2) r_1 r_2}{2(e - r_1)(e - r_2)}. \end{cases}$$

If the value of e from (85) is substituted in the first equation of (84), we obtain *the biquadratic equation*

$$(86)\qquad d^4 - 2(r_1 + r_2) d^3 + [3 r_1 r_2 - q_1 q_2 + (q_1 + q_2)(r_1 + r_2)] d^2 \\ - 2 r_1 r_2 (q_1 + q_2) d + r_1 r_2 q_1 q_2 = 0,$$

for the double points d_k of the cubic involution. To each of these four double points there corresponds, by means of (85) a point e_k at its *companion*, and we obtain in general four singular penosculating cubics each of which has one of the points d_k as a double pole and whose remaining pole, in general distinct from d_k, will be e_k.

Of course equation (86) might also have been obtained by equating to zero the Jacobian of the pencil of binary forms (71).

We may write (86) as follows

$$(87)\qquad \frac{1}{d^4} - \frac{4}{\tau}\frac{1}{d^3} + \left(\frac{3}{q_1 q_2} - \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{4}{\tau^2}\right)\frac{1}{d^2} - \frac{4}{q_1 q_2 \tau}\frac{1}{d} + \frac{1}{q_1 q_2 r_1 r_2} = 0.$$

Consequently we find

$$(88)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{d_i} = \frac{4}{\tau}, \qquad \sum_{i,j=1}^{4} \frac{1}{d_i d_j} = \frac{4}{\tau^2} + \frac{3}{q_1 q_2} - \frac{1}{r_1 r_2}, \\ \displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{4} \frac{1}{d_i d_j d_k} = \frac{4}{q_1 q_2 \tau}, \qquad d_1 d_2 d_3 d_4 = q_1 q_2 r_1 r_2. \end{cases}$$

The first of these equations is capable of a simple interpretation. Let us put

$$(89)\qquad \frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_j} = \frac{2}{d_{ij}}, \qquad \frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_l} = \frac{2}{d_{kl}},$$

where i, j, k, l represent the indices 1, 2, 3, 4, arranged in any order. Then we shall have, according to (88),

$$\frac{1}{d_{ij}} + \frac{1}{d_{kl}} = \frac{2}{\tau}. \tag{90}$$

Consequently *the four double poles of the four singular penosculating cubics have the following property. Select any two of them, d_i and d_j, and determine the harmonic conjugate, d_{ij}, of the point of contact with respect to them. Proceed in the same way with the other two double poles, d_k and d_l, giving rise to the point d_{kl}. The points d_{ij} and d_{kl} will be harmonic conjugates of each other with respect to the point of contact and its quadratic satellite.*

The four points d_i may be arranged in two pairs in six different ways, thus giving rise to six pairs (d_{ij}, d_{kl}). According to the theorem just proved, each of these pairs determines, with the point of contact, a circle passing through the point τ. We obtain in this way six circles of the pencil determined by the point of contact and its quadratic satellite.

A similar relation may be obtained from (86). Let us put

$$f_{ij} = \frac{1}{2}(d_i + d_j), \qquad f_{kl} = \frac{1}{2}(d_k + d_l), \qquad r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2). \tag{91}$$

Then we find from (86),

$$\frac{1}{2}(f_{ij} + f_{kl}) = r. \tag{92}$$

But in deducing equation (86) we used the canonical expansion, so that the pole of the osculating linear function p was at infinity. Consequently equations (91) and (92) indicate that (f_{ij}, p) and (d_i, d_j) are harmonic pairs, that (f_{kl}, p) and (d_k, d_l) are harmonic, etc. We obtain therefore the following second property of the points d_i.

Select any two, d_i and d_j, of the four points d_1, d_2, d_3, d_4, and determine the harmonic conjugate, f_{ij}, of the pole p of the osculating linear function with respect to them. Proceed in the same way with the remaining two points, d_k and d_l, giving rise to the point f_{kl}. The resulting two points, f_{ij} and f_{kl}, will be harmonic

conjugates of each other with respect to the pole of the osculating linear function p, and the point r, which is itself the harmonic conjugate of p with respect to r_1 and r_2.

We obtain in this way six circles of the pencil determined by p and r.

Let us put further

$$(93) \qquad q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2), \qquad d_{ijkl} = \frac{1}{2}(d_{ij} + d_{kl}), \qquad f_{ijkl} = \frac{2 f_{ij} f_{kl}}{f_{ij} + f_{kl}},$$

so that q is the harmonic conjugate of p with respect to q_1 and q_2, d_{ijkl} is the harmonic conjugate of p with respect to d_{ij} and d_{kl}, and f_{ijkl} is the harmonic conjugate of the point of contact with respect to f_{ij} and f_{kl}. We shall have

$$(94) \qquad q_1 q_2 = q\tau, \qquad r_1 r_2 = r\tau.$$

If we make use of the coefficient of d^2 and the constant term of equation (86), we find

$$(95) \qquad \begin{gathered} f_{ij} d_{ij} + f_{kl} d_{kl} + f_{ij} f_{kl} = 3r\tau - q\tau + 4qr, \\ d_{ij} d_{kl} f_{ij} f_{kl} = qr\tau^2. \end{gathered}$$

On account of (93), the last equation may be written

$$(96) \qquad d_{ijkl} f_{ijkl} = q\tau = q_1 q_2,$$

so that d_{ijkl} and f_{ijkl} are a pair of the involution

$$(97) \qquad zz' = q_1 q_2,$$

of which $z = 0, z' = \infty$, and $z = q_1$, $z' = q_2$, constitute two other pairs.

Thus the involution of which the point of contact and the pole of the osculating linear function form one pair, and for wich the poles of the osculating quadratic form a second pair, also contains the pair d_{ijkl}, f_{ijkl}.

Let us assume that d_1 and d_2 are distinct. Then

$$(z - d_1)^2 (z - e_1) \quad \text{and} \quad (z - d_2)^2 (z - e_2),$$

will be two distinct forms of the cubic involution (71), and this involution may be rewritten in the form

$$(98) \qquad (z-d_1)^2(z-e_1)=\nu(z-d_2)^2(z-e_2).$$

Let s_1, s_2, s_3 be the roots of (98) for a given value of ν. We shall have

$$(s_k-d_1)^2(s_k-e_1)=\nu(s_k-d_2)^2(s_k-e_2),$$
$$(k=1,2,3),$$

and therefore, by division,

$$\left(\frac{s_k-d_1}{s_k-d_2}:\frac{s_i-d_1}{s_i-d_2}\right)^2\left(\frac{s_k-e_1}{s_k-e_2}:\frac{s_i-e_1}{s_i-e_2}\right)=1.$$

or

$$(99) \qquad (d_1,d_2,s_k,s_i)^2(e_1,e_2,s_k,s_i)=1 \qquad (i,k=1,2,3).$$

Thus the relations between the poles, s_1, s_2, s_3, of any penosculating oubic and the poles of the four singular penosculating cubic are given by the double-ratio equations (99). *In particular these relations will hold for the poles of the osculating cubic.*

A similar relation may be obtained between s_1, s_2, s_3 and the points p, q_1, q_2, r_1, r_2, by starting from the form (81) of the cubic involution, if we remember that in our canonical form $z=\infty$ takes the place of $z=p$.

Some of the features of the theory developed so far may be extended at once to the osculating rational functions of higher order. There will always exist one penosculating rational function of degree α, one of whose poles is the point of contact, and whose $\alpha-1$ other poles are the same as the poles of the osculating rational function of degree $\alpha-1$. There will exist another penosculating rational function of degree α, one of whose poles coincides with the pole of the osculating linear function. The poles of all of the other penosculating functions of degree α will be determined by an involution of degree α, of which the two special integral rational functions of degree α just mentioned are the base forms. Among these penosculating functions there will be $2(\alpha-1)$ which are singular, that is, which have at least two coincident poles.

Our theoreme have all been concerned with properties of the *poles*

of the various osculating functions. *But the same relations are also true of their zeros.*

To prove this statement, it suffices to note that the rational function $\frac{T_\alpha}{U_\alpha}$ has contact of order 2α with $f(z)$ at $z = 0$, so that the expansion of

$$U_\alpha f(z) - T_\alpha,$$

begins with the term of order at least $2\alpha + 1$. Since $a_0 \neq 0$, we find that the expansion of

$$T_\alpha \frac{1}{f(z)} - U_\alpha,$$

will then also begin with a term of order at least $2\alpha + 1$.

Therefore, *the rational osculants of* $\frac{1}{f(z)}$ *are the reciprocals of the corresponding rational osculants of* $f(z)$. Consequently *the same relations which we have found between the poles of the rational osculants of* $f(z)$ *must also hold between their zeros.* The same statement also applies to the point-sets for which the various osculants assume a given value k, even if k is different from zero or infinity.

We have already pointed out that the rational osculating functions of order $1, 2, 3, \ldots, \alpha, \ldots$, which we have studied are the functions which normally occupy the positions in the principal diagonal of the Padé table. We have also studied certain classes of penosculating functions which have not been considered by Padé, and it appears clearly from our exposition that these penosculants are needed for the geometric interpretation. We have not so far considered any of the rational functions of Padé's table which are not on the principal diagonal. But our original objection to these functions, namely the non-invariant character of their definition, may now be disposed of, at least if we use some canonical form for our power series so that the point at infinity becomes the pole of the osculating linear function or some other invariantly defined point. Consequently we may now regard all of the functions of the Padé table as legitimate objects of our theory, opening up a large field for further investigation.

The theoreme wich have been established on the question of the convergence of a sequence of Padé fractions are of course of special

interest. We merely mention that they provide, among other things, criteria as to whether a given power-series does or does not represent a meromorphic function, and that, in the former case, the poles and zeros of the rational osculants approach in definite fashion the poles and zeros of the function $f(z)$ as limits.

We close this section with a discussion of the convergence of the canonical expansion which we have used so frequently; we have postponed this discussion, because we shall make use in it of some of the results which have been obtained since the canonical expansion was first introduced.

Let us suppose that the original series

$$w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

is convergent for

$$|z| < \mathrm{R}.$$

We obtained the canonical expansion by putting

$$z_1 = \frac{a_1 z}{1 - \frac{a_2}{a_1} z} = \frac{a_1 p z}{p - z},$$

where p is the pole of the osculating linear function. From our method of deriving the canonical series it is evident that it will be convergent if we have simultaneously

$$|z| < \mathrm{R}, \qquad |z_1| < |a_1|\,|p|,$$

or

$$|z| < \mathrm{R}, \qquad |z| < |p - z|,$$

whence

$$|z| < \mathrm{R}, \qquad |z| < \tfrac{1}{2}|p|.$$

Thus, *the canonical expansion will surely be convergent in a circle of center* $z = 0$ *and of radius* r, *where* r *is the smaller of the two positive numbers*, R and $\frac{1}{2}|p|$.

V. — The osculating logarithm.

We saw in Art. 3 that the absolute differential invariant

$$\theta = \frac{\sqrt{\{w, z\}}}{w'},$$

has a constant value $\theta = k$ for any function of the form

$$w = \frac{1}{k\sqrt{2}} \log \frac{z-a}{z-b} + l. \tag{100}$$

Since such a function involves four arbitrary constante, a, b, k, and 1, we may expect to find a logarithmic function which has third order contact with a given analytic function

$$w = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

at the origin. The resulting logarithmic function shall be called the *osculating logarithm.*

We see at once that for the determination of k we have

$$k = \theta = \frac{\sqrt{\{w, z\}}}{w'}, \tag{101}$$

where, of course, the value of θ for $z = 0$ is meant, and where a definite determination should be chosen for the square root. However, a change in this determination has no actual significance since it will be balanced by an interchange in the values of a and b, the two singular points of the osculating logarithm.

With this value for k, we find from (100),

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\theta\sqrt{2}}\left[\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right],$$

$$\frac{d_2 w}{dz^2} = \frac{1}{\theta\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{1}{(z-b)^2}\right].$$

In order that (100) may represent the osculating logarithm, these value of w, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{d^2w}{dz^2}$ must be equal to a_0, a_1, $2a_2$ respectively for $z = 0$.

We obtain the following conditions

$$a_0 = \frac{\theta\sqrt{2}}{1}\log\frac{a}{b} + l,$$

$$a_1 = \frac{1}{\theta\sqrt{2}}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right), \qquad 2a_2 = \frac{1}{\theta\sqrt{2}}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right).$$

From the last two equations we conclude by division

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{p}, \tag{102}$$

that is; *the singular points of the osculating logarithm are harmonic conjugates of each other with respect to the point of contact and the pole of the osculating linear function.*

Since we have also found

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = a_1\theta\sqrt{2},$$

we obtain the formulae

$$\frac{2}{a} = \frac{2a_2}{a_1} - a_1\theta\sqrt{2}, \qquad \frac{2}{b} = \frac{2a_2}{a_1} + a_1\theta\sqrt{2}, \tag{103}$$

whence

$$a = \frac{a_1\left[a_2 + \sqrt{12(a_1a_3 - a_2^2)}\right]}{8a_2^2 - 6a_1a_3}, \qquad b = \frac{a_1\left[a_2 - \sqrt{12(a_1a_3 - a_2^2)}\right]}{8a_2^2 - 6a_1a_3}, \tag{104}$$

and finally

$$l = a_0 + \frac{1}{\theta\sqrt{2}}\log\frac{2a_2 - a_1^2\theta\sqrt{2}}{2a_2 + a_1^2\theta\sqrt{2}}, \tag{105}$$

that branch of the logarithm being selected in (105) such that the expansion of (100) will actually have a_0 as its constant term.

If the function $w = f(z)$ is not a linear function, we may use the second canonical form, for which

$$a_2 = 0, \qquad a_3 = -a_1.$$

We then find

$$p_1 = +1, \qquad p_2 = -1, \qquad p = \infty,$$

$$a = \frac{1}{2}i\sqrt{3}, \qquad b = -\frac{1}{2}i\sqrt{3},$$

so that

$$(p_1, p_2, a, b) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}. \tag{106}$$

Moreover, the circles determined by $(0, a, b)$ and $(0, p_1, p_2)$ are (for this canonical form) the imaginary and real axes of the z plane (circles through $p = \infty$). Since angles are preserved by linear transformations we have proved the following theorem.

The cross-ratio determined by the poles of the two singular penosculating quadratics and the singularities of the osculating logarithm is equal to a complex cube root of unity. The circle determined by one of these points pairs with the point of contact is orthogonal to the corresponding circle for the second pair, and these circles meet again in the pole of the osculating linear function.

Let us consider for a moment the conformal representation of the z — plane upon the w — plane established by means of the osculating logarithm. If z moves on a circle of the pencil through a and b, the argument of $\frac{z-a}{z-b}$ will remain constant; if z moves on a circle of the orthogonal family, the modulus of $\frac{z-a}{z-b}$ will remain constant. To the circles of the first family there correspond in the w — plane the straight lines of a family of parallels, and to the circles of the second family will correspond the straight lines of the orthogonal family. Through the point of contact $(z = 0)$ there will pass a circle of each family. If we use the same canonical form as above, the circle through 0, a, and b, is the axis of imaginaries. All circles of the second family have the property that a and b are inverse points with respect to each of them. Since in our canonical form

$$a = -b = \frac{1}{2} i\sqrt{3},$$

the circle of the second family which passes through $z = 0$ is the axis of reals. Both of these lines, regarded as circles, pass through $p = \infty$. We obtain the following result.

Consider the pencil of circles through the singular points of the osculating logarithm, and the orthogonal family of circles. The two circles of the two families which pass through the point of contact meet again in the pole of osculating linear-function.

We may also express this result as follows.

Consider an analytic function $w = f(z)$ and the osculating logarithm of $f(z)$ at $z = 0$. Determine the isothermal system of straight lines in the w — plane which corresponds, by means of the osculating logarithm, to the isothermal system of circles which is determined by the singular points of the osculating logarithm. To this system of straight lines in the w — plane there corresponds, by means of $w = f(z)$, an isothermal system of curves in the z — plane. The two curves of this system which meet at $z = 0$ will have osculating circles which meet again in the pole of the linear osculating function.

The truth of this statement follows from the preceding theorem, if we remember further that the osculating logarithm has third order contact with $f(z)$ at $z = 0$. Consequently the curves of the two isothermal nets in the z — plane, which correspond to the above mentioned system of lines in the w — plane, by means of the two relations

$$w = f(z) \qquad \text{and} \qquad w = \frac{1}{\eta\sqrt{2}} \log \frac{z-a}{z-b} + l$$

will have the same osculating circles at $z = 0$.

It only remains to put into evidence the fact which is already clear from our discussion, that the quantity k which appears in (100) is actually an invariant for all transformations of the form

$$\bar{w} = w, \qquad \bar{z} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

For this purpose, let z_1 and z_2 be any two values of z, and w_1 and w_2 the corresponding values of w. Then we find

$$w_2 - w_1 = \frac{1}{k\sqrt{2}} \log \left[\frac{z_2 - a}{z_2 - b} : \frac{z_1 - a}{z_1 - b} \right],$$

whence

$$k\sqrt{2} = \frac{1}{w_2 - w_1} \log(a, b, z_2, z_1),$$

where (a, b, z_2, z_1) denotes the cross-ratio of the four points mentioned. This formula accomplishes our purpose since the right member obviously remains invariant under all transformations of the group under consideration.

ERRATA.

(Année 1918.)

L'année 1918 du *Journal* porte l'indication inexacte : « 7e série, tome IV ». Cette indication doit être remplacée par « 8e série, tome I ».

(8e série, tome III, 1920.)

Page 245, dans le titre, *au lieu de* Iv. Isénoff, *lire* Iv. Tsénoff.

(9e série, tome I, 1922.)

Page 3, en note, ligne 7, *au lieu de*

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_l \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial u_k},$$

lire

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_l \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u_l}.$$

TABLE DES MATIÈRES.

TOME I.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

		Pages.
[V10a]	Notice sur Camille Jordan, par *H. Villat*	1
[I22d]	Sugli ideali primarii assoluti in un corpo algebrico; per *Luigi Bianchi*	1
[R1e, O'6k]	Mécanismes transformables ou déformables. Couples de surfaces applicables qui s'en déduisent; par *Bertrand Gambier*	19
[D2b]	Sur les séries de polynomes à une variable complexe; par *N. Abramesco*	77
[D3f]	Sur la « Séparation » des points singuliers d'une fonction analytique; par *J. Soula*	85
[R6]	Les Théories einsteiniennes et les Principes du Calcul intégral; par *A. Buhl*	95
[R6]	La Théorie de la Relativité et les faits observés; par *S. Zaremba.*	105
[R5]	Sur les équations de la gravitation d'Einstein; par *E. Cartan.*	141
[R6]	Relativité restreinte et Géométrie des systèmes ondulatoires; par *J. Le Roux*	205

Pages.

[G3] Sur les systèmes de relations singulières entre les périodes des fonctions abéliennes à trois variables (*suite et fin*); par *Paul Lévy*..... 255

[D2] Nuove osservazioni su alcuni metodi d'approssimazione dell' analisi; per *Mauro Picone*..... 335

[D3a] Differential Properties of Functions of a Complex Variable which are Invariant under Linear Transformations, Part I; by *E.-J. Wilczynski*..... 393

Errata..... 436

FIN DU TOME I.

66415 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

1

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUBLIÉ DE 1875 A 1884 PAR H. RESAL,
ET DE 1885 A 1921 PAR CAMILLE JORDAN

NEUVIÈME SÉRIE

PUBLIÉE

Par HENRI VILLAT

AVEC LA COLLABORATION DE
R. DE MONTESSUS DE BALLORE, E. PICARD.

TOME DEUXIÈME — ANNÉE 1923

(88e Volume de la Collection.)

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1923

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Differential Properties of Fonctions of a Complex Variable which are Invariant under Linear Transformations;

By E.-J. WILCZYNSKI.

PART II [1].

VI. — Cogredients.

The expression

$$p = \frac{a_1}{a_2},$$

which whe have found for the pole of the osculating linear function, was derived under the assumption that the point of contact was $z = 0$. But it is easy to derive a more general formula. Let $w = f(\zeta)$ be *a* function of ζ analytic in the neighborhood of $\zeta = z$, and let its expansion at this point be

$$a_0 + a_1(\zeta - z) + a_2(\zeta - z)^2 + \ldots.$$

[1] La première Partie a paru dans ce journal, en Tome I de la neuvième série, 1922.

If we denote again by p the pole of the osculating linear function of $w = f(\zeta)$, the point of contact being $\zeta = z$, we find

$$p - z = \frac{a_1}{a_2}$$

so that

$$p = z + \frac{a_1}{a_2} = z + 2\frac{w'}{w''} \tag{107}$$

is the general expression for the pole of the linear function which osculate the function $w = f(\zeta)$ at the point $\zeta = z$. In this formula a_1, a_2 are the coefficients of $\zeta - z$ and $(\zeta - z)^2$ in the expansion of $f(\zeta)$ in powers of $\zeta - z$, and w' and w'' are the values of $f'(\zeta)$ and $f''(\zeta)$ for $\zeta = z$.

If we subject the function $w = f(\zeta)$ to any transformation of the group

$$\bar{w} = w, \qquad \bar{\zeta} = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta},$$

where α, β, γ, δ are constants, the point of contact z and the pole p of the corresponding osculating linear function of $w = f(\zeta)$ will be transformed into a new point $\bar{z}$ and the pole $\bar{p}$ of the osculating linear function of the function $w = \bar{f}(\bar{\zeta})$. Moreover, it may be verified that

$$\bar{p} = \frac{\alpha p + \beta}{\gamma p + \delta}.$$

We express this by saying that p is *a cogredient* of z with respect to the function $w = f(\zeta)$, and evidently we have obtained in Articles 4 and 5 *a* number of other cogredients.

The general expressions of these cogredients may be obtained as follows.

Let

$$\gamma = f(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$$

be the expression for any cogredient when the origin $\zeta = 0$ is the point of contact, the quantities α_0, α_1, α_2, ... being the coefficients of the expansion of $w = f(\zeta)$ at $\zeta = 0$. Then

$$c = z + f(a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

will be the expression of the corresponding cogredient when the

point $\zeta = z$ is the point of contact, the quantities a_0, a_1, a_2, ... being the coefficients of the expansion $w = f(\zeta)$ in a series of powers of $\zeta - z$

VII. — Interpretation of the integral invariant φ.

Let us apply the remark just made to formulae (103). We find the following formulae for the singular points a and b, of the osculating logarithm of $w = f(\zeta)$, the point of contact being $\zeta = z$:

$$(108) \qquad \frac{2}{a-z} = \frac{w''}{w'} - \sqrt{2\{w, z\}}, \qquad \frac{2}{b-z} = \frac{w''}{w'} + \sqrt{2\{w, z\}},$$

whence

$$(109) \qquad \sqrt{\{w, z\}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{b-z} - \frac{1}{a-z}\right).$$

We may therefore write

$$(110) \qquad \varphi = \int_{z_0}^{\zeta} \sqrt{\{w, z\}}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{z_0}^{\zeta} \left(\frac{1}{b-z} - \frac{1}{a-z}\right) dz.$$

We may express this as follows.

Given an analytic function $w = f(\zeta)$. Let us select a curve C *of finite length in the ζ plane, at all of whose points $f(\zeta)$ is analytic and $f'(\zeta)$ different from zero. Let a and b be the singular points of the logarithmic function which osculates $f(\zeta)$ at $\zeta = z$. Then the value of the integral*

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathrm{C}} \left(\frac{1}{b-z} - \frac{1}{a-z}\right) dz$$

extended over the curve C, *will remain unchanged if all of the points of the ζ plane are subjected to the same linear transformation.*

If we represent the variables a, b, z by the points A, B, Z of the ζ plane, we may write

$$(111) \qquad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathrm{C}} \left(\frac{1}{\mathrm{ZB}} - \frac{1}{\mathrm{ZA}}\right) dz$$

in terms of the vectors ZA and ZB.

We may also express the integral φ in terms of the poles, p_1 and p_2, of the singular penosculating quadratics. In fact, by the method of Art. **6**, we find the generalized expressions

$$p_1 - z = \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 - a_1 a_3}}{a_3}, \qquad p_2 - z = \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - a_1 a_3}}{a_3},$$

whence

$$\frac{1}{p_2 - z} - \frac{1}{p_1 - z} = \frac{2\sqrt{a_2^2 - a_1 a_3}}{a_1} = \frac{2i}{\sqrt{6}}\sqrt{\{w, z\}},$$

so that we find *the expression*

$$\varphi = \frac{\sqrt{6}}{2i}\int_C \left(\frac{1}{p_2 - z} - \frac{1}{p_1 - z}\right) dz, \tag{112}$$

for the integral invariant φ, *which is quite analogous to* (110).

Both of these formulae for φ may be used to advantage. But they cannot be regarded as altogether satisfactory as interpretations of the integral φ from our point of view. For, although the points z, a, b, p_1, p_2 which occur in these integrals are defined invariantly, they occur in combinations such as $a - z$ which are not invariant under linear transformations of the independent variable.

We now proceed to obtain a new expression for φ which is free from this objection. Let us divide the curve C, of finite length L, into n pieces, by means of points

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_{k-1}, \quad z_k, \quad \ldots, \quad z_{n-1}, \quad z_n = Z,$$

where z_0 and Z denote the end points, as is customary when defining a line integral. We shall put

$$z_{k+1} = z_k + \delta z_k,$$

and assume that all of the quantities δz_k approach zero, uniformly, as infinitesimals of the first order, when n grows beyond bound, and that

$$\lim \sum |\delta z_k| = \mathfrak{L}.$$

Let a_k and b_k be the singular points of the logarithmic function which osculates $f(\zeta)$ at $\zeta = z_k$. We proceed to calculate the double-ratio

of a_k, b_k, z_k, z_{k+1}. We find

$$(a_k, b_k, z_k, z_{k+1}) = \frac{z_k - a_k}{z_k - b_k} : \frac{z_{k+1} - a_k}{z_{k+1} - b_k} = \frac{z_k - a_k}{z_k - b_k} \frac{z_k - b_k + \delta z_k}{z_k - a_k + \delta z_k}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{\delta z_k}{z_k - b_k}}{1 + \dfrac{\delta z_k}{z_k - a_k}},$$

and this differs from

$$1 + \left[\frac{1}{a_k - z_k} - \frac{1}{b_k - z_k}\right] \delta z_k$$

only by an infinitesimal of order higher than the first. Let us put

$$\sigma = \{ w, z \}. \tag{113}$$

Then we may write, making use of (109),

$$(a_k, b_k, z_k, z_{k+1}) = 1 - \sqrt{2\sigma(z_k)}\, \delta z_k + \varepsilon_k \delta z_k. \tag{114}$$

where

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_k = 0. \tag{115}$$

Thus we have

$$\left\{\begin{array}{lll} (a_0, b_0, z_0, z_1) & = 1 - \sqrt{2\sigma(z_0)}\, \delta z_0 & + \varepsilon_0 \delta z_0, \\ (a_1, b_1, z_1, z_2) & = 1 - \sqrt{2\sigma(z_1)}\, \delta z_1 & + \varepsilon_1 \delta z_1, \\ (a_2, b_2, z_2, z_3) & = 1 - \sqrt{2\sigma(z_2)}\, \delta z_2 & + \varepsilon_2 \delta z_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, & & \\ (a_{n-1}, b_{n-1}, z_{n-1}, Z) & = 1 - \sqrt{2\sigma(z_{n-1})}\, \delta z_{n-1} & + \varepsilon_{n-1} \delta z_{n-1}. \end{array}\right. \tag{116}$$

Now there exists a unique linear transformation which converts any three distinct points into any three others. Denote by T_1 the linear transformation which converts

$$a_1, \quad b_1, \quad z_1 \qquad \text{into} \qquad a_0, \quad b_0, \quad z_1$$

respectively. Since T_1 does not alter double ratios, we may write in place of the second equation of (116)

$$(a_0, b_0, z_1, z_2') = 1 - \sqrt{2\sigma(z_1)}\, \delta z_1 + \varepsilon_1 \delta z_1, \tag{117}$$

where z'_2 is the point which corresponds to z_2 in the transformation T_1.

But if A, B, C, D, E are five elements, whe have the fundamental double-ratio equation

$$(118) \qquad (A, B, C, D)(A, B, D, E) = (A, B, C, E).$$

Consequently we deduce, from (117) and the first equation of system (116),

$$(119) \quad (a_0, b_0, z_0, z'_2) = \left[1 - \sqrt{2\sigma(z_0)}\,\delta z_0\right]\left[1 - \sqrt{2\sigma(z_1)}\,\delta z_1\right] + \varepsilon'_0\,\delta z_0 + \varepsilon'_1\,\delta z_1,$$

where

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon'_0 = \lim_{n \to \infty} \varepsilon'_1 = 0.$$

Let T_2 be the linear transformation which transforms

$$a_2, \quad b_2, \quad z_2 \qquad \text{into} \qquad a_0, \quad b_0, \quad z'_2,$$

respectively, and let z'_3 be the point which corresponds, by means of T_2 to z_3. Then we find, from (116)

$$(a_0, b_0, z'_2, z'_3) = 1 - \sqrt{2\sigma(z_2)}\,\delta z_2 + \varepsilon_2\,\delta z_2.$$

If we multiply both members of this equation by the corresponding members of (119), and make use of (118), we find

$$(a_0, b_0, z_0, z'_3) = \left[1 - \sqrt{2\sigma(z_0)}\,\delta z_0\right]\left[1 - \sqrt{2\sigma(z_1)}\,\delta z_1\right]\left[1 - \sqrt{2\sigma(z_2)}\,\delta z_2\right]$$
$$+ \varepsilon''_0\,\delta z_0 + \varepsilon''_1\,\delta z_1 + \varepsilon''_2\,\delta z_2,$$
$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon''_0 = \lim_{n \to \infty} \varepsilon''_1 = \lim_{n \to \infty} \varepsilon''_2 = 0.$$

In general, let T_i be the linear transformation which converts

$$a_i, \quad b_i, \quad z_i \qquad \text{into} \qquad a_0, \quad b_0, \quad z'_i,$$

where z'_i is the point obtained from z_i by means of T_{i-1}. We obtain finally

$$(120) \qquad (a_0, b_0, z_0, Z') = \prod_{i=0}^{n-1}\left[1 - \sqrt{2\sigma(z_i)}\,\delta z_i\right] + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i^{(n-1)}\,\delta z_i,$$

where Z' is obtained from Z by means of T_n, and where

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_i^{(n-1)} = 0.$$

We now proceed to let n grow beyond bound. We have assumed that the curve C is of finite length L, that the function $w = f(\zeta)$ is analytic in the neighborhood of every point of C and that $f'(\zeta)$ is different from zero at all points of C. Under these assumptions the sum which occurs in the right member of (120) will approach the limit zero, the transformation T_n will tend toward *a* limit T, and the infinite product will converge. Thus we find

$$(121) \qquad k = (a_0, b_0, z_0, \zeta) = \lim_{n \to \infty} \prod_{i=0}^{n-1} \left[1 - \sqrt{2\sigma(z_i)}\, \delta z_i\right],$$

where ζ is obtained from Z by means of the transformation

$$T = \lim_{n \to \infty} T_n.$$

It is noteworthy that we have obtained this cross-ratio k by means of an infinite product which is the multiplicative analogon of *a* definite integral.

We now propose to establish *a* relation between k and φ. Let us think of k as *a* function of Z,

$$k = k(Z).$$

Let us extend the curve C to $Z + h$ by means of an arc which satisfies the assumptions which we have made for C. Then we shall have

$$\frac{k(Z+h)}{k(Z)} = 1 - \sqrt{2\sigma(Z)}\, h + \varepsilon h,$$

where ε approaches zero with h, and therefore

$$\log k(Z+h) - \log k(Z) = -h\sqrt{2\sigma(Z)} + \varepsilon' h,$$

where

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon' = 0.$$

Consequently we find

$$\frac{d \log k(Z)}{dZ} = \lim_{h \to 0} \frac{\log k(Z+h) - \log k(Z)}{h} = -\sqrt{2\sigma(Z)}$$

so that

$$(122) \qquad k = e^{-\sqrt{2}\varphi}, \qquad \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \log k,$$

since for $Z = z_0$, k reduces to unity and φ to zero.

The analytic form of the correspondence T between ζ and Z is given by (121) combined with (122), or explicitly by

$$\frac{\zeta - a_0}{\zeta - b_0} = \frac{z_0 - a_0}{z_0 - b_0} e^{\sqrt{2}\int_{z_0}^{z} \sqrt{\{w, z\}}\, dz}. \tag{123}$$

Every analytic function $w = f(z)$ determines a transformation T *of curves in the z — plane, which has just been defined geometrically and whose analytic expression is given by* (123).

Let R be a simply connected region in the z — plane, such that $f(z)$ is uniform in R and has no essential singularities in R. Let us assume further that $\{w, z\}$ is different from zero at all points of R, and let C be a closed curve all of whose points are in R.

It involves no essential restriction to assume that $z = 0$ is a point of R. If $z = 0$ is an ordinary point for the function $f(z)$, we have

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

and $\{w, z\}$ will also be expressed by an ordinary power series in z, whose constant term is

$$\frac{6(a_1 a_3 - a_2^2)}{a_1^2},$$

provided $a_1 \neq 0$. Since $\{w, z\}$ is supposed to be different from zero at all points of R, $a_1 a_3 - a_2^2$ is not zero, and therefore the integral φ, taken around a circle of sufficiently small radius with such a point as center, is equal to zero.

Suppose however that

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{m-1} = 0 \qquad (a_m \neq 0).$$

Then

$$\begin{aligned} w &= f(z) = a_0 + a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \ldots, \\ w' &= m a_m z^{m-1} + (m+1) a_{m+1} z^m + \ldots, \\ w'' &= m(m-1) a_m z^{m-2} + \ldots, \\ w''' &= m(m-1)(m-2) a_m z^{m-3} + \ldots, \end{aligned}$$

so that

$$\frac{w''}{w'} = (m-1) z^{-1}[1 + P_1(z)], \qquad \frac{w'''}{w'} = (m-1)(m-2) z^{-2}[1 + P_2(z)],$$

$$\{w, z\} = -2(m^2 - 1) z^{-2}[1 + P(z)],$$

$$\sqrt{\{w, z\}} = \pm i \sqrt{2} \sqrt{m^2 - 1}\, z^{-1}[1 + Q(z)],$$

where P_1, P_2, P, and Q represent power series which vanish for $z = 0$. Since $\{w, z\}$ remains different from zero for all points in R, we may choose that determination of the square root for which

$$\sqrt{\{w, z\}} = i\sqrt{2(m^2-1)}\,[1 + Q(z)]\,z^{-1}.$$

We see that, in this case, the integral φ has $z = 0$ as a logarithmic singularity, and the value of the integral taken, in the positive sense, around a small curve which encloses $z = 0$, will be

$$-2\sqrt{2}\,\pi\sqrt{m^2-1}.$$

Let us suppose finally that $z = 0$ is a pole of $w = f(z)$, of multiplicity n. Then $z = 0$ will be *a* zero of $\frac{1}{w}$, of order n. But $\{w, z\}$ is equal to $\left\{\frac{1}{w}, z\right\}$. Consequently the integral will, in this case, be equal to

$$-2\sqrt{2}\,\pi\sqrt{n^2-1}.$$

We now easily deduce the following consequence from (123).

Let R *be a simply connected region in the* z *— plane such that* $w = f(z)$ *is uniform in* R, *and has no essential singularities in* R. *Moreover let* $\{w, z\}$ *be different from zero at all points of* R. *If* R *contains no points for which the equation* $f(z) = k$ *has a multiple solution,* k *being a finite number or* ∞, *then the transformation* T *will define* ζ *as a uniform function of* Z *for all points* Z *in* R. *If* R *does contain such points,* ζ *may be a many-valued function of* Z *in the region, but all of its branches will be connected by linear substitutions.*

It only remains to note the fact that our method of defining φ by means of an infinite product, may be applied without essential change if we make use of p_1 and p_2, the poles of the singular penosculating quadratics, in place of a and b. The corresponding formulae may of course be obtained directly from the equations of this article by making use of the relations betwee the points z, a, b, p_1, p_2 which were discovered in Art. 5.

VIII. — Introduction of φ as independent variable.

Having recognized the importance of the integral invariant φ, and having explored some of its properties, its seems natural to make use of φ as independent variable in all of the formulae which involve invariant relations of the function $w = f(z)$. In fact we have already done this in our discussion of the intrinsic equation

We first recall the following formulae, due to Cayley and very easy to verify, for the transformation of Schwarzian derivatives such as $\{s, x\}$.

If we transform the dependent variable by putting $s = F(S)$, we find

$$\{s, x\} = \left(\frac{dS}{dx}\right)^2 \{s, S\} + \{S, x\}. \tag{124}$$

Transformation of the independent variable is governed by the formula

$$\{s, x\} = \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 [\{s, X\} - \{x, X\}], \tag{125}$$

and if we transform both variables simultaneously, we find

$$\{s, x\} = \left(\frac{dS}{dx}\right)^2 \{s, S\} - \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 \{x, X\} + \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 \{S, X\}. \tag{126}$$

In particular we find the formula

$$\{s, x\} = -\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \{x, s\} \tag{127}$$

for interchanging the two variables. Finally we note the following familiar equations for *linear* transformations with constant coefficients :

$$\left\{\frac{as+b}{cs+d}, x\right\} = \{s, x\}, \tag{128}$$

$$\left\{s, \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right\} = \frac{(\gamma x+\delta)^4}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}\{s, x\}, \tag{129}$$

$$\left\{\frac{as+b}{cs+d}, \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right\} = \frac{(\gamma x+\delta)^4}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}\{s, x\}. \tag{130}$$

We are studying a function $w = f(z)$, and we propose to introduce

$$z_1 = \varphi = \int_{z_0}^{z} \sqrt{\{w, z\}}\, dz \tag{131}$$

as *a* new independent variable, so that w becomes *a* function of z_1. According to (125) we find

$$\begin{aligned} \{w, z\} &= \left(\frac{dz_1}{dz}\right)^2 [\{w, z_1\} - \{z, z_1\}] \\ &= \{w, z\} [\{w, z_1\} - \{z, z_1\}], \end{aligned} \tag{132}$$

whence

$$\{w, z_1\} - \{z, z_1\} = 1 \qquad \text{if} \qquad \{w, z\} \neq 0, \tag{133}$$

a formula which we have already used in Art. 3.

We may also write (132) as follows, if we make use of (127),

$$\{w, z\} = \{w, z\}\{w, z_1\} + \{z_1, z\}, \tag{134}$$

whence

$$\{w, z\} = \frac{\{z_1, z\}}{1 - \{w, z_1\}}, \qquad \{w, z_1\} = 1 - \frac{\{z_1, z\}}{\{w, z\}}, \tag{135}$$

provided again that $\{w, z\} \neq 0$ and $\{w, z_1\} \neq 1$.

Let us assume further that $\{w, z_1\} \neq 0$. We may then repeat this transformation, putting

$$z_2 = \int \sqrt{\{w, z_1\}}\, dz_1. \tag{136}$$

We find

$$\begin{cases} \{w, z_2\} - \{z_1, z_2\} = 1 \qquad \text{if} \qquad \{w, z_1\} \neq 0, \\ \{w, z_1\} = \{w, z_1\}\{w, z_2\} + \{z_2, z_1\}, \end{cases} \tag{137}$$

whence

$$\{w, z_1\} = \frac{\{z_2, z_1\}}{1 - \{w, z_2\}}, \qquad \{w, z_2\} = 1 - \frac{\{z_2, z_1\}}{\{w, z_1\}}, \tag{138}$$

or by combining (135) and (138),

$$\{w, z\} = \frac{\{z_1, z\}}{1 - \dfrac{\{z_2, z_1\}}{1 - \{w, z_2\}}}, \qquad \{w, z_2\} = 1 - \frac{\{z_2, z_1\}}{1 - \dfrac{\{z_1, z\}}{\{w, z\}}}. \tag{139}$$

Let us continue in this way. *Assume that all of the Schwarzians* $\{w, z\}, \{w, z_1\}, \{w, z_2\}, \ldots, \{w, z_{k-1}\}$ *are different from zero and from unity, and put*

$$(140) \qquad z_i = \int \sqrt{\{w, z_{i-1}\}}\, dz_{i-1}, \qquad z_0 = z \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

We find

$$(141) \qquad \begin{cases} \{w, z_i\} - \{z_{i-1}, z_i\} = 1, \\ \{w, z_{i-1}\}[1 - \{w, z_i\}] = \{z_i, z_{i-1}\}, \end{cases}$$

and obtain therefore the following two forms for the relation between $\{w, z\}$ *and* $\{w, z_k\}$:

$$(142) \qquad \{w, z\} = \cfrac{\{z_1, z\}}{1 - \cfrac{\{z_2, z_1\}}{1 - \cfrac{\{z_3, z_2\}}{1 - \cdots \cfrac{}{1 - \cfrac{\{z_k, z_{k-1}\}}{\{w, z_k\}}}}}},$$

and

$$(143) \qquad \{w, z_k\} = 1 - \cfrac{\{z_k, z_{k-1}\}}{1 - \cfrac{\{z_{k-1}, z_{k-2}\}}{1 - \cdots \cfrac{}{1 - \cfrac{\{z_1, z\}}{\{w, z\}}}}}.$$

Let us investigate the corresponding question for the variable k which was introduced in Art. **7**, namely

$$(122) \qquad k = e^{-\sqrt{2}\varphi} = e^{-\sqrt{2}z_1}.$$

If we put $S = \log s$, in (124), we find

$$(144) \qquad \{e^S, x\} = \{S, x\} + \left(\frac{dS}{dx}\right)^2 \{e^S, S\} = \{S, x\} - \frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dx}\right)^2.$$

Therefore we find from (122),

$$\{k, z\} = \{\varphi, z\} - \frac{1}{2}\left[\frac{d(-\sqrt{2}\varphi)}{dz}\right]^2 = \{\varphi, z\} - \{w, z\},$$

or

$$(145) \qquad \{\varphi, z\} = \{w, z\} + \{k, z\}.$$

From (125) we find

$$\{w, k\} = \left(\frac{d\varphi}{dk}\right)^2 [\{w, \varphi\} - \{k, \varphi\}],$$

and from (122) we find

$$\frac{dk}{d\varphi} = -\sqrt{2}k, \qquad \{k, \varphi\} = -1,$$

so that

$$\{w, \varphi\} = \{k, \varphi\} + 2k^2\{w, k\} = 2k^2\{w, k\} - 1. \tag{146}$$

According to (134) we have

$$\{w, z\}[1 - \{w, \varphi\}] = \{\varphi, z\}.$$

If we substitute in this equation the values (145) and (146) for $\{w, \varphi\}$ and $\{\varphi, z\}$, we find

$$\{w, z\} = \frac{\{k, z\}}{1 - 2k^2\{w, k\}}. \tag{147}$$

Let us use the notation k_1 in place of k and let us repeat the transformation by putting

$$k_2 = e^{-\sqrt{2}t_2}, \qquad t_2 = \int \sqrt{\{w, k_1\}}\, dk_1,$$

so that

$$\{w, k_1\} = \frac{\{k_2, k_1\}}{1 - 2k_2^2\{w, k_2\}}.$$

If we continue in this way, we find

$$\{w, z\} = \cfrac{\{k, z\}}{1 - \cfrac{2k_1^2\{k_2, k_1\}}{1 - \cfrac{2k_2^2\{k_3, k_2\}}{1 - \cdots \cfrac{}{1 - 2k_n^2\{w, k_n\}}}}}. \tag{148}$$

The cases when the continued fractions (142) or (143) terminate are of special interest. We shall discuss the simplest cases of this sort.

If $\{z_1, z\} = 0$, (134) shows that either $\{w, z\} = 0$ or $\{w, z\} \neq 0$, $\{w, z_1\} = 1$. In the first case w is a linear function of z. In the second

case we observe first that z_1 is not a constant, since

$$z_1 = \int \sqrt{\{w, z\}}\, dz, \qquad \{w, z\} \neq 0.$$

Since $\{z_1, z\} = 0$, z_1 is a non-constant linear function of z. Since

$$\{w, z_1\} = 1,$$

we have therefore

$$(149) \qquad w = \frac{\alpha e^{i\sqrt{2}z_1} + \beta}{\gamma e^{i\sqrt{2}z_1} + \delta}, \qquad z_1 = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad \begin{matrix} ad - bc \neq 0, \\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \end{matrix}$$

where α, β, γ, δ, a, b, c, d are constants. These are the functions which may be obtained from an exponential function $w = e^z$ by linear transformation of both z and w.

To find the intrinsic equation of these functions we observe that

$$\frac{dz_1}{dz} = \sqrt{\{w, z\}} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}, \qquad \frac{dw}{dz_1} = \frac{i\sqrt{2}(\alpha\delta - \beta\gamma)\, e^{i\sqrt{2}z_1}}{(\gamma e^{i\sqrt{2}z_1} + \delta)^2},$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dz_1}\frac{dz_1}{dz} = \frac{dw}{dz_1}\sqrt{\{w, z\}},$$

so that

$$\theta = \frac{\sqrt{\{w, z\}}}{w'} = \frac{(\gamma e^{i\sqrt{2}z_1} + \delta)^2}{i\sqrt{2}(\alpha\delta - \beta\gamma)\, e^{i\sqrt{2}z_1}},$$

and of course

$$z_1 = \varphi + \text{const.}$$

The resulting intrinsic equations are of the form

$$(150) \qquad \theta = \left(l e^{\frac{1}{2}i\sqrt{2}\varphi} + m e^{-\frac{1}{2}i\sqrt{2}\varphi}\right)^2.$$

Let us suppose next that $\{z_1, z\} \neq 0$, $\{z_2, z_1\} = 0$. Then we have, from (141),

$$(151) \qquad \{w, z_2\} - \{z_1, z_2\} = 1, \qquad \{w, z_1\}[1 - \{w, z_2\}] = 0,$$

so that either $\{w, z_1\} = 0$ or $\{w, z_1\} \neq 0$, $\{w, z_2\} = 1$.

In the former case we have from (134) and (133),

$$(152) \qquad \{w, z_1\} = 0, \qquad \{w, z\} = \{z_1, z\}, \qquad \{z, z_1\} = -1,$$

and these conditions imply again $\{z_2, z_1\} = 0$. But from (152)

we find

$$w = \frac{a z_1 + b}{c z_1 + d}, \qquad z = \frac{\alpha e^{\sqrt{2} z_1} + \beta}{\gamma e^{\sqrt{2} z_1} + \delta},$$

giving the general class of functions

$$\frac{\mathrm{A} w + \mathrm{B}}{\mathrm{C} w + \mathrm{D}} = \log \frac{\mathrm{A}' z + \mathrm{B}'}{\mathrm{C}' z + \mathrm{D}'}. \tag{153}$$

To find the intrinsic equation of these functions, we put

$$\{ w, z \} = \sigma.$$

Then the second equation of (152) becomes

$$\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{5}{4}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 = 2\sigma. \tag{154}$$

Since

$$\theta = \frac{\sqrt{\sigma}}{w'}, \qquad \sigma = (w')^2 \theta^2,$$

we find

$$\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{5}{4}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 = 2(w')^2\theta^2 + 2\frac{\theta''}{\theta} - 3\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 - 2\frac{w''}{w'}\frac{\theta'}{\theta}. \tag{155}$$

If we introduce w as independent variable in place of z, this formula becomes

$$\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{5}{4}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 = 2(w')^2\left[\theta^2 + \frac{1}{\theta}\frac{d^2\theta}{dw^2} - \frac{3}{2\theta^2}\left(\frac{d\theta}{dw}\right)^2\right], \tag{156}$$

and if we use φ as independent variable,

$$\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{5}{4}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 = 2(w')^2\left[\theta^2 + \theta\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2\right]. \tag{157}$$

Finally, if we again make use of the notation

$$\mathrm{I} = -\left[\frac{d^2 \log\theta}{d\varphi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\log\theta}{d\varphi}\right)^2\right], \tag{158}$$

as in Art. **3**, we may write

$$\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{5}{4}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 = 2(w')^2\theta^2(1 - \mathrm{I}). \tag{159}$$

The functions which are now studying satisfy the condition (154),

that is, $I = 0$. This condition is easy to integrate, and so we find

$$\theta = k(\varphi + c)^2, \tag{160}$$

k and c being constants, as the intrinsic equation for any function of this sort.

Thus, if $\{z_1, z\} \neq 0$, $\{z_2, z_1\} = 0$, the function $w = f(z)$ is either a logarithmic function of the form (153) with an intrinsic equation of form (160) or else

$$\{w, z_1\} \neq 0, \qquad \{w, z_2\} = 1, \qquad \{z_2, z_1\} = 0.$$

We find therefore

$$w = \frac{a\, e^{i\sqrt{2}z_2} + b}{c\, e^{i\sqrt{2}z_2} + d}, \qquad z_2 = \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta}, \tag{161}$$

and it only remains to find the relation between z_1 and z. According to (133) we have

$$\{z, z_1\} = \{w, z_1\} - 1,$$

and

$$\{w, z_1\} = \left\{ e^{i\sqrt{2}\frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta}}, z_1 \right\} = -\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dz_1}\left(i\sqrt{2}\,\frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta}\right)\right]^2 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\gamma z_1 + \delta)^4},$$

according to (128) and (144). Consequently the relation between z and z_1 will be obtained from the differential equation

$$\{z, z_1\} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\gamma z_1 + \delta)^4} - 1. \tag{162}$$

Of course this differential equation may easily be reduced to an equation of the Riccati form

$$\frac{d\zeta}{dz_1} - \frac{1}{2}\zeta^2 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\gamma z_1 + \delta)^4} - 1, \qquad \zeta = \frac{\dfrac{d^2 z}{dz_1^2}}{\dfrac{dz}{dz_1}}, \tag{163}$$

or else to a linear equation of the second order, namely

$$\frac{d^2 y}{dz_1^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\gamma z_1 + \delta)^4} - 1\right] y = 0. \tag{164}$$

If y_1 and y_2 are linearly independent solutions of (164), we may

write

$$z = \frac{A y_1 + B y_2}{C y_1 + D y_2}$$

as the general solution of (163).

The intrinsic equations of these functions follow at once form (161). We have

$$\theta = \frac{1}{\frac{dw}{dz_1}}, \qquad \varphi = z_1 + \text{const.},$$

and find therefore

$$(165) \qquad \theta = \frac{(\gamma\varphi + \delta)^2 \left[c\, e^{\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\alpha\varphi+\beta}{\gamma\varphi+\delta}} + d\, e^{-\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\alpha\varphi+\beta}{\gamma\varphi+\delta}} \right]^2}{i\sqrt{2}(ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma)}.$$

We now return to the general theory. We wish to find the effect of the transformation from z to z_1 upon θ and φ. We have

$$\theta = \frac{\sqrt{\{w, z\}}}{w'}, \qquad z_1 = \varphi = \int \sqrt{\{w, z\}}\, dz,$$

and we put similarly

$$(166) \qquad \theta_1 = \frac{\sqrt{\{w, z_1\}}}{\frac{dw}{dz_1}}, \qquad \varphi_1 = \int \sqrt{\{w, z_1\}}\, dz_1 = z_2.$$

We have found

$$\{w, z_1\} = 1 - \frac{\{z_1, z\}}{\{w, z\}} = 1 - \frac{\{z_1, z\}}{\sigma},$$

if we again put $\{w, z\} = \sigma$, and

$$\{z_1, z\} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{5}{4}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2\right] = (w')^2 \theta^2 (1 - \mathrm{I}),$$

according to (159). Consequently we find

$$(167) \qquad \{w, z_1\} = \mathrm{I},$$

and therefore we find *the formulae*

$$(168) \qquad \theta_1 = \theta\sqrt{\mathrm{I}}, \qquad \varphi_1 = z_2 = \int \sqrt{\mathrm{I}}\, d\varphi,$$

which enable us to find the intrinsic equation of w as function of z, when the intrinsic equation of $w = f(z)$ is given.

Let us apply the these formulae to the intrinsic equation

$$\theta = a\varphi + b, \tag{169}$$

where a and b are constants. We find

$$I = \frac{a^2}{2(a\varphi + b)^2}, \qquad \theta_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(a\varphi + b).$$

Since θ_1 is a constant, w is a logarithmic function of φ. In fact

$$w = \int \frac{d\varphi}{a\varphi + b} = \frac{1}{a} \log k(a\varphi + b), \qquad \theta = \frac{1}{k} e^{aw}.$$

We also have

$$\{z, w\} = -\theta^2 = -\frac{1}{k^2} e^{2aw}.$$

Therefore z must be a quotient of two independent solutions of

$$\frac{d^2 z}{dw^2} - \frac{1}{2k^2} e^{2aw} z = 0.$$

If we put

$$e^{2aw} = x, \qquad \frac{1}{8a^2k^2} = m,$$

this equation becomes

$$x \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} - mz = 0,$$

which has the series

$$z_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k z^k}{(k!)^2} \tag{170}$$

as one solution and

$$z_2 = z_1 \int \frac{dx}{x z_1^2}$$

as a second independent one. We shall therefore obtain a function with a linear intrinsic equation by putting

$$z = \int \frac{dx}{x z_1^2}, \qquad x = e^{2aw}, \tag{171}$$

and then inverting this relation for w as function of z. The most

general function of this sort will result, of course, if we replace z by a linear fractional function of z.

This example is only one of several in wich Bessel functions or other closely related functions make their appearance.

We return once more to our general theory. From (168) we find

$$\frac{d\log\theta_1}{d\varphi_1} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{I}}}\left(\frac{d\log\theta}{d\varphi} + \frac{1}{2}\frac{d\log\mathrm{I}}{d\varphi}\right],$$

$$\frac{d^2\log\theta_1}{d\varphi_1^2} = \frac{1}{\mathrm{I}}\left(\frac{d^2\log\theta}{d\varphi^2} + \frac{1}{2}\frac{d^2\log\mathrm{I}}{d\varphi^2}\right) - \frac{1}{2\mathrm{I}^2}\frac{d\mathrm{I}}{d\varphi}\left(\frac{d\log\theta}{d\varphi} + \frac{1}{2}\frac{d\log\mathrm{I}}{d\varphi}\right).$$

If we put

$$\mathrm{I}_1 = -\left[\frac{d^2\log\theta_1}{d\varphi_1^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\log\theta_1}{d\varphi_1}\right)^2\right], \tag{172}$$

we find therefore

$$\mathrm{II}_1 = \mathrm{I} - \frac{1}{2}\left[\frac{d^2\log\mathrm{I}}{d\varphi^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{d\log\mathrm{I}}{d\varphi}\right)^2\right]. \tag{173}$$

Thus if I is a constant, an important special case which we shall consider more fully later, I_1 will be equal to 1.

9. *Correspondences defined by the osculating linear function.* — The simplest cogredient which we have found is the pole of the osculating linear function. If z is the point of contact, we have the formula

$$p = z + \frac{a_1}{a_2} = z + 2\frac{w'}{w''}$$

for this point. We now proceed to study the question : as z changes its position in the z—plane, how will p move? Of course, the above equation contains the answer to this question since $w = f(z)$ is a given function of z.

In order to find $\frac{dp}{dz}$ it suffices to differentiate the expression for p. This is done most conveniently by making use of the formula

$$a'_k = (k+1)\,\alpha_k,$$

which we have already employed.

We find

$$p' = 1 + \frac{a_2 a_1' - a_1 a_2'}{a_2^2} = 1 + \frac{2a_2^2 - 3a_1 a_3}{a_2^2} = \frac{3(a_2^2 - a_1 a_3)}{a_2^2},$$

and therefore

$$(174) \qquad p' = \frac{3(a_2^2 - a_1 a_3)}{a_1^2}(p - z)^2 = -\frac{1}{2}\{w, z\}(p - z)^2.$$

On account of the relations between z, p, and b, where a and b are the singularities of the osculating logarithm, we may also write

$$(175) \qquad p' = -\left(\frac{a - p}{a - z}\right)^2 = -\left(\frac{b - p}{b - z}\right)^2.$$

The zero of the osculating linear function was given by

$$(176) \qquad e = z + \frac{a_0 a_1}{a_0 a_2 - a_1^2} = z + \frac{2ww'}{ww'' - 2(w')^2}.$$

We find

$$(177) \qquad e' = -\frac{1}{2}\{w, z\}(e - z)^2,$$

so that p and e are solutions of the same Riccati equation

$$(178) \qquad \frac{d\lambda}{dz} = -\frac{1}{2}\{w, z\}(\lambda - z)^2.$$

Let us denote by l the point where the osculating linear function assumes the given value k. It is a simple matter to write down the expression for l, and to verify that l is also a solution of (178). We note the familiar fact that the cross-ratio of any four solutions of the same Riccati equation is a constant, and obtain the following theorem.

Let k_1, k_2, k_3, k_4 be any four constants, and let l_1, l_2, l_3, l_4 be the four points in which the linear function, which osculates $w = f(z)$ at the point z, assumes the values k_1, k_2, k_3, k_4 respectively. If z moves in any way in the z plane, the four points l_1, l_2, l_3, l_4 will move in such a way as to keep the cross-ratio (l_1, l_2, l_3, l_4) constant and equal to (k_1, k_2, k_3, k_4).

Equations (174) and (177) also show us that *the pole or the zero of the osculating linear function will be a fixed point, that is, the*

same point for all positions of z, if and only if w is itself a linear function of z. The same remark applies to the point l.

If we introduce w or φ as independent variable, in place of z, we may write

$$(179) \qquad \frac{dp}{dw} = -\frac{1}{2}\theta^2(p-z)^2, \qquad \frac{dp}{d\varphi} = -\frac{1}{2}\theta(p-z)^2,$$

giving rise to the new expressions

$$(180) \qquad \theta^2 = \frac{-2\dfrac{dp}{dw}}{(p-z)^2}, \qquad \varphi = \int \frac{i\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{dp}{dw}}\,dw}{p-z},$$

for θ and φ.

If w is given as function of z, we obtain p as a function of z by operations involving differentiations only. If p is given as function of z, w can be found by two quadratures, namely,

$$(181) \qquad w = c_0 + c_1 \int e^{2\int \frac{dz}{p-z}}\,dz.$$

It happens frequently, in the theory of linear differential equations, in the theory of automorphic functions, and in many problems of differential geometry, that $\{w, z\}$ or θ is given as a function of z, or of w, or of φ. The equations (174) and (179) will then be of use in connection with the determination of the corresponding function w. Thus, if $\{w, z\}$ is given as function of z, the Riccati equation (174) will determine p, and w may then be found from (181).

Of course, if one solution, say p, of (178) is known, all other solutions may be found by quadratures. If we apply the familiar formulae of the theory of the Riccati equation, we obtain the following result. *If p is one solution of* (178), *the general solution will be*

$$(182) \qquad \lambda = p + \frac{e^{2\int \frac{p'\,dz}{p-z}}}{c - \int \frac{p'}{(p-z)^2} e^{2\int \frac{p'\,dz}{p-z}}\,dz},$$

where c is an arbitrary constant.

We may write

$$e - z = \frac{\frac{a_1}{a_2}}{1 - \frac{a_1}{a_0}\frac{a_1}{a_2}} = \frac{p - z}{1 - \frac{a_1}{a_0}(p - z)},$$

whence

$$\frac{w'}{w} = \frac{e - p}{(e - z)(p - z)} = \frac{1}{p - z} - \frac{1}{e - z} = \frac{1}{z - e} - \frac{1}{z - p}.$$

If we differentiate both members, making use of (174) and (172), we find

$$\frac{d^2 \log w}{dz^2} = -\frac{1}{(z - e)^2} + \frac{1}{(z - p)^2},$$

whence follows the theorem :

If e and p represent the zero and the pole of the linear function which osculates $w = f(z)$ at the point z, e and p will, in general, be non constant functions of z. But the formulae

$$(183) \qquad \left\{ \begin{aligned} \log w &= \int \left(\frac{1}{z - e} - \frac{1}{z - p} \right) dz, \\ \frac{d \log w}{dz} &= \frac{1}{z - e} - \frac{1}{z - p}, \\ \frac{d^2 \log w}{dz^2} &= -\frac{1}{(z - e)^2} + \frac{1}{(z - p)^2}, \end{aligned} \right.$$

will hold, just as though e and p were constants.

Of course it is understood that, in the first of these equations, the path of integration is specified.

We proceed to make some simple applications. Let $w = e^{az}$. Then

$$(184) \qquad p = z + \frac{2}{a}, \qquad e = z - \frac{2}{a}.$$

Consequently, *the zero and pole of the osculating linear function of an exponential function e^{az} are collinear with the point of contact. They are situated at equal distances on opposite sides of the point of contact, and the mutual distances of the three points remains constant for all positions of the point of contact.*

We may generalize this theorem by subjecting z to a linear trans-

formation. To aid us in making the generalisation we remark that, according to (184), there exists a parabolic linear transformation, namely,

$$z'' = z' + \frac{2}{a},$$

which makes correspond to $z' = z$ and $z' = e$, the points $z'' = p$ and $z'' = z$ respectively. The generalized theorem is as follows.

Consider a function of the form $w = e^{a\frac{z-\lambda}{z-\mu}}$. *If* p *and* ε *are the pole and the zero of the osculating linear function whose point of contact is* z, *the circle determined by* p, ε, *and* z *will pass through* μ, *and all of the circles obtained in this way, for different values of* z, *will have a common tangent at* μ. *The pairs* (ε, p) *and* (z, μ) *will be harmonic. The parabolic linear substitution which has* μ *as its only double point and which makes* p *correspond to* z, *will also make* z *correspond to* ε.

In both of these cases, whenever z describes a circle, p and e will also describe circles. We now ask the general question; how shall we find the most general function $w = f(z)$ such that, when z describes any circle in the z plane the corresponding locus for p is also a circle?

For such functions we must have

$$p = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{185}$$

where α, β, γ, δ are constants, and therefore

$$\frac{w''}{w'} = \frac{2}{p - z} = \frac{2(\gamma z + \delta)}{-\gamma z^2 + (\alpha - \delta) z + \beta}.$$

Assume

$$\gamma \neq 0, \qquad (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma \neq 0.$$

Then we may write

$$\frac{w''}{w'} = \frac{A_1}{z - a_1} + \frac{A_2}{z - a_2},$$

where a_1 and a_2 are the two finite distinct zeros of $-\gamma z^2 + (\alpha - \delta) z + \beta$ which exist in this case, and where we have the equations

$$A_1 + A_2 = -2, \qquad A_1 a_2 + A_2 a_1 = 2\frac{\delta}{\gamma},$$

for A_1 and A_2. We write

$$(186) \qquad A_1 = -1 + \lambda, \qquad A_2 = -1 - \lambda, \qquad \lambda = \frac{a_1 + a_2 + 2\frac{\delta}{\gamma}}{a_2 - a_1},$$

and obtain

$$w = k \int (z - a_1)^{-1+\lambda} (z - a_2)^{-1-\lambda} dz + l,$$

or

$$(187) \qquad w - l = \frac{k}{a_1 - a_2} \left(\frac{z - a_1}{z - a_2} \right)^{\lambda},$$

where k and l are arbitrary constants, and where λ is determined by the coefficients α, β, γ, δ which occur in (185). Evidently we may also regard λ as being assigned in advance, the quantities α, β, γ, δ being determined subject to this condition.

We find

$$\theta = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1}} (a_1 - a_2) \left(\frac{z - a_1}{z - a_2} \right)^{-\lambda}, \qquad \varphi = \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{2}} \log \frac{z - a_1}{z - a_2} + \varphi_0,$$

where the constant φ_0 depends upon the choice of the lower limit of the integral φ, and may be equated to zero if we take specifically

$$\varphi = \int_{\infty}^{z} \sqrt{\{w, z\}}\, dz.$$

Consequently the intrinsic equation of power functions of the form (187) is

$$(188) \qquad \theta = \frac{1 - a_2}{k} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{2}}\, e^{-\lambda \sqrt{\frac{2}{1 - \lambda^2}} (\varphi - \varphi_0)}.$$

In a form more convenient for future reference, we may state this result as follows.

The intrinsic equation of a power function of the form

$$w = l + m \left(\frac{z - a_1}{z - a_2} \right)^{\lambda}, \qquad \lambda^2 \neq 0, \neq 1, \quad a_2 \neq a_1$$

is

$$\theta = a\, e^{-\sqrt{\frac{2\lambda^2}{1 - \lambda^2}} \varphi}.$$

Let us consider now the case

$$\gamma \neq 0, \qquad (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0.$$

We may write

$$\frac{w''}{w'} = \frac{-2\gamma(\gamma z + \delta)}{\gamma^2(z-a)^2} = -\frac{2}{z-a} + \frac{b}{(z-a)^2},$$

whence

$$w = l + m\, e^{-\frac{b}{z-a}}.$$

These are the exponential functions discussed previously, and may be regarded as limiting cases of the functions just obtained.

Finally if $\gamma = 0$, $\alpha - \delta \neq 0$, we have

$$\frac{w''}{w'} = \frac{2\delta}{(\alpha - \delta)z + \beta}, \qquad \delta \neq 0,$$

which may be written

$$\frac{w''}{w'} = \frac{A}{z-a},$$

whence

$$w = l + m(z-a)^{A+1} \qquad \text{if} \qquad A \neq -1,$$

which is again of the form (187) except for differences removable by a linear transformation on z. If $A = -1$ we find a logarithmic function.

The case $\gamma = \alpha - \delta = 0$ is also easily disposed of.

Thus *the functions, for wich p and z are connected by a linear relation, are the power functions of the form*

$$l + m\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)^{\lambda}$$

and the limiting cases in which they become exponentials or logarithms.

These same functions also have the further property that the singularities, a and b, of the osculating logarithm are connected linearly, with each other and with the point of contact. Consequently when z describes a circle, p, a, and b also describe circles.

This property of the points a and b may be deduced easily by making use of the general formulae for a and b. But we shall find an independent proof of this statement later.

The solution of the corresponding problem about the zero of the

osculating linear function is immediate, since e will be the pole of the osculating linear function for the reciprocal function $\frac{1}{w}$. Therefore the functions for which e and z are connected by a linear relation are of the type

$$\frac{1}{l + m\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)^{\lambda}}.$$

We now return to the general theory. We may regard the equation connecting p and w as defining a new function of z, namely

$$w_1 = p = z + 2\frac{w'}{w''},$$

and we may consider the pole $p_1 = w_2$ of *its* osculating linear function, so that

$$w_2 = p_1 = z + 2\frac{w_1'}{w_1''}.$$

If we continue in this way, we obtain a suite of functions, w, w_1, w_2, etc. The following two questions present themselves at once; when will the suite be a terminating one, and when will it be periodic?

The suite will terminate if and only if one of the functions of the suite, say w_k, has a fixed point for the pole of its osculating linear function, that is, if and only if w_k is a linear function,

$$w_k = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

We may then find w_{k-1} by means of two quadratures,

$$w_{k-1} = c_{k-1,0} + c_{k-1,1}\int e^{2\int\frac{dz}{w_k - z}}dz.$$

To determine w_{k-2} we have a similar formula. Thus we obtain finally w as a result of $2k$ quadratures.

The same formulae are, of course, applicable to the case where w_k is any assigned function of z.

The simplest case of a periodic suite is given by $w_1 = w$. In that

case w must satisfy the differential equation

$$(189) \qquad w = z + 2\frac{w'}{w''}, \qquad \text{or} \qquad \frac{w''}{w'} = \frac{2}{w - z},$$

which has a first integral of the form

$$(190\,a) \qquad w' - \log w' = \log k(w - z)^2,$$

or

$$(190\,b) \qquad k(w - z)^2 w' e^{-w'} = 1,$$

where k is an arbitrary constant.

Let us determine the intrinsic equation of such a function. We have

$$\frac{w''}{w'} = \frac{2}{w - z}, \quad \frac{w'''}{w'} - \left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = -\frac{2(w' - 1)}{(w - z)^2},$$

so that

$$\{w, z\} = -\frac{2w'}{(w - z)^2}, \qquad \theta^2 = -\frac{2}{w'(w - z)^2},$$

whence

$$\varphi = \pm \int \frac{i\sqrt{2w'}\,dz}{w - z} = \pm \frac{1}{2} i\sqrt{2} \int \frac{w''\,dz}{\sqrt{w'}} = \pm i\sqrt{2w'} + \varphi_0,$$

so that

$$w' = -\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)^2.$$

From (190 b) we have

$$k(w - z)^2 w' = e^{w'}$$

so that

$$\theta^2 = -2k\,e^{-w'} = -2k\,e^{\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)^2}.$$

If we write $\sqrt{-2k} = a$, $\varphi_0 = -b$ we see that

$$(191) \qquad \theta = a\,e^{\frac{1}{4}(\varphi + b)^2}$$

is the intrinsic equation of a function $w = f(z)$ which has the property that, for every z, the pole of the osculating linear function is given by w.

Of course, as in all cases, we may equate b to zero, the lower limit of the integral invariant φ being selected accordingly. We then

find

$$(192)\qquad \begin{cases} w = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int e^{-\frac{1}{4}\varphi^2}\,d\varphi, & \{w, \varphi\} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8}\varphi^2. \\ \{z, \varphi\} = \{w, \varphi\} - 1 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{8}\varphi^2. \end{cases}$$

The effective determination of these functions depends upon integrating this Schwarzian equation for z as a function of φ. If we apply the method of Art. **4**, according to wich we may replace this problem by an integral equation, we find that the kernel function is equal to

$$K(\varphi, \psi) = e^{\frac{1}{8}(\varphi^2+\psi^2)} \int_{\psi}^{\varphi} e^{-\frac{1}{4}\rho^2}\,d\rho.$$

By means of either method, we see that *both w and z will be uniform functions of φ*. Thus the integral invariant φ is a *uniformizing variable* for functions of this class.

10. *Correspondences defined by the osculating logarithm.* — We now pass to the consideration of some analogous questions connected with the cogredients a and b, the singular points of the osculating logarithm. We have found the equations

$$(193)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a-z} + \dfrac{1}{b-z} = \dfrac{2}{p-z} = \dfrac{2a_2}{a_1}, \\ -\dfrac{1}{a-z} + \dfrac{1}{b-z} = \sqrt{2}\,a_1\theta, \end{cases}$$

in Art. **5**, whence

$$(194)\qquad \begin{cases} \dfrac{2}{a-z} = \dfrac{2a_2}{a_1} - a_1\theta\sqrt{2}, \\ \dfrac{2}{b-z} = \dfrac{2a_2}{a_1} + a_1\theta\sqrt{2}. \end{cases}$$

If we differentiate the first of these equations, we find

$$-\frac{2}{(a-z)^2}\left(\frac{da}{dz} - 1\right) = \frac{6a_3}{a_1} - \frac{4a_2^2}{a_1^2} - 2\sqrt{2}\,a_2\theta - a_1\sqrt{2}\,\theta',$$

which gives rise to the formula

$$(195)\qquad \frac{da}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,w'\theta'(a-z)^2.$$

and similarly

$$\frac{db}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{2}} w'\theta'(b-z)^2. \tag{196}$$

The equation

$$\frac{da}{db} = -\left(\frac{a-z}{b-z}\right)^2, \tag{197}$$

which follows from (195) and (196), is especially simple and frequently useful. It is fundamental when we attempt to determine a function $w = f(z)$ for which the relation between a and b has been arbitrarily prescribed.

In this connection we note the following formulae, which follow from (193), (195) and (196).

Let a and b denote the singular points of the osculating logarithm of $w = f(z)$. In general a and b are non-constant functions of z. But the equations

$$\left\{\begin{aligned} w &= \int \frac{1}{\theta\sqrt{2}}\left[\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right] dz, \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{1}{\theta\sqrt{2}}\left[\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right], \\ \frac{d^2w}{dz^2} &= \frac{1}{\theta\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{1}{(z-b)^2}\right], \end{aligned}\right. \tag{198}$$

hold, just as though a, b, and θ were constants.

As equations (195) and (196) show, *a and b will be fixed points, provided that they are defined at all, if and only if $w = f(z)$ is itself a logarithmic function of z.*

For the exponential function $w = e^{kz}$ we find again a result of noteworthy simplicity. We have in this case

$$a - z = \frac{1}{k}(1+i), \qquad b - z = \frac{1}{k}(1-i), \qquad a - b = \frac{2}{k}i.$$

Thus, *in the case of the exponential function, the triangle azb is a right isosceles triangle, right angled at z, and its sides are of constant length.* The corresponding theorem about exponentials of the form $e^{k\frac{z-\lambda}{z-\mu}}$ may be obtained from this by projective generalization.

In these cases, just mentioned, both a and b describe circles whenever z moves on a circle. We shall solve the more general problem: *to determine those functions $w = f(z)$, for which a and b are connected by a linear relation with constant coefficients, so that whenever a describes a circle, b will also describe a circle.*

Let

$$mab + na + pb + q = 0, \tag{199}$$

where m, n, p, and q are constants, and

$$np - mq \neq 0,$$

be the given relation between a and b. We may assume

$$np - mq = 1 \tag{200}$$

without any restriction of generality. We find from (199)

$$(mb + n)\,da + (ma + p)\,db = 0, \tag{201}$$

and from (197)

$$(b - z)^2\,da + (a - z)^2\,db = 0. \tag{202}$$

If da and db are not both zero, that is, if our function $w = f(z)$ does not reduce to a logarithmic function, the consistency of (201) and (202) requires

$$(mb + n)(a - z)^2 - (ma + p)(b - z)^2 = 0. \tag{203}$$

We may write (199) as follows

$$(mb + n)(ma + p) = np - mq = 1,$$

as a result of which (203) becomes, after multiplication by $mb + n$,

$$(mb + n)^2(a - z)^2 = (b - z)^2,$$

whence

$$(mb + n)(a - z) = \pm(b - z).$$

We may choose the signs of m and n, consistent with (200), in such a way as to have

$$(mb + n)(a - z) = b - z.$$

Therefore, *the existence of a linear relation between a and b implies the existence of linear relations between a and z, and between b and z, namely*

$$(204)\qquad \begin{cases} maz + (n+1)a + (p-1)z + q = 0, \\ mbz + (p+1)b + (n-1)z + q = 0. \end{cases}$$

If we compute $\frac{da}{dz}$ and $\frac{db}{dz}$ from these equations, and substitute these values in (195) and (196), we find

$$w'\theta' = \frac{\sqrt{2}(n-p)}{[mz^2 + (n+p)z + q]^2}.$$

On the other hand we have from (198)

$$w'\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{n-p}{mz^2 + (n+p)z + q},$$

so that we find

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{2}{mz^2 + (n+p)z + q} = \frac{2}{m(z-r)(z-s)} = \frac{2}{m(r-s)}\left[\frac{1}{z-r} - \frac{1}{z-s}\right],$$

if we denote by $z - r$ and $z - s$ the factors, supposed distinct, of $mz^2 + (n+p)z + q$. But this leads us back to the functions considered in Art. **9**, for which there exists a linear relation between z and p. Thus, *the functions of the form*

$$l + m\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)^{\lambda},$$

and the exponentials and logarithms which arise from them as limiting cases, are the only ones which have the property in question.

The same class of functions is obtained in answer to the following question. We know that for any analytic function, the two point-pairs (p_1, p_2) and (q_1, q_2) are harmonic, so that the cross-ratio (p_1, p_2, q_1, q_2) is constant and, in fact, equal to -1. But the two cross-ratios

$$(205)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = (p_1, p_2, z, q_1) = \dfrac{z-p_1}{z-p_2}\,\dfrac{q_1-p_2}{q_1-p_1}, \\[2ex] \lambda_2 = (p_1, p_2, z, q_2) = \dfrac{z-p_1}{z-p_2}\,\dfrac{q_2-p_2}{q_2-p_1}, \end{cases}$$

are, in general, not constant. Let us determine those functions for which one of these cross-ratios is a contant.

We find at once

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

so that *the constancy of one of the two cross-ratios*, λ_1 *or* λ_2, *implies that of the other.*

To compute the expressions for λ_1 and λ_2 in terms of a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, we may assume the point of contact z to be the origin. Then we have, according to Art. 4,

$$(206) \qquad q_1 q_2 = \frac{A}{C}, \qquad q_1 + q_2 = \frac{B}{C},$$

where

$$(207) \qquad A = a_1 a_3 - a_2^2, \qquad B = a_1 a_4 - a_2 a_3, \qquad C = a_2 a_4 - a_3^2,$$

and

$$(208) \qquad p_1 = \frac{1}{a_3}(a_2 + i\sqrt{A}), \qquad p_2 = \frac{1}{a_3}(a_2 - i\sqrt{A}).$$

Consequently we find from (205), putting $z = 0$,

$$(209) \qquad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{p_1^2}{p_2^2}\,\frac{A - Bp_2 + Cp_2^2}{A - Bp_1 + Cp_1^2} = \frac{P + iQ\sqrt{A}}{P - iQ\sqrt{A}},$$

where

$$(210) \qquad P = a_2 Q + a_1(Ca_1 - Aa_3), \qquad Q = 2Aa_2 - Ba_1,$$

so that

$$(211) \qquad \left(\frac{1 - \lambda_1\lambda_2}{1 + \lambda_1\lambda_2}\right)^2 = -\frac{AQ^2}{P^2}.$$

In the case under consideration $\frac{AQ^2}{P^2}$ *must be a constant.*

If we put $\{w, z\} = \sigma$, we find

$$(212) \qquad A = \frac{1}{6}a_1^2\sigma, \qquad B = \frac{1}{6}a_1 a_2 \sigma + \frac{1}{24}a_1^2\sigma',$$

$$C = -\frac{1}{36}a_1^2\sigma^2 + \frac{1}{24}a_1 a_2 \sigma',$$

so that

$$(213) \qquad P = -\frac{1}{18}a_1^4\sigma^2, \qquad Q = \frac{1}{24}a_1^2(4a_2\sigma - a_1\sigma').$$

Consequently the above condition reduces to

$$\frac{a_1 \sigma^{\frac{3}{2}}}{4 a_2 \sigma - a_1 \sigma'} = l = \text{const.} \tag{214}$$

But we have

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{a_1} = \theta, \qquad \frac{1}{2}\frac{\sigma'}{\sigma} - 2\frac{a_2}{a_1} = \frac{\theta'}{\theta}.$$

If we substitute these values in (214) and integrate, we find

$$\theta = \frac{2l}{w - a},$$

where a is an arbitrary constant. Therefore we find further

$$-\{z, w\} = \frac{\{w, z\}}{(w')^2} = \theta^2 = \frac{4l^2}{(w-a)^2}.$$

But we have

$$\{w^k, w\} = \frac{1 - k^2}{2w^2}.$$

Consequently one solution of the above differential equation for z, is

$$z = (w - a)^k,$$

where

$$k^2 = 1 + 8l^2.$$

Since l was an arbitrary constant, the exponent k may have any value. Moreover, the differential equation is invariant under linear transformations upon z. We obtain again, therefore, the functions of the form

$$a + \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)^r$$

with an arbitrary constant exponent r, in harmony with our original statement.

These same functions arise also if we demand that the cross-ratio (z, p, q_1, q_2) shall be constant, but we refrain from giving the proof. In the particular case when $Q = 0$, we find $(z, p, q_1, q_2) = -1$, and the function w reduces to a logarithmic function.

XI. — Functions for which the quadratic satellite of the point of contact is fixed.

The quadratic satellite τ of the point z was defined in Art. 4 as the harmonic conjugate of z with respect to q_1 and q_2, the poles of the osculating quadratic. We propose to obtain the formula for $\frac{d\tau}{dz}$ and, in particular, discuss briefly the cases when τ is a constant.

We have

$$\tau = z + \frac{2q_1q_2}{q_1+q_2} = z + 2\frac{A}{B} = z + 8\frac{A}{A'}; \tag{215}$$

where we are using again the notations (207) and the further relation

$$A' = 4B. \tag{216}$$

If we differentiate (215), we find

$$\tau' = \frac{9(A')^2 - 8AA''}{(A')^2}, \qquad \text{assuming} \qquad A' \neq 0. \tag{217}$$

This formula may be written in a number of other ways, namely

$$\left(\frac{A'}{A}\right)^2 \tau' = -32(w')^2\theta^2 - 16\left[\frac{\theta''}{\theta} - \frac{5}{4}\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2\right] + 16\frac{w''}{w'}\frac{\theta'}{\theta}, \tag{218}$$

or

$$\left(\frac{d\log A}{dw}\right)^2 \frac{d\tau}{dz} = -16\left[\frac{1}{\theta}\frac{d^2\theta}{dw^2} - \frac{5}{4\theta^2}\left(\frac{d\theta}{dw}\right)^2 + 2\theta^2\right], \tag{219}$$

which may be written

$$\left(\frac{d\log A}{dw}\right)^3 \frac{d\tau}{dz} = -4\left[8\theta^2 - 4I\theta^2 + \left(\frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dw}\right)^2\right], \tag{220}$$

since

$$I = -\frac{1}{\theta^2}\left[\frac{d^2\log\theta}{dw^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\log\theta}{dw}\right)^2\right] = -\left[\frac{d^2\log\theta}{d\varphi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\log\theta}{d\varphi}\right)^2\right]. \tag{221}$$

Finally we may write

$$\left(\frac{d\log A}{dw}\right)^2 \frac{d\tau}{dz} = -4\theta^2\left[8 - 4I + \left(\frac{d\log\theta}{d\varphi}\right)^2\right]. \tag{222}$$

If τ is a fixed point, we have $\tau' = 0$. Let us assume that $\theta \not\equiv 0$, so that $w = f(z)$ is not a linear function, and also that A is not a constant. Then we must have

$$8 + \left(\frac{d \log \theta}{d\varphi}\right)^2 - 4\mathrm{I} = 0. \tag{223}$$

The integration of this equation will give us the intrinsic equations of the functions under consideration.

Let us put

$$u = \frac{d \log \theta}{d\varphi}, \qquad \mathrm{I} = -\left(\frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{2}u^2\right), \tag{224}$$

so that (223) becomes

$$\frac{du}{d\varphi} + \frac{3}{4}u^2 + 2 = 0. \tag{225}$$

This equation has two constant solutions, namely

$$u = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}\, i,$$

leading to the intrinsic equations

$$\theta = k\, e^{\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}\, i\varphi}. \tag{226}$$

According to (188) the corresponding function is a power function whose exponent λ is equal to ± 2. That is, the functions which correspond to the intrinsic equations of form (226) are rational functions of z of degree two, whose two poles coincide. It is quite evident that quadratic functions of this sort must be solutions of our problem; the fixed point τ in this case coincides with the two coincident poles of the function.

If u is not a constant, we conclude from (225) by integration, that

$$u = \frac{2}{3}\sqrt{6} \cot \frac{\sqrt{6}}{2}(\varphi - m), \tag{227}$$

and

$$\theta = n \sin^{\frac{4}{3}} \frac{\sqrt{6}}{2}(\varphi - m), \tag{228}$$

where m and n are arbitrary constants, and where m may be equated to zero without essential loss of generality.

Let us return to equation (217). If $A' \neq 0$, $\tau' = 0$, we have

$$9\frac{A'}{A} - 8\frac{A''}{A'} = 0,$$

whence follows

$$A = (kz + l)^{-8}, \tag{229}$$

where k and l are arbitrary constants, and this formula also applies to the case $A' = 0$ by putting $k = 0$. If now we make a linear transformation of the independent variable

$$\bar{z} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

and compute the resulting value of A, which we shall call $\bar{A}$, we find

$$\bar{A} = \frac{(\gamma z + \delta)^8 A}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = \frac{(\gamma z + \delta)^8 (kz + l)^{-8}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}. \tag{230}$$

Since α, β, γ, δ are at our disposal, we may clearly choose them in such a way as to make $\bar{A}$ become a constant, any nonvanishing constant in fact if $A \neq 0$, that is, if w is not a linear function of z. Equation (215) tells us that this transformation has the effect of removing the fixed point τ to infinity.

Let us then assume that this transformation has been made, so that

$$A = a_1 a_3 - a_2^2 = a = \text{const.}, \tag{231}$$

and therefore

$$B = \frac{1}{4} A' = a_1 a_4 - a_2 a_3 = 0. \tag{232}$$

These equations may be written

$$w' w''' - \frac{3}{2}(w'')^2 = a, \qquad w' w^{iv} - 2 w'' w''' = 0. \tag{233}$$

These equations are satisfied by $w''' = 0$, $w'' = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}a}$, which

corresponds to the special case mentioned above, when w is a quadratic function with coincident poles. In all other cases, we may write in place of the second equation (233),

$$\frac{w^{(4)}}{w'''} - 2\frac{w''}{w'} = 0,$$

whence

$$w''' = b(w')^2, \qquad b \neq 0.$$

If we substitute this value for w''' in (233), we find

$$(w'')^2 = \frac{2}{3}[b(w')^3 - a].$$

We saw that it involved no essential restriction of generality to assume any convenient value for the constant a. Let us therefore put $a = b$, so that we obtain

$$(234) \qquad \left(\frac{dw'}{dz}\right)^2 = \frac{2}{3}a[(w')^3 - 1] = \frac{a}{6}[4(w')^3 - 4].$$

Consequently w' is a doubly periodic function of z, which is easily expressible in terms of the Weierstrass $\wp$ function, with the invariants $g_2 = 0$, $g_3 = 4$, namely

$$(235) \qquad w' = \wp\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\, z + k\right),$$

where k is an arbitrary constant. Since $g_2 = 0$, these elliptic functions belong to the equi-anharmonic case. But we have

$$(236) \qquad \wp(u) = -\frac{d\zeta(u)}{du} = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2},$$

where ζ and σ are the Weierstrassian ζ and σ functions. Therefore we find from (235)

$$(237) \qquad w = -\sqrt{\frac{6}{a}}\,\zeta\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\, z + k\right) + l.$$

We have obtained the following result. *The functions for which the quadratic satellite of the point of contact is a fixed point, are either quadratic functions with coincident poles, or else they can be obtained from a linear combination like* $m\zeta(u) + l$, *where* $\zeta(u)$

is an equi-anharmonic Weierstrass ζ function, by equating u to any linear function of z.

XII. — Enlargement of the group.

So far we have been engaged in studying the effect, upon the function $w = f(z)$, of linear transformations of the independent variable z. If we consider instead linear transformations of the dependent variable w, we obtain nothing essentially new. For we may regard all questions of this king as being connected with linear transformations of the *independent* variable for the *inverse* function $z = f^{-1}(w)$. Moreover, the analytic form which these results would assume may also be regarded as familiar, since the Schwarzian derivative will be the fundamental differential invariant for all such transformations.

We do obtain something essentially new however, if we consider the effect of linear transformations upon both variables at the same time. Let us, therefore, consider the group of transformations of the form

$$\bar{z} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \bar{w} = \frac{a w + b}{c w + d}, \tag{238}$$

where α, β, γ, δ, a, b, c, d are arbitrary constants. This group is clearly a six-parameter group.

The integral

$$\varphi = \int \sqrt{\{w, z\}}\, dz \tag{239}$$

evidently maintains its invariant character under all of the transformations of our enlarged group. The same thing is *not* true however of θ. We have, from (238),

$$d\bar{z} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2} dz, \qquad d\bar{w} = \frac{ad - bc}{(cw + d)^2} dw, \tag{240}$$

and from (130)

$$\{\bar{w}, \bar{z}\} = \frac{(\gamma z + \delta)^4}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} \{w, z\}. \tag{241}$$

According to (240) we have

$$\frac{\overline{dw}}{dz} = \frac{ad - bc}{\alpha\delta - \beta\gamma}\left(\frac{\gamma z + \delta}{cw + d}\right)^2 \frac{dw}{dz},$$

so that

$$\bar{\theta} = \pm \frac{(cw + d)^2}{ad - bc}\,\theta. \tag{242}$$

From this equation we find

$$\frac{d \log \bar{\theta}}{d\bar{w}} = \left[\frac{d \log \theta}{dw} + \frac{2c}{cw + d}\right]\frac{(cw + d)^2}{ad - bc},$$

$$\frac{d^2 \log \bar{\theta}}{d\bar{w}^2} = \left[\frac{d^2 \log \theta}{dw^2} + \frac{2c}{cw + d}\,\frac{d \log \theta}{dw} + \frac{2c^2}{(cw + d)^2}\right]\frac{(cw + d)^4}{(ad - bc)^2},$$

whence we conclude that the function

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{\theta^2}\left[\frac{d^2 \log \theta}{dw^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log \theta}{dw}\right)^2\right] \tag{242}$$

is an absolute differential invariant of the enlarged group (238). This function has already presented itself to our attention, and we recall two other forms in which is may be written :

$$\mathrm{I} = -\left[\frac{d^2 \log \theta}{d\varphi^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{d \log \theta}{d\varphi}\right)^2\right], \tag{243}$$

and

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{(w')^2\theta^2}\left[\frac{d^2 \log \theta}{dz^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log \theta}{dz}\right)^2 - \frac{w''}{w'}\,\frac{\theta'}{\theta}\right]. \tag{244}$$

We observe that I is a differential invariant of the fifth order and that there exists no differential invariant of the combined transformations (238) which is of lower order. We express this briefly by speaking of I as the *fundamental differential hyperinvariant* of $w = f(z)$.

We shall speak of the relation which expresses I as a function of φ, as the *hyperintrinsic equation* of the function $w = f(z)$. This hyperintrinsic equation will be the same for all functions which can be obtained from $w = f(z)$ by all of the transformations of our six-parameter group. Moreover it is evident that, whenever I is given as an arbitrary analytic function of φ, we can always assert the existence of infinitely many functions $w = f(z)$ which correspond to the given hy-

perintrinsic equation, and that all of these functions are transformable into each other by means of transformations of the group (238). We can even be more specific in our statement. If we have given the hyperintrinsic equation

$$\mathrm{I} = \mathrm{G}(\varphi) \tag{245}$$

and if we put

$$u = \frac{d \log \theta}{d\varphi}, \tag{246}$$

we find from (245)

$$\frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{2} u^2 = -\mathrm{I} = -\mathrm{G}(\varphi), \tag{247}$$

so that u may be found by integrating an equation of the Riccati type. We then find φ from (246) by a quadrature. Thus, *if the hyperintrinsic equation of a function is given, its intrinsic equation may be found by integrating an equation of the Riccati form, and a quadrature.* The methods for obtaining the function $w = f(z)$ itself have been discussed previously.

However, the most symetrical solution of our problem is as follows. *To find the functions $w = f(z)$ whose hyperintrinsic equation is $\mathrm{I} = \mathrm{G}(\varphi)$, integrate the two Schwarzian differential equations*

$$\{w, \varphi\} = \mathrm{I}, \qquad \{z, \varphi\} = \mathrm{I} - 1 \tag{248}$$

and then eliminate φ.

The familiar connection between Schwarzian equations and linear differential equations of the second order enables us to draw some simple but far-reaching conclusions.

Let W_1 and W_2 be two linearly independent solutions of the linear differential equation

$$\frac{d^2\mathrm{W}}{d\varphi^2} + \frac{1}{2}\mathrm{I}\mathrm{W} = 0. \tag{249}$$

Then $\frac{\mathrm{W}_2}{\mathrm{W}_1}$ will be a solution of the first equation (248) and any solution of the latter equation will be a linear fractional function of $\frac{\mathrm{W}_2}{\mathrm{W}_1}$. Simi-

larly, any linear function of $\frac{Z_2}{Z_1}$, where Z_1 and Z_2 are independent solutions of

$$\frac{d^2 Z}{d\varphi} + \frac{1}{2}(I - 1) Z = 0. \tag{250}$$

will be a solution of the second equation (248).

Let us consider now the case when $I = G(\varphi)$ is an integral, rational or transcendental, function of φ. Then w_1, w_2, z_1, z_2 will also be integral functions of φ, and therefore w and z will be uniform meromorphic functions of φ. Of course, in special cases, these functions may even be holomorphic. We have obtained the following theorem.

If a function $w = f(z)$ has the property that its fundamental, hyperinvariant I is an integral (rational or transcendental) function of the integral invariant φ, then this integral invariant is a uniformizing variable for the functional relation $w = f(z)$. More specifically, w and z will both be holomorphic or meromorphic functions of φ.

In all cases the two linear differential equations (249) and (250) are very closely related. They have the same singular points, and at each of these singular points, the canonical fundamental solutions have the same exponents.

Let us denote the inverse function of $w = f(z)$ by $z = f^{-1}(w)$, and let $\bar{\varphi}$, $\bar{\theta}$, $\bar{I}$ be the corresponding invariants. We shall then have

$$\{z, \bar{\varphi}\} = \bar{I}, \quad \{w, \bar{\varphi}\} = \bar{I} - 1, \tag{251}$$

and

$$d\bar{\varphi}^2 = \{z, w\} dw^2 = -\{w, z\} dz^2 = -d\varphi^2,$$

so that

$$d\bar{\varphi}^2 + d\varphi^2 = 0. \tag{252}$$

Consequently we find

$$\{z, \bar{\varphi}\} = \{z, \varphi\} \left(\frac{d\varphi}{d\bar{\varphi}}\right)^2 = -\{z, \varphi\}, \qquad \{w, \bar{\varphi}\} = -\{w, \varphi\}. \tag{253}$$

From these equations, we conclude

$$-\{z, \varphi\} = \bar{\mathrm{I}} = 1 - \mathrm{I}, \qquad -\{w, \varphi\} = \bar{\mathrm{I}} - 1 = -\mathrm{I},$$

whence

$$\bar{\mathrm{I}} + \mathrm{I} = 1. \tag{254}$$

Therefore, *the fundamental hyperinvariants of two inverse functions have unity for their sum.* Consequently the inverse of any function whose hyperintrinsic equation is $\mathrm{I} = \mathrm{G}(\varphi)$, will have a hyperintrinsic equation of the form $1 - \bar{\mathrm{I}} = \mathrm{G}(\pm i\bar{\varphi})$.

We proceed to determine those functions for which the hyperinvariant I is a constant. In that case the Riccati equation (247) is easily integrated. It becomes

$$2\frac{du}{d\varphi} = -(u^2 + \lambda^2), \tag{255}$$

if we put

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\lambda^2 = \text{const.} \tag{256}$$

We conclude

$$d\varphi = \frac{-2\,du}{u^2 + \lambda^2}, \tag{257}$$

unless u should be a constant, equal to $\pm i\lambda$, in which case the right member would be indeterminate. This special case, $u = \pm i\lambda$, leads to the intrinsic equation

$$\theta = e^{\pm i\lambda\varphi + \mu}, \tag{258}$$

which we have discussed many times, and to which correspond the power functions of the form

$$w = l + \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)^r.$$

If u is not a constant, the integration of (257) gives

$$\frac{d\log\theta}{d\varphi} = u = -\lambda\tan\frac{\lambda}{2}(\varphi + \mu), \tag{259}$$

where μ is a constant. A further integration gives

$$\theta = \nu \cos^2 \frac{\lambda}{2}(\varphi + \mu), \tag{260}$$

where ν is a further constant, as *the intrinsic equation of all of those functions for which* I *is a constant while u is not a constant.*

The corresponding functions are again power functions, but of the more general form defined by

$$\frac{aw+b}{cw+d} = \left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)^r, \tag{261}$$

where the exponent r is connected with the hyperinvariant I *by means of the equation*

$$\mathrm{I} = \frac{r^2}{r^2-1}, \qquad r^2 = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}-1}. \tag{262}$$

This may be proved either by starting from the intrinsic equation (260) and integrating it, or more easily, by observing that I will take the constant value given by (262) when we put $w = z^r$, and remembering, that all functions obtainable from $w = z^r$ by the transformations of our six parameter group, have the same hyperintrinsic equation.

Formula (261) becomes unintelligible when I is equal to zero or unity. However in these cases we see directly, from (248), that either

$$\frac{aw+b}{cw+d} = \log\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \tag{263}$$

or

$$\frac{aw+b}{cw+d} = e^{\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}}, \tag{264}$$

and these functions may be regarded as included in (261) as limiting cases.

If $r = \pm 2$, w is a rational quadratic function of z, so that we find

$$\mathrm{I} = \frac{4}{3} \tag{265}$$

as the hyperintrinsic equation of all quadratic functions. The

intrinsic equation of a quadratic function is either of the form

$$\theta = e^{\pm 2i\sqrt{\frac{2}{3}}(\varphi+\mu)}, \tag{266}$$

or

$$\theta = \nu \cos^2 \sqrt{\frac{2}{3}}(\varphi + \mu). \tag{267}$$

The quadratic functions which correspond to (266) *have coincident poles, while those which correspond to* (267) *have distinct poles.*

The differential equation of all quadratic functions, which we found in Art. 4 in the form $c_3 = 0$, is of course equivalent to (265), and may therefore be written in any of the following forms :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2 \log\theta}{d\varphi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\log\theta}{d\varphi}\right)^2 + \frac{4}{3} = 0,\\
&\frac{d^2\theta}{dw^2} - \frac{3}{2\theta}\left(\frac{d\theta}{dw}\right)^2 + \frac{4}{3}\theta^3 = 0,\\
&\frac{\theta''}{\theta} - \frac{3}{2}\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 + \frac{4}{3}\theta^2(w')^2 - \frac{\theta'}{\theta}\frac{w''}{w'} = 0,\\
&\frac{\sigma''}{\sigma} - \frac{5}{4}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 + \frac{2}{3}\sigma = 0,\\
&\sigma = \sqrt{w'}, \ \theta = \sigma^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}\right. \tag{268}$$

We shall henceforth speak of the functions defined by (261) as *general* power functions, and use the word *special* power function for those of the form

$$w = l + \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)^r.$$

If a, c, α and γ are all different from zero, we may write the defining equation (261), of a general power function, in the form

$$\frac{w - \lambda}{w - \mu} = M\left(\frac{z - \rho}{z - \sigma}\right)^r, \tag{269}$$

and, unless r is an integer, w will be a multiform function of z, which has $z = \rho$ and $z = \sigma$ as its only branch points. The inverse function will be a multiform function unless $\frac{1}{r}$ is an integer, and will have λ

and μ as its only branch points. If not all of the numbers a, c, α, γ are different from zero, the corresponding branch point is at infinity, and the usual changes in the form of (269) should be made.

We shall use the term *branchpoint* for each of the points ρ, σ, λ, μ in all cases, even if r or $\frac{1}{r}$ is an integer. We may then characterize the *special* power functions as being those for which the inverse function has one of its branchpoints at infinity.

XIII. — The osculating power function.

We have studied in detail the functions for which I is a constant. There are number of other interesting cases in which the equations (248) admit of explicit integration. In general those cases in which the corresponding Riccati equations are integrable by quadratures, lead to functions connected with Bessel functions. But we prefer not to develop this theory any farther, at present. We shall show instead, how to determine the osculating power function, that is, the function of the form

$$\frac{w-\lambda}{w-\mu} = \mathrm{M}\left(\frac{z-\rho}{z-\sigma}\right)^r, \tag{269}$$

which has contact of the fifth order with a given function $w = f(z)$ at a given point. Of course, we may again, without essential loss of generality, assume that the origin $z = 0$ is the point of contact.

Let us write (269) as follows

$$\mathrm{W} = \mathrm{M}\mathrm{Z}^r, \qquad \mathrm{Z} = \frac{z-\rho}{z-\sigma}, \qquad \mathrm{W} = \frac{w-\lambda}{w-\mu}, \tag{270}$$

so that

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\mathrm{M}r(\rho-\sigma)}{\lambda-\mu}\mathrm{Z}^{r-1}\left(\frac{w-\mu}{z-\sigma}\right)^2, \tag{271}$$

and

$$\frac{\dfrac{d^2w}{dz^2}}{\dfrac{dw}{dz}} = \frac{(r-1)(\rho-\sigma)}{\mathrm{Z}(z-\sigma)^2} + \frac{2\dfrac{dw}{dz}}{w-\mu} - \frac{2}{z-\sigma}. \tag{272}$$

From the general properties of the Schwarzian derivative we have,

$$(273)\quad \begin{cases} \{w, z\} = \{W, z\} = \{Z^r, z\} = \left(\dfrac{dZ}{dz}\right)^2 \{Z^r, Z\} = \dfrac{(\rho-\sigma)^2}{(z-\sigma)^4} \{Z^r, Z\}, \\ \{Z^r, Z\} = -\dfrac{1}{2}(r^2-1)Z^{-2}, \end{cases}$$

so that

$$(274)\qquad \{w, z\} = \frac{(1-r^2)(\rho-\sigma)^2}{2(z-\rho)^2(z-\sigma)^2},$$

and

$$(275)\qquad \frac{\{w, z\}'}{\{w, z\}} = -\frac{2}{z-\rho} - \frac{2}{z-\sigma}.$$

If (269) defines that power function which osculates the function

$$(276)\qquad w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

at $z = 0$, the expressions (271) to (275) must reduce for $z = 0$ to the corresponding expressions formed for the function (276), which we now refer to as the function w. Therefore we must have

$$(277)\quad \begin{cases} \{w, z\}_0 = \theta_0^2 (w_0')^2 = \dfrac{1}{2}(1-r^2)\left(\dfrac{\rho-\sigma}{\rho\sigma}\right)^2, \\ \dfrac{\theta_0'}{\theta_0} + \dfrac{w_0''}{w_0'} = \dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{\sigma}, \end{cases}$$

and, of course, the hyperinvariant I must assume the same value for $z = 0$ for both functions, so that

$$(278)\qquad r^2 = \frac{I_0}{I_0 - 1}.$$

We may re-write (277) as follows:

$$\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sigma}\right)^2 = 2(1 - I_0)(w_0' \theta_0)^2,$$

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\sigma} = \frac{w_0''}{w_0'} + \frac{\theta_0'}{\theta_0},$$

so that we find the equations

$$(279)\quad \begin{cases} \dfrac{2}{\rho} = \dfrac{w_0''}{w_0'} + \dfrac{\theta_0'}{\theta_0} + w_0' \theta_0 \sqrt{2(1 - I_0)}, \\ \dfrac{2}{\sigma} = \dfrac{w_0''}{w_0'} + \dfrac{\theta_0'}{\theta_0} - w_0' \theta_0 \sqrt{2(1 - I_0)}. \end{cases}$$

where a change in the determination of the square root would be equivalent to a mere change of notation. If we substitute these values in (270), (271) and (272), we find the equations

$$(280)\qquad \begin{cases} \dfrac{2w'_0}{w_0-\mu} = -\dfrac{\theta'_0}{\theta_0} + w'_0\theta_0\sqrt{-2I_0}, \\[2ex] \dfrac{2w'_0}{w_0-\lambda} = -\dfrac{\theta'_0}{\theta_0} - w'_0\theta_0\sqrt{-2I_0}, \end{cases}$$

for the determination of λ and μ, the branchpoints of the inverse of the osculating power function, and finally

$$(281)\qquad M = \frac{w_0-\lambda}{w_0-\mu}\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^r,$$

or

$$(282)\quad M = \frac{-\dfrac{\theta'_0}{\theta_0} + w'_0\theta_0\sqrt{-2I_0}}{-\dfrac{\theta'_0}{\theta_0} - w'_0\theta_0\sqrt{-2I_0}}\left[\frac{\dfrac{w''_0}{w'_0} + \dfrac{\theta'_0}{\theta_0} + w'_0\theta_0\sqrt{2(1-I_0)}}{\dfrac{w''_0}{w'_0} + \dfrac{\theta'_0}{\theta_0} - w'_0\theta_0\sqrt{2(1-I_0)}}\right]^{\sqrt{\frac{I_0}{I_0-1}}}.$$

Let us omit the index 0 in our further formulae. The quadratic satellite of $z = 0$ was given by

$$\tau = \frac{2q_1q_2}{q_1+q_2} = 2\frac{a_1a_3-a_2^2}{a_1a_4-a_2a_3} = \frac{8A}{A'},$$

where

$$A = a_1a_3 - a_2^2 = \frac{1}{6}(w')^2\{w, z\} = \frac{1}{6}(w')^4\theta^2,$$

so that

$$\frac{A'}{A} = 4\frac{w''}{w'} + 2\frac{\theta'}{\theta},$$

and consequently

$$\frac{4}{\tau} = 2\frac{w''}{w'} + \frac{\theta'}{\theta}.$$

We also have

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2}\frac{w''}{w'}$$

if p is the pole of the osculating linear function, so that

$$\frac{4}{\tau} - \frac{2}{p} = \frac{w''}{w'} + \frac{\theta'}{\theta}.$$

Consequently we find, from (277),

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\sigma}=\frac{4}{\tau}+\frac{2}{p}. \tag{283}$$

Let ψ be the harmonic conjugate of $z=0$ with respect to ρ and σ, so that

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\sigma}=\frac{2}{\psi}. \tag{284}$$

We find, from (283) and (284),

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{\psi}=\frac{2}{\tau}, \tag{285}$$

and therefore the following theorem.

Construct the harmonic conjugate ψ, of the pole of the osculating linear function, with respect to the point of contact and its quadratic satellite. Then the branchpoints, ρ and σ, of the osculating power function will be harmonic conjugates of each other with respect to ψ and the point of contact.

If the point of contact is a general point z, instead of $z=0$, we have in place of (279),

$$\left\{\begin{aligned}\frac{2}{\rho-z}&=\frac{w''}{w'}+\frac{\theta'}{\theta}+w'\theta\sqrt{2(1-I)},\\ \frac{2}{\sigma-z}&=\frac{w''}{w'}+\frac{\theta'}{\theta}+w'\theta\sqrt{2(1-I)},\end{aligned}\right. \tag{286}$$

whence

$$w'=\frac{1}{\theta\sqrt{2(1-I)}}\left(\frac{1}{z-\sigma}-\frac{1}{z-\rho}\right), \tag{287}$$

and

$$w=\int\frac{1}{\theta\sqrt{2(1-I)}}\left(\frac{1}{z-\sigma}-\frac{1}{z-\rho}\right)dz, \tag{288}$$

a formula which, like the corresponding integral formulae for w in terms of p and e, or in terms of a and b, is capable of interesting applications.

We wish to study however, the variation of ρ and σ with z. Diffe-

rentiation of (286) gives

$$-\frac{2}{(\rho-z)^2}(\rho'-1)=\frac{w'''}{w'}-\left(\frac{w''}{w'}\right)^2+\frac{d^2\log\theta}{dz^2}+w''\theta\sqrt{2(1-\mathrm{I})}$$
$$+w'\frac{d\theta}{dz}\sqrt{2(1-\mathrm{I})}+\frac{1}{2}w'\theta\left(\frac{-2\mathrm{I}'}{\sqrt{2(1-\mathrm{I})}}\right),$$

whence

$$-\frac{4\rho'}{(\rho-z)^2}=2(w')^2\theta^2\mathrm{I}+2\frac{d^2\log\theta}{dz^2}-\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2-2\frac{w''}{w'}\frac{\theta'}{\theta}-\frac{2w'\theta\mathrm{I}'}{\sqrt{2(1-\mathrm{I})}}.$$

If we make use of the equation which defines I, this reduces to

$$\frac{1}{(\rho-z)^2}\frac{d\rho}{dz}=\frac{w'\theta\mathrm{I}'}{2\sqrt{2(1-\mathrm{I})}}, \tag{289}$$

and similarly

$$\frac{1}{(\sigma-z)^2}\frac{d\sigma}{dz}=-\frac{w'\theta\mathrm{I}'}{2\sqrt{2(1-\mathrm{I})}}. \tag{290}$$

If we leave aside the cases $w'=0$ and $\theta=0$, in which ρ and σ are not defined, we may say, therefore, that *neither of the branchpoints of the osculating power function of $w=f(z)$ can be a fixed point, unles $f(z)$ is itself a power function.*

If we introduce φ as independant variable, we find

$$\frac{1}{(\rho-z)^2}\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{w'\theta\dfrac{d\mathrm{I}}{d\varphi}}{2\sqrt{2(1-\mathrm{I})}},\qquad \frac{1}{(\sigma-z)^2}\frac{d\sigma}{d\varphi}=-\frac{w'\theta\dfrac{d\mathrm{I}}{d\varphi}}{2\sqrt{2(1-\mathrm{I})}}. \tag{291}$$

Finally we note the formulae

$$\frac{1}{(\rho-z)^2}\frac{d\rho}{d\varphi}+\frac{1}{(\sigma-z)^2}\frac{d\sigma}{d\varphi}=0,\qquad \frac{d\rho}{d\sigma}=-\left(\frac{\rho-z}{\sigma-z}\right)^2. \tag{292}$$

Let us consider *those functions for which ρ and σ are connected by a linear relation with constant coefficients*

$$m\rho\sigma+n\rho+p\sigma+q=0, \tag{293}$$

where we may assume

$$np-mq=1. \tag{294}$$

We find, as in the corresponding investigation for the singular

points of the osculating logarithm (Art. **10**), that *there will then exist linear relations with constant coefficients also between* ρ *and* z, *and between* σ *and* z, namely

$$(295)\qquad \begin{cases} m\rho z + (n+1)\rho + (p-1)z + q = 0, \\ m\sigma z + (p+1)\sigma + (n-1)z + q = 0. \end{cases}$$

From the first of these relations, we find

$$[mz + n + 1]\,d\rho + [m\rho + p - 1]\,dz = 0,$$

whence

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{n-p}{(mz+n+1)^2}, \qquad \rho - z = -\frac{mz^2 + (n+p)z + q}{mz + n + 1},$$

so that we find, from (289),

$$(296)\qquad \frac{n-p}{[mz^2 + (n+p)z + q]^2} = \frac{w'\theta \mathrm{I}'}{2\sqrt{2(1-\mathrm{I})}}.$$

From (287) we find

$$(297)\qquad \frac{n-p}{mz^2 + (n+p)z + q} = -w'\theta\sqrt{2(1-\mathrm{I})}.$$

Elimination of z gives

$$(298)\qquad (1-\mathrm{I})^{-\frac{3}{2}}\,d\mathrm{I} = \frac{4\sqrt{2}}{n-p}\,d\varphi,$$

and therefore

$$(299)\qquad \frac{2\sqrt{2}}{n-p}(\varphi - \varphi_0)\sqrt{(1-\mathrm{I})} = 1$$

as the hyperintrinsic equation of these functions, when $n - p \neq 0$.

The case $n = p$ leads to $\frac{d\rho}{dz} = 0$ and therefore corresponds to the case $\mathrm{I} = \text{const.}$, when the function reduces to a power function.

We also find from (296) and (297), by division,

$$(300)\qquad \frac{\mathrm{I}'}{4(1-\mathrm{I})} = -\frac{1}{mz^2 + (n+p)z + q}.$$

If $(n+p)^2 - 4mq \neq 0$, and if we denote by $z - r$ and $z - s$ the linear factors of $mz^2 + (n+p)z + q$, distinct under this hypothesis,

we find

$$(301) \qquad 1 - I = C\, e^{\left(\frac{z-r}{z-s}\right)^{\frac{1}{m(r-s)}}}, \qquad r \neq s, \qquad m \neq 0.$$

If $(n+p)^2 - 4mq = 0$, and $m \neq 0$, we may write

$$mz^2 + (n+p)\,z + q = m(z-r)^2,$$

and we find instead

$$(302) \qquad 1 - I = C\, e^{-\frac{1}{m(z-r)}}.$$

Finally, if $m = 0$, we find

$$(303) \qquad 1 - I = C(z-k)^{\frac{1}{n+p}}, \qquad k = \frac{-q}{n+p}, \qquad n+p \neq 0,$$

and if $n+p$ is also equal to zero,

$$(304) \qquad 1 - I = C\, e^{\frac{1}{q}z}.$$

Sur un ensemble non mesurable B;

PAR NICOLAS LUSIN ET WACLAW SIERPINSKI.

INTRODUCTION.

D'après un théorème connu de M. Baire (1) toute fonction représentable analytiquement est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait quand on néglige les ensembles de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait. « Maintenant une question très importante se pose (écrit M. H. Lebesgue dans son Mémoire *Sur les fonctions représentables analytiquement*), la condition nécessaire fournie par le théorème XVI est-elle suffisante? Et, si elle ne l'est pas, existe-t-il des fonctions qui n'y satisfont pas? Je n'essaierai pas de répondre à ces difficiles questions. »

En 1914, M. Lusin a démontré que la condition de Baire n'est pas suffisante si la puissance du continu est *aleph-un* (2). Il a démontré le même fait en 1917, à l'aide de l'axiome du choix, sans admettre l'hypothèse sur la puissance du continu (3). Le but du présent Mémoire est de *définir effectivement une fonction non représentable analytiquement satisfaisant à la condition de Baire.*

Nous prouverons qu'une telle fonction est fournie par la fonction caractéristique de l'ensemble E défini comme il suit :

Soit

$$(1) \qquad r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad \ldots$$

(1) H. LEBESGUE, *Journal de Mathématiques*, 6e série, t. I, 1905, p. 188 (théorème XVI).

(2) *Comptes rendus*, t. 158, p. 1259 (Note du 4 mai 1914).

(3) *Fundamenta Mathem.*, t. II, 1921, p. 157.

une suite infinie formée de tous les nombres rationnels (différents) intérieurs à l'intervalle (0, 1).

Soient x un nombre réel de l'intervalle (0, 1),

$$(2) \qquad x = (c_0, c_1 c_2 c_3 \ldots)_2 = c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \frac{c_3}{2^3} + \ldots$$

son développement dyadique fini ou infini. Nous désignerons par $E(x)$ l'ensemble formé de tous les nombres r_n de la suite (1), tels qu'on a dans le développement (1) (ou dans un au moins de deux développements dyadiques du nombre x, s'il y en a) $c_n = 1$. E sera l'ensemble de tous les nombres x de l'intervalle (0, 1) pour lesquels l'ensemble $E(x)$ n'est pas bien ordonné (si l'on ordonne d'après la grandeur croissante de nombres rationnels qu'il contient).

Il importe de remarquer que l'ensemble E (dont nous prouverons qu'il est non mesurable B) est défini *sans utiliser les opérations d'addition et de multiplication à partir d'une infinité non dénombrable d'ensembles*, ce qui distingue essentiellement notre exemple du premier exemple d'une fonction non représentable analytiquement, trouvé par M. Lebesgue (*loc. cit.*) [1].

On pourrait encore prouver (ce que nous ne ferons pas dans ce Mémoire) que l'ensemble E est une projection orthogonale d'un ensemble plan mesurable B (F de classe 1) qu'on pourrait même définir effectivement. L'existence des ensembles mesurables B dont les projections ne sont pas mesurables B a été démontré par M. Souslin [2]. Ce n'est que par une analyse approfondie de la théorie des ensembles (A) créée par M. Souslin que nous avons obtenu les résultats exposés dans ce Mémoire.

1. Désignons par R l'ensemble de tous les nombres rationnels r satisfaisant à l'inégalité $0 < r < 1$. Si à tout nombre r de R correspond un ensemble fermé (ou vide) F_r, d'un espace à m dimensions, nous dirons qu'on a un système déterminant $S = \{F_r\}$. Nous appelle-

---

(1) Cf. *Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue*, Toulouse, 1922, p. 61.

(2) *Comptes rendus*, Note du 8 janvier 1917.

rons *noyau* du système S l'ensemble de tous les points p de l'espace considéré pour lesquels il existe au moins une suite infinie décroissante de nombres de R

$$r_1 > r_2 > r_3 > \ldots,$$

telle que p appartient à chacun des ensembles

$$F_{r_1}, \quad F_{r_2}, \quad F_{r_3}, \ldots.$$

Nous appellerons *ensemble* (A) tout ensemble qui est noyau d'un système déterminant [1].

Soit E le noyau d'un système déterminant $S = \{F_r\}$. Posons (pour tout nombre r de R)

$$F_r^0 = F_r; \tag{1}$$

$$F_r^\alpha = F_r^{\alpha-1} \sum_{\rho < r} F_\rho^{\alpha-1}, \tag{2}$$

si α est un nombre ordinal de première espèce, la somme $\sum_{\rho < r}$ s'étendant à tous les nombres ρ de R qui sont $< r$, et

$$F_r^\alpha = \prod_{\xi < \alpha} F_r^\xi, \tag{3}$$

si α est un nombre ordinal de seconde espèce, le produit $\prod_{\xi < \alpha}$ s'étendant à tous les nombres ordinaux $\xi < \alpha$.

Les ensembles F_r^α, définis ainsi par l'induction transfinie, sont évidemment mesurables B pour tout nombre r de R et tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$ (Ω désignant le plus petit nombre ordinal de la troisième classe).

D'après (2) et (3), on trouve

$$F_r^\alpha \supset F_r^\beta \qquad \text{pour } \alpha < \beta. \tag{4}$$

Posons

$$S^\alpha = \sum_r F_r^\alpha, \tag{5}$$

---

[1] Cette définition ne coïncide pas avec celle de M. Souslin (*Comptes rendus*, Note du 8 janvier 1917); or, on pourrait démontrer qu'elle lui est équivalente; ce ne sera pas d'ailleurs nécessaire pour notre but.

la sommation $\sum_r$ s'étendant à tous les nombres r de R. Les ensembles S^α seront tous mesurables B pour $\alpha < \Omega$. D'après (4) on a

$$S^\alpha \supset S^\beta \quad \text{pour } \alpha < \beta. \tag{6}$$

2. Nous prouverons que

$$E = \prod_{\alpha < \Omega} S^\alpha. \tag{7}$$

Soit p un point de E. L'ensemble E étant noyau du système $\{F_r\}$, il existe une suite infinie décroissante de nombres de R,

$$r_1 > r_2 > r_3 > \ldots, \tag{8}$$

telle que

$$p \in F_{r_n} \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9}$$ [1]

D'après (1) nous avons donc

$$p \in F^0_{r_n} \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

Supposons qu'on a

$$p \in F^\xi_{r_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{11}$$

pour tous les nombres ordinaux $\xi < \alpha$, où α est un nombre ordinal donné > 1.

Soit n un indice donné. Si α est de première espèce, on a, d'après (2),

$$F^\alpha_{r_n} = F^{\alpha-1}_{r_n} \sum_{\rho < r_n} F^{\alpha-1}_\rho. \tag{12}$$

D'après l'hypothèse, (11) est vrai pour $\xi = \alpha - 1$, donc $p \in F^{\alpha-1}_{r_n}$ et $p \in F^{\alpha-1}_{r_{n+1}}$. Or, d'après (8), on a $r_{n+1} < r_n$ et par suite $F^{\alpha-1}_{r_{n+1}}$ est un terme de la somme $\sum_{\rho < r_n} F^{\alpha-1}_\rho$ qui contient ainsi le point p. Donc p est un point de l'ensemble (12).

---

[1] $x \in X$ signifie que x est un élément de l'ensemble X.

Si α est un nombre de seconde espèce, nous avons, d'après (3),

$$F^{\alpha}_{r_n} = \prod_{\xi<\alpha} F^{\xi}_{r_n};$$

donc, d'après (11),

$$p \in F^{\alpha}_{r_n}.$$

La formule (11) est ainsi établie par l'induction transfinie pour tout $\xi < \Omega$. Il en résulte, d'après (5), que

$$p \in S^{\alpha} \qquad \text{pour } \alpha < \Omega;$$

donc $x \in P$, où

$$P = \prod_{\alpha<\Omega} S^{\alpha}. \tag{13}$$

Or, soit x un point de l'ensemble (13). Nous avons donc

$$p \in S^{\alpha} \qquad \text{pour } \alpha < \Omega;$$

donc, d'après (5),

$$p \in \sum_{r} F^{\alpha}_{r} \qquad \text{pour } \alpha < \Omega.$$

La somme $\sum_{r}$ contenant une infinité dénombrable de termes F^{α}_{r}, nous en concluons qu'il existe au moins un nombre r_1 de R tel que la formule

$$p \in F^{\alpha}_{r_1}$$

subsiste pour une infinité non dénombrable de nombres ordinaux $\alpha < \Omega$; donc, d'après (4), pour tout $\alpha < \Omega$. On a donc aussi, pour tout $\alpha < \Omega$,

$$p \in F^{\alpha+1}_{r_1};$$

donc, d'après (2),

$$p \in \sum_{\rho<r_1} F^{\alpha}_{\rho} \qquad \text{pour } \alpha < \Omega.$$

La somme $\sum_{\rho<r_1}$ contenant une infinité dénombrable de termes F^{α}_{ρ} $(\rho < r_1)$, on en tire, comme plus haut, qu'il existe un nombre $r_2 < r_1$ de R, tel que

$$p \in F^{\alpha}_{r_2}$$

pour une infinité non dénombrable de nombres $\alpha < \Omega$, donc pour tous les $\alpha < \Omega$.

En raisonnant ainsi de suite, on arrive à une suite infinie décroissante de nombres de R, $r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$, telle que

$$p \in F^{\alpha}_{r_n} \qquad \text{pour } \alpha < \Omega;\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

En particulier, pour $\alpha = 0$, on trouve, d'après (1),

$$p \in F_{r_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

ce qui prouve que p est un point de l'ensemble E.

Nous avons ainsi démontré que $E = P$ et la formule (7) est établie.

5. Soient maintenant E et $\overset{*}{E}$ les noyaux respectifs des systèmes $\{F_r\}$ et $\{\overset{*}{F}_r\}$ et supposons qu'on a

$$(14) \qquad S^{\alpha}.\overset{*}{E} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega.$$

Nous prouverons qu'il en résulte que

$$E\overset{*}{E} \neq 0.$$

De (14) et de la formule

$$\overset{*}{E} = \prod_{\beta < \Omega} \overset{*}{S}{}^{\beta},$$

analogue à la formule (7), résulte

$$(15) \qquad S^{\alpha}.\overset{*}{S}{}^{\beta} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega,\ \beta < \Omega.$$

Soit β un nombre ordinal $< \Omega$. D'après (5), la formule (15) donne

$$\sum_r F^{\alpha}_r.\overset{*}{S}{}^{\beta} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega.$$

La somme $\sum_r$ contenant une infinité dénombrable de termes, on en tire qu'il existe un nombre $r(\beta)$ de R tel que l'inégalité

$$(16) \qquad F^{\alpha}_{r(\beta)}.\overset{*}{S}{}^{\beta} \neq 0$$

subsiste pour une infinité non dénombrable de nombres ordinaux α; donc, d'après (4), pour tout $\alpha < \Omega$.

L'ensemble R étant dénombrable, l'ensemble de tous les nombres $r(\beta)$ correspondant aux nombres ordinaux $\beta < \Omega$ est au plus dénombrable. Or, la formule (16) subsistant pour tout $\alpha < \Omega$ et tout $\beta < \Omega$, on en déduit l'existence d'un nombre r_1 de R (indépendant de β), tel qu'on a

$$(17) \qquad F^{\alpha}_{r_1} . \overset{*}{S}{}^{\beta} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega,\ \beta < \Omega.$$

En se servant de la formule pour $\overset{*}{S}{}^{\beta}$ analogue à la formule (7) et en raisonnant comme plus haut, on déduit de (17) l'existence d'un nombre r'_1 de R tel que

$$(18) \qquad F^{\alpha}_{r_1} . \overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_1} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega,\ \beta < \Omega.$$

D'après (18), nous avons donc aussi

$$F^{\alpha+1}_{r_1} . \overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_1} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega,\ \beta < \Omega;$$

donc, d'après (2),

$$F^{\alpha}_{r_1} \sum_{\rho < r_1} F^{\alpha}_{\rho} . \overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_1} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega,\ \beta < \Omega.$$

La somme $\sum\limits_{\rho < r_1}$ contenant une infinité dénombrable de termes, on en déduit, comme plus haut, l'existence d'un nombre $r_2 < r_1$ de R tel que

$$F^{\alpha}_{r_1} . F^{\alpha}_{r_2} . \overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_1} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega,\ \beta < \Omega.$$

En remplaçant, dans cette formule, β par $\beta + 1$ et en raisonnant comme plus haut, on prouve l'existence d'un nombre $r'_2 < r'_1$ de R, tel que

$$F^{\alpha}_{r_1} . F^{\alpha}_{r_2} . \overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_1} . \overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_2} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega,\ \beta < \Omega.$$

En raisonnant ainsi de suite, on arrive à deux suites infinies de nombres de R,

$$r_1 > r_2 > r_3 > \ldots \qquad \text{et} \qquad r'_1 > r'_2 > r'_3 > \ldots,$$

telles qu'on a

$$F^{\alpha}_{r_1}.F^{\alpha}_{r_2}\ldots F^{\alpha}_{r_n}.\overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_1}.\overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_2}\ldots\overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_n}\neq 0 \qquad \text{pour } \alpha<\Omega,\ \beta<\Omega;\ n=1,2,\ldots;$$

donc, en particulier, pour $\alpha=\beta=0$, d'après (1),

$$(19) \qquad F_{r_1}.F_{r_2}\ldots F_{r_n}.\overset{*}{F}_{r'_1}.\overset{*}{F}_{r'_2}\ldots\overset{*}{F}_{r'_n}\neq 0 \qquad \text{pour } n=1,2,3,\ldots.$$

Les ensembles F_r et $\overset{*}{F}_{r'}$, étant fermés, la formule (19) prouve (d'après un théorème connu de Cantor) l'existence d'un point p commun à tous les ensembles F_{r_n} et $\overset{*}{F}_{r'_n}$ $(n=1,2,3,\ldots)$, donc aux ensembles E et $\overset{*}{E}$. C. Q. F. D.

Nous avons donc démontré que si $E\overset{*}{E}=0$, la formule (14) ne subsiste pas pour tout $\alpha<\Omega$. Il existe donc alors un indice $\alpha<\Omega$, tel que $S^{\alpha}.\overset{*}{E}=0$, c'est-à-dire : $\overset{*}{E}\subset CS^{\alpha}$.

En particulier, si le complémentaire de E, CE, est un ensemble (A), nous pouvons poser $\overset{*}{E}=CE$ et nous obtenons, pour un $\alpha<\Omega$: $CE\subset CS^{\alpha}$, donc $E\supset S^{\alpha}$, par conséquent, d'après (7), $E=S^{\alpha}$. Donc :

Si E *et* CE *sont des ensembles* (A), E *est mesurable* B [1].

4. E étant le noyau du système $\{F_r\}$ et p un point donné (appartenant à E ou non), désignons (pour $\alpha<\Omega$) par $R^{\alpha}(p)$ l'ensemble de tous les nombres r de R, tels que

$$p\in F^{\alpha}_{r}.$$

D'après (4), nous aurons évidemment

$$(20) \qquad R^{\alpha}(p)\supset R^{\beta}(p) \qquad \text{pour } \alpha<\beta.$$

Or, les ensembles $R^{\alpha}(p)$ sont au plus dénombrables (comme sous-ensembles de R) : il résulte donc de (20) l'existence (pour tout point p donné) d'un plus petit indice $\mu=\mu(p)<\Omega$, tel que

$$(21) \qquad R^{\mu}(p)=R^{\mu+1}(p).$$

---

[1] M. Souslin, *loc. cit.* — N. Lusin et W. Sierpinski, *Sur quelques propriétés des ensembles* (A) (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1918, p. 42 ; théorème de Souslin).

Soit r un nombre de $R^{\mu+1}(p)$: on a donc $p \in F_r^{\mu+1}$; donc, d'après (2) (pour $\alpha = \mu + 1$), il existe un nombre $r_1 < r$ de R, tel que $p \in F_{r_1}^{\mu}$; donc, d'après (21) aussi, $p \in F_{r_1}^{\mu+1}$, ce qui donne, d'après (2) (pour $\alpha = \mu + 2$), $p \in F_r^{\mu+2}$. Donc R appartient à $R^{\mu+2}(p)$. On a ainsi $R^{\mu+1}(p) \subset R^{\mu+2}(p)$; donc, d'après (20), $R^{\mu+1}(p) = R^{\mu+2}(p)$. D'après (3) et (20), on en déduit sans peine par l'induction transfinie que

$$(22) \qquad R^{\alpha}(p) = R^{\mu}(p) \qquad \text{pour } \alpha \geqq \mu = \mu(p).$$

Posons, pour $\alpha < \Omega$,

$$(23) \qquad T^{\alpha} = \sum_r (F_r^{\alpha} - F_r^{\alpha+1});$$

ce seront évidemment des ensembles mesurables B.

Si $p \in T^{\alpha}$, on a, pour un nombre r de R, $p \in F_r^{\alpha}$ et p non $\in F_r^{\alpha+1}$; donc $R^{\alpha}(p) \neq R^{\alpha+1}(p)$, ce qui donne, d'après (22), $\alpha < \mu(p)$.

Or, soit p un point tel que $\mu(p) > \alpha$: on a donc, d'après la définition de l'indice $\mu(p)$, $R^{\alpha}(p) \neq R^{\alpha+1}(p)$ et il existe, d'après (20), un nombre r de R, tel que $p \in F_r^{\alpha}$ et p non $\in F_r^{\alpha+1}$; donc, d'après (23), $p \in T^{\alpha}$.

Nous avons donc démontré que

$$(24) \qquad T^{\alpha} = \underset{p}{\mathrm{E}}[\mu(p) > \alpha] \qquad \text{pour tout } \alpha < \Omega$$

$\left\{\underset{p}{\mathrm{E}}[W(p)]\right.$ désignant l'ensemble de tous les points p de l'espace considéré satisfaisant à la condition $\left.W(p)\right\}$.

Soit p un point de E tel que $\mu(p) \leqq \alpha$. D'après (7), nous avons $E \subset S^{\alpha}$, donc $p \in S^{\alpha}$; or, d'après (24), p non $\in T^{\alpha}$; donc $p \in S^{\alpha} - T^{\alpha}$.

Or, soit $p \in S^{\alpha} - T^{\alpha}$: nous avons donc p non $\in T^{\alpha}$; donc, d'après (24), $\mu(p) \leqq \alpha$; d'après (22), nous avons donc

$$(25) \qquad R^{\beta}(p) = R^{\alpha}(p) \qquad \text{pour } \beta \geqq \alpha.$$

Or, puisque $p \in S^{\alpha}$, il existe, d'après (5), un nombre r de R, tel que $p \in F_r^{\alpha}$; donc, d'après (25), nous avons $p \in F_r^{\beta}$ pour $\beta \geqq \alpha$; donc $p \in S^{\beta}$ pour $\beta \geqq \alpha$; donc [d'après (6)] pour tout $\beta < \Omega$, ce qui donne,

d'après (7), $p \in E$. Nous avons ainsi

$$(26) \qquad S^\alpha - T^\alpha = E . \mathop{\mathrm{E}}_{p} [\mu(p) = \alpha] \qquad (\text{pour } \alpha < \Omega).$$

Puisque pour tout point p on a $\mu(p) < \Omega$, on déduit, de (26), tout de suite la formule

$$(27) \qquad E = \sum_{\alpha < \Omega} (S^\alpha - T^\alpha).$$

Les formules (7) et (27) prouvent que *tout ensemble* (A) *est un produit et aussi une somme de* $\aleph_1$ *ensembles mesurables* B.

5. De la définition du noyau E du système $\{F_r\}$ résulte immédiatement que pour qu'un point p appartienne à E, il faut et il suffit que l'ensemble $R^0(p)$ ne soit pas bien ordonné (si on l'ordonne d'après la grandeur croissante des nombres rationnels qui le constituent).

Soit p un point de CE. L'ensemble $R^0(p)$ est donc bien ordonné ou vide : soit α son type ordinal. (Nous considérons l'ensemble vide comme un ensemble bien ordonné du type o.) Si $R^0(p)$ est vide, nous avons évidemment $\mu(p) = 0$. Or, supposons que $\alpha > 0$ et soient

$$(28) \qquad r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_\xi < \ldots \qquad (\xi < \alpha)$$

les nombres de R constituant $R^0(p)$, rangés d'après leurs grandeurs.

Soit λ un nombre ordinal donné quelconque : nous prouverons que l'ensemble $R^\lambda(p)$ coïncide avec l'ensemble H^λ de tous les nombres

$$r_\xi, \quad \text{où} \quad \lambda \leq \xi < \alpha.$$

L'égalité

$$(29) \qquad R^\lambda(p) = H^\lambda$$

est vraie pour $\lambda = 0$: supposons qu'elle est vraie pour tous les nombres ordinaux $\lambda < \beta$.

Soient β un nombre de première espèce, r un nombre de $R^\beta(p)$. D'après (20), r est donc un nombre de $R^0(p)$, donc un terme de la suite (28), soit $r = r_\xi$, où $0 \leq \xi < \alpha$. Nous avons donc $p \in F^\beta_{r_\xi}$ et,

d'après (2) : $p \in \sum_{\rho < r_\xi} F_\rho^{\beta-1}$; il existe donc dans R un nombre $\rho < r_\xi$, tel que $p \in F_\rho^{\beta-1}$, donc $\rho \in R^{\beta-1}(p)$, ce qui prouve que r_ξ n'est pas le premier élément de $R^{\beta-1}(p)$ qui est, par hypothèse, $r_{\beta-1}$ [puisque (29) est vrai pour $\lambda = \beta - 1$]. Or, d'après (20), r_ξ est un nombre de $R^{\beta-1}(p)$: nous avons donc $\xi > \beta - 1$, c'est-à-dire $\xi \geqq \beta$. Donc

$$R^\beta(p) \subset H^\beta. \tag{30}$$

Or, soit r_ξ un nombre de H^β : nous avons donc $r_\xi > r_{\beta-1}$. De l'hypothèse que (29) est vrai pour $\lambda = \beta - 1$ résulte donc que $r_{\beta-1}$ et $r_\xi > r_{\beta-1}$ appartiennent à $R^{\beta-1}(p)$, donc $p \in F_{r_{\beta-1}}^{\beta-1}$ et $p \in F_{r_\xi}^{\beta-1}$, ce qui donne, d'après (2), $p \in F_{r_\xi}^\beta$, c'est-à-dire $r_\xi \in R^\beta(p)$. On a donc $H^\beta \subset R^\beta(p)$; donc, d'après (30), $R^\beta(p) = H^\beta$.

Soient maintenant β un nombre de seconde espèce, r un nombre de $R^\beta(p)$. Comme plus haut, nous trouvons $r = r_\xi$, où $0 \leqq \xi < \alpha$. S'il était $\xi < \beta$, on aurait (β étant de seconde espèce) $\xi + 1 < \beta$. La formule (29) étant, par hypothèse, vraie pour $\lambda < \beta$, donc pour $\lambda = \xi + 1$, on en déduit que r_ξ n'appartient pas à $H^{\xi+1} = R^{\xi+1}(p)$; donc, d'après (20), non plus à $R^\beta(p)$, contrairement à l'hypothèse. Nous avons donc $\xi \geqq \beta$, donc (d'après $\xi < \alpha$) r_ξ appartient à H^β. On a donc l'inclusion (30).

Or, soit r_ξ un nombre de H^β : on a donc $\beta \leqq \xi < \alpha$ et, par suite, la formule (29) étant, par hypothèse, vraie pour $\lambda < \beta$, r_ξ appartient à tous les ensembles $R^\lambda(p)$ pour $\lambda < \beta$; donc $p \in F_{r_\xi}^\lambda$ pour $\lambda < \beta$, ce qui donne, d'après (3), $p \in F_{r_\xi}^\beta$, donc $r_\xi \in R^\beta(p)$. On a donc $H^\beta \subset R^\beta(p)$; donc, d'après (30), $R^\beta(p) = H^\beta$.

L'égalité (29) est ainsi démontrée par l'induction transfinie pour tout nombre ordinal λ. Il en résulte que les ensembles $R^\lambda(p)$ $(0 \leqq \lambda \leqq \alpha)$ sont distincts (formant une suite décroissante d'ensembles) et que les ensembles $R^\lambda(p)$ sont vides pour $\lambda \geqq \alpha$. On a donc $\mu(p) = \alpha$.

Nous avons ainsi démontré que *si* $p \in CE$, $R^0(p)$ *est un ensemble bien ordonné du type* $\mu(p)$.

Soit maintenant E un ensemble (A) dont le complémentaire CE est aussi un ensemble (A). Nous avons démontré plus haut qu'il existe dans ce cas un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel que $E = S^\alpha$.

Or, soit p un point de CE. S'il était $\mu(p) > \alpha$, on aurait, d'après (24), $p \in T^\alpha$, donc, à plus forte raison $p \in S^\alpha$, puisque, d'après (23) et (5), on a $T^\alpha \subset S^\alpha$. Or, c'est impossible, puisque $S^\alpha = E$ et p est un point de CE.

Nous avons donc démontré que *si* E *et* CE *sont des ensembles* (A), *il existe un nombre ordinal* $\alpha < \Omega$, *tel qu'on a* $\mu(p) \leqq \alpha$ *pour tout point* p *de* CE.

Ce résultat nous permettra de construire un ensemble (A) dont le complémentaire n'est pas un ensemble (A).

6. Soit

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad \ldots \tag{31}$$

une suite infinie, formée de tous les nombres (différents) de l'ensemble R. Soient x un nombre réel de l'intervalle (0, 1),

$$x = (c_0, c_1 c_2 c_3 \ldots) \tag{32}$$

son développement dyadique fini ou infini.

Soit r un nombre donné de R : c'est donc un nombre de la suite (31) et nous avons $r = r_n$, où n est un nombre naturel donné. Désignons par F_r l'ensemble de tous les nombres réels x de l'intervalle (0, 1), tels qu'on a dans le développement (32) (ou dans un au moins de deux développements dyadiques du nombre x s'il y en a) : $c_n = 1$. Les ensembles F_r sont ainsi définis pour tout nombre r de R et l'on voit sans peine qu'ils sont tous fermés (puisque F_{r_n} est une somme de 2^n intervalles fermés). Soit E le noyau du système $\{F_r\}$ (¹).

Soit α un nombre transfini $< \Omega$. Les sous-ensembles de R, ordonnés d'après la grandeur des nombres qu'ils contiennent, pouvant, comme l'on sait, représenter tous les types ordinaux dénombrables, il existe un sous-ensemble de R du type α, soit

$$r_{m_1}, \quad r_{m_2}, \quad r_{m_3}, \quad \ldots \tag{33}$$

(¹) On voit sans peine que E est le même ensemble qui a été défini dans l'introduction.

Posons

$$x = \frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_2}} + \frac{1}{2^{m_3}} + \ldots;$$

ce sera, comme on le voit sans peine, un nombre de l'intervalle (0, 1) ayant un développement dyadique unique [puisque l'ensemble (33), ordonné d'après la grandeur de nombres qu'il contient, est bien ordonné du type $\alpha \geqq \omega$]. Il résulte de la définition des ensembles F_r qu'on a $x \in F_r$ pour tout nombre r de la suite (33) et réciproquement. Donc l'ensemble (33) coïncide avec l'ensemble $R^0(x)$, et l'on a

$$\mu(x) = \alpha.$$

α pouvant être un nombre transfini quelconque $< \Omega$, nous en concluons qu'il n'existe aucun nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel qu'on ait $\mu(x) \leqq \alpha$ pour tout point x de CE, ce qui entraîne, comme nous l'avons démontré plus haut, que CE n'est pas un ensemble (A).

Nous avons ainsi *un exemple effectif d'un ensemble* (A) *dont le complémentaire n'est pas un ensemble* (A).

7. Nous prouverons maintenant que *tout ensemble* (A) *de M. Souslin est un ensemble* (A) *dans notre sens.*

Soit donc E_0 un ensemble (A) de M. Souslin, noyau du système déterminant $S\{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$, où $\delta_{n_1, \ldots, n_k}$ sont des ensembles fermés (correspondant aux systèmes finis de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$) et où l'on a toujours

$$\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}} \subset \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}. \tag{34}$$

Donc p est un point de l'ensemble E_0 dans ce cas, et seulement dans ce cas, s'il existe une suite infinie de nombres naturels

$$n_1, \quad n_2, \quad n_3, \quad \ldots \tag{35}$$

telle que

$$p \in \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \qquad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{36}$$

Soit N l'ensemble de tous les systèmes finis de nombres natu-

rels $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, ordonné de sorte qu'on ait

$$(37)\quad (n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}) \prec (n_1, n_2, \ldots, n_k) \prec \\ \prec (n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k+1, n_{k+1}, \ldots, n_{k+l})$$

(pour tous les nombres naturels k, l et $n_1, n_2, \ldots, n_{k+l}$).

On voit sans peine que le type d'ordre de l'ensemble N est le même que de l'ensemble R (ordonné d'après la grandeur croissante des nombres r); il existe donc une application de l'ensemble N sur R qui conserve l'ordre relatif des éléments homologues [1]. Soit $\rho_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ le nombre de R qui correspond dans cette application au système

$$(n_1, n_2, \ldots, n_k).$$

Nous déterminerons maintenant un système $\{F_r\}$ comme il suit.

Soit r un nombre donné de R : le nombre r détermine donc un système $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ de N, tel que $r = \rho_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Nous poserons

$$(38)\qquad F_r = F_{\rho_{n_1, n_2, \ldots, n_k}} = \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

Soit E le noyau du système $\{F_r\}$: nous prouverons que $E = E_0$.

Soit p un point de E_0 et soit (35) une suite infinie de nombres naturels pour laquelle subsiste la formule (36). D'après (37) nous avons

$$(n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}) \prec (n_1, n_2, \ldots, n_k) \qquad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots;$$

donc

$$\rho_{n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}} < \rho_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'après (36) et (38), nous voyons donc que

$$r_k = \rho_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

est une suite infinie décroissante de nombres de R, telle que

$$p \in F_{r_k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

ce qui prouve que p est un point du noyau E du système $\{F_r\}$. Il est donc démontré que $E_0 \subset E$.

---

[1] Une telle application pourrait être sans peine définie effectivement.

Or, soit p un point de E, et soit

$$(39) \qquad r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$$

une suite infinie décroissante de nombres de R, telle que

$$(40) \qquad p \in F_{r_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'après (37), on a

$$(1) \prec (2) \prec (3) \prec \ldots,$$

donc

$$\rho_1 \prec \rho_2 \prec \rho_3 \prec \ldots;$$

or, $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ étant un système donné quelconque de N, on a

$$(n_1, n_2, \ldots, n_k) \prec (n_1 + 1),$$

donc

$$\rho_{n_1, n_2, \ldots, n_k} < \rho_{n_1+1};$$

il existe donc des indices m tels que $\rho_m > r_1$. Soit m_1 le plus petit indice tel que ρ_{m_1} dépasse un terme de la suite (39) : on voit sans peine qu'on aura, pour un indice μ_1 :

$$(41) \qquad \rho_{m_1-1} < r_j < \rho_{m_1} \qquad \text{pour } j \geq \mu_1$$

(ρ_{m_1-1} devant être remplacé par o, si $m_1 = 1$).

D'après (37), nous avons

$$(m_1 - 1) \prec (m_1, 1) \prec (m_1, 2) \prec \ldots \prec (m_1),$$

donc

$$\rho_{m_1-1} < \rho_{m_1, 1} < \rho_{m_1, 2} < \ldots < \rho_{m_1}.$$

Il résulte sans peine de (37) que pour tout nombre $r = \rho_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ de R, situé entre ρ_{m_1-1} et ρ_{m_1}, on a $n_1 = m_1$, donc $r < \rho_{m_1, n_2+1}$.

Donc, d'après (41), il existe un plus petit indice m_2 tel que ρ_{m_1, m_2} dépasse un terme de la suite (39). Nous aurons donc, pour un indice μ_2 :

$$\rho_{m_1, m_2-1} < r_j < \rho_{m_1, m_2} \qquad \text{pour } j \geq \mu_2.$$

En considérant la suite

$$\rho_{m_1, m_2-1} < \rho_{m_1, m_2, 1} < \rho_{m_1, m_2, 2} < \ldots < \rho_{m_1, m_2},$$

on arrive de même aux indices m_3 et μ_3 tels que

$$\rho_{m_1, m_2, m_3-1} < r_j < \rho_{m_1, m_2, m_3} \qquad \text{pour } j \geq \mu_3,$$

et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite infinie de nombres naturels m_1, m_2, m_3, ..., telle que

$$\rho_{m_1, \ldots, m_{k-1}, m_k-1} < r_j < \rho_{m_1, \ldots, m_k} \qquad \text{pour } j \geq \mu_k,$$

en particulier,

$$\rho_{m_1, \ldots, m_{k-1}, m_k-1} < r_{\mu_k} < \rho_{m_1, \ldots, m_k}; \tag{42}$$

r_{μ_k}, comme un nombre de R, peut être écrit sous la forme

$$r_{\mu_k} = \rho_{n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{s_k}^k}$$

et, d'après (42) et (37), nous trouvons

$$n_1^k = m_1, \qquad n_2^k = m_2, \qquad \ldots, \qquad n_k^k = m_k;$$

d'après (40), (38) et (34), nous trouvons donc

$$p \in F_{\rho_{m_1, m_2, \ldots, m_k}} = \delta_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

ce qui prouve que p appartient à E_0. Nous avons ainsi $E \subset E_0$.

Les relations $E_0 \subset E$ et $E \subset E_0$ nous donnent $E_0 = E$. C. Q. F. D.

Tout ensemble mesurable B est un ensemble (A) de M. Souslin : donc *tout ensemble mesurable* B *est un ensemble* (A) *dans notre sens*. Il en résulte que *si* E *est un ensemble mesurable* B, E *et* CE *sont des ensembles* (A). C'est la réciproque du théorème que nous avons démontré plus haut.

Par conséquent, l'ensemble E que nous avons construit plus haut et dont le complémentaire CE n'est pas un ensemble (A), n'est pas mesurable B. On a ainsi *un exemple effectif d'un ensemble non mesurable* B.

8. Nous allons maintenant démontrer que *tout ensemble* (A) *jouit de la propriété de Baire*.

Soit P un ensemble parfait donné. Nous dirons qu'un ensemble M

est sur P *de première catégorie au point p* (appartenant à P ou non), s'il existe une sphère S entourant p et telle que l'ensemble PMS est de première catégorie sur P ; s'il n'existe pas une telle sphère, nous dirons que M est sur P de deuxième catégorie au point p.

Soit $M_0 = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$ l'ensemble-somme d'une infinité dénombrable d'ensembles M_k et désignons par N_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) l'ensemble de tous les points p de P en lesquels M_k est de première catégorie sur P. On prouve sans peine que l'ensemble

$$K = (P - N_0) N_1 N_2 N_3 \ldots$$

est non dense sur P.

Soient maintenant E un ensemble (A) donné, noyau du système $S = \{F_r\}$, P un ensemble parfait donné, tel que E est de deuxième catégorie sur P en tout point de P.

ρ étant un nombre donné de R, désignons par S_ρ le système qu'on obtient de S en remplaçant tout ensemble F_r, où $r \geqq \rho$, par un ensemble vide. Désignons par E_ρ le noyau du système S_ρ : on vérifie sans peine la formule

$$E = \sum_r F_r E_r, \tag{43}$$

ainsi que la formule

$$E_r = \sum_{\rho < r} F_\rho F_\rho \qquad (\text{pour } r \in R). \tag{44}$$

$r_1, r_2, \ldots, r_k$ étant une suite finie décroissante quelconque de nombres de R, désignons par $N_{r_1, r_2, \ldots, r_k}$ l'ensemble de tous les points de P en lesquels l'ensemble $F_{r_1} F_{r_2} \ldots F_{r_k} E_{r_k}$ est sur P de première catégorie et posons

$$H = \prod_r N_r + \sum^* \left[(P - N_{r_1, r_2, \ldots, r_k}) \prod_{\rho < r_k} N_{r_1, r_2, \ldots, r_k, \rho} \right], \tag{45}$$

le produit $\prod_r$ s'étendant à tous les nombres r de R, le produit $\prod_{\rho < r_k}$ à tous les nombres $\rho < r_k$ de R, et la sommation $\sum^*$ à toutes les suites finies décroissantes $r_1, r_2, \ldots, r_k$ (k variable) de nombres de R.

L'ensemble E étant, par l'hypothèse, de deuxième catégorie sur P en tout point de P, l'ensemble N de points de P en lesquels E est sur P de première catégorie, est vide, donc $P - N = P$. Il résulte donc, comme nous savons, de (43) et de la définition des ensembles N_r, que l'ensemble $\prod_r N_r$ est non dense sur P.

Soit $r_1, r_2, \ldots, r_k$ une suite finie décroissante donnée de nombres de R. D'après (44) nous avons

$$E_{r_k} = \sum_{\rho < r_k} F_\rho E_\rho,$$

donc

$$F_{r_1} F_{r_2} \ldots F_{r_k} E_{r_k} = \sum_{\rho < r_k} F_{r_1} F_{r_2} \ldots F_{r_k} F_\rho E_\rho,$$

d'où il résulte, comme nous savons (d'après la définition de $N_{r_1, r_2, \ldots, r_k, \rho}$), que l'ensemble

$$(P - N_{r_1, r_2, \ldots, r_k}) \prod_{\rho < r_k} N_{r_1, r_2, \ldots, r_k, \rho}$$

est non dense sur P. La somme $\overset{*}{\sum}$ contenant une infinité dénombrable de termes, il résulte de (45) que l'ensemble H est de première catégorie sur P.

Or, nous prouverons que

$$P - H \subset E. \tag{46}$$

Soit p un point de $P - H$. Nous avons donc

$$p \text{ non} \in H; \tag{47}$$

donc, d'après (45), p non $\in \prod_r N_r$; il existe donc un nombre r_1 de R tel que

$$p \text{ non} \in N_{r_1}. \tag{48}$$

Or, il résulte de (47) et (45), d'après la définition de la somme $\overset{*}{\sum}$,

que

$$p \text{ non} \in (P - N_{r_1}) \prod_{\rho < r_1} N_{r_1, \rho},$$

ce qui donne, d'après (48),

$$p \text{ non} \in \prod_{\rho < r_1} N_{r_1, \rho}.$$

Il existe donc un nombre $r_2 < r_1$ de R, tel que

$$(49) \qquad p \text{ non} \in N_{r_1, r_2}.$$

De même, il résulte de (47) et (45) que

$$p \text{ non} \in (P - N_{r_1, r_2}) \prod_{\rho < r_2} N_{r_1, r_2, \rho},$$

d'où l'on déduit, d'après (49), l'existence d'un nombre $r_3 < r_2$ de R, tel que

$$p \text{ non} \in N_{r_1, r_2, r_3}.$$

En raisonnant ainsi de suite, on arrive à une suite infinie décroissante de nombres de R, $r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$, telle que

$$(50) \qquad p \text{ non} \in N_{r_1, r_2, \ldots, r_k} \qquad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Il s'ensuit de la définition de l'ensemble $N_{r_1, r_2, \ldots, r_k}$ et de (50) que l'ensemble $F_{r_1} F_{r_2} \ldots F_{r_k} E_{r_k}$ n'est pas de première catégorie sur P au point p. Il en résulte que p est un point d'accumulation de l'ensemble $F_{r_1} F_{r_2} \ldots F_{r_k} E_{r_k}$, donc, à plus forte raison, de l'ensemble F_{r_k} : ce dernier étant fermé, il en résulte que $p \in F_{r_k}$. Nous avons donc prouvé l'existence d'une suite infinie décroissante $r_1 > r_2 > \ldots$ de nombres de R, telle que

$$p \in F_{r_k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Il en résulte que p appartient au noyau E du système $\{F_r\}$. La formule (46) est ainsi établie. Il en résulte que $P - E \subset H$; donc, H étant de première catégorie sur P, que $P - E$ est de première catégorie sur P.

Nous avons donc démontré que si E est un ensemble (A) et P un ensemble parfait en tout point duquel E est de deuxième catégorie sur P, P — E est de première catégorie sur P. Cela prouve que tout ensemble (A) satisfait à la condition de Baire. Par conséquent, *la fonction caractéristique d'un ensemble* (A) *est continue sur tout ensemble parfait quand on néglige les ensembles de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait*, donc satisfait à la condition de Baire, fournie par le théorème XVI du Mémoire de M. Lebesgue : *Sur les fonctions représentables analytiquement.*

La fonction caractéristique de l'ensemble (A) non mesurable B, défini plus haut, nous fournit donc *un exemple effectif d'une fonction non représentable analytiquement et cependant satisfaisant à la condition de Baire.*

Recherche des systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour N *premier (ou puissance de nombre premier) de la forme* $6n + 1$;

Par S. BAYS.

INTRODUCTION.

Dans un premier travail sur les systèmes cycliques de triples de Steiner [1], nous avons obtenu tous les systèmes cycliques de triples de Steiner possibles pour les premières valeurs de N de la forme $6n + 1$: $N = 7, 13, 19, 25, 31$ éléments.

Nous en rappelons les données essentielles :

1° Un ensemble de triples (combinaisons trois à trois) de N éléments, contenant *une fois et une seule fois* chaque couple de ces éléments, est un *système de triples de Steiner* [2]. Il existe des systèmes de triples de Steiner pour chaque N de la forme $6n + 1$ et $6n + 3$, et seu-

[1] S. Bays, *Sur les Systèmes cycliques de triples de Steiner* (*Annales de l'École Normale*, 1923). Les deux Mémoires paraissent à quelques jours d'intervalle. Nous prions le lecteur que le sujet intéresse et qui veut entreprendre la lecture du présent travail d'une manière aisée et complète, de bien vouloir prendre d'abord connaissance du Mémoire des *Annales*. Les résultats essentiels des deux Mémoires ont fait l'objet de deux Notes aux *Comptes rendus* (t. 165, 22 octobre 1917, p. 543, et t. 171, 27 décembre 1920, p. 1361).

[2] Le triple 123 contient les trois couples 12, 13, 23, et le système de triples de Steiner 123, 145, 167, 246, 257, 347, 356 contient une fois et une seule fois chaque couple des sept éléments 1, 2, ..., 7. Tout l'exposé nécessaire pour lire aisément ce travail se trouve dans notre premier travail. On peut consulter aussi Netto, *Combinatorik*, p. 202-228.

lement pour ces N. Deux systèmes de triples sont *différents*, s'ils ne peuvent provenir l'un de l'autre par une permutation quelconque des N éléments.

2° Soit $N = 6n + 1$ et les éléments $0, 1, 2, \ldots, 6n$. Un système de triples de Steiner de ces éléments est *cyclique* (¹) lorsque ses $n(6n-1)$ triples sont répartis en n *séries cycliques* de la forme x, $a + x$, $b + x$ $(x = 0, 1, 2, \ldots, 6n)$, a et b étant deux des entiers $1, 2, \ldots, 6n$, $b > a$ et $\neq 2a$, $N - a$, $\frac{N+a}{2}$. Nous entendons par les entiers $a + x$, $b + x$, comme par tous les entiers $\lesseqgtr N$ qui interviennent dans les substitutions suivantes, leur plus petit reste positif ou nul (mod N).

3° Les séries cycliques vont par *paires* de séries dites *conjuguées*. Deux séries conjuguées contiennent les mêmes couples, bien que sans triple commun; elles sont déductibles l'une de l'autre par la substitution $|x, N - x|$. Les éléments associés à 0 dans un triple, dans chacune d'elles, sont :

$$a, \quad b - a, \quad b, \quad N - b, \quad N - (b - a), \quad N - a.$$

Trois de ces éléments sont inférieurs à $\frac{1}{2}N$; ils constituent la *caractéristique* de ces deux séries. L'ensemble des caractéristiques est l'ensemble des triples des éléments $1, 2, \ldots, 3n$, ayant la propriété : la somme de deux de leurs éléments est égale au troisième, ou la somme des trois éléments est égale à N.

4° Soit $N = 6n + 1$ premier (ou de la forme p^m), et les éléments $0, 1, 2, \ldots, 6n$. Le groupe *métacyclique* est produit par les deux substitutions $|x, 1 + x|$ et $|x, \alpha x|$, α étant racine primitive de N [appartenant à l'exposant $\varphi(N)$, mod N]. La substitution $|x, 1 + x|$ est génératrice de la série cyclique. La substitution $|x, \alpha x|$ change une série cyclique en une autre série cyclique, les trois triples de la première série qui contiennent l'élément 0 en ceux de la seconde qui

(¹) Il existe également des systèmes *cycliques* de triples pour $N = 6n + 3$ éléments. Ils sont constitués de n séries cycliques de la forme x, $a + x$, $b + x$ $(x = 0, 1, 2, \ldots, 6n + 2)$, et d'une série cyclique supplémentaire de $2n + 1$ triples. Nous ne nous en sommes pas occupés jusqu'ici.

contiennent l'élément o, et deux séries cycliques conjuguées en deux séries cycliques conjuguées.

5° Pour un système cyclique de triples de Steiner, il faut n séries cycliques telles que les $6n$ éléments associés à l'élément o dans les $3n$ triples qui le contiennent soient les $6n$ autres éléments $1, 2, \ldots, 6n$. Les n caractéristiques correspondant à ces séries contiendront les $3n$ éléments $1, 2, \ldots, 3n$, une fois chacun. Elles détermineront 2^n systèmes cycliques de triples de Steiner, puisque, pour constituer un système de triples, une série cyclique peut indifféremment être remplacée par la série conjuguée. Obtenir les systèmes cycliques de triples de Steiner de N éléments revient donc à déterminer d'abord tous les ensembles de n caractéristiques contenant les $3n$ éléments $1, 2, \ldots, 3n$. Nous appellerons un tel ensemble de n caractéristiques sans élément commun, un *système de caractéristiques* (¹).

Dans notre premier travail, cette recherche des systèmes de caractéristiques a été faite directement, jusqu'à $N = 31$, sur l'ensemble des caractéristiques. Les substitutions métacycliques nous ont servi ensuite à répartir les systèmes cycliques de triples obtenus en classes de systèmes équivalents, et enfin le procédé des *trains de White* (²) nous a montré que les systèmes de deux classes différentes étaient toujours différents. Le théorème suivant était donc vérifié pour ces premières valeurs de N (premier ou de la forme p^m) : *deux systèmes cycliques équivalents sont déductibles l'un de l'autre par une substitution métacyclique.*

Ce théorème ne fait aucun doute pour nous, pour des raisons de la théorie des groupes que nous ne pouvons développer ici; mais nous ne sommes pas encore en état de le démontrer sous sa forme générale : *deux fonctions cycliques de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$* [possédant le groupe cyclique $\{(x_1 x_2 \ldots x_n)\}$, $n = p$ ou p^m] *équivalentes, sont*

(¹) Une *solution du problème de Heffter* ou du *tableau des caractéristiques*, dans notre premier travail. D'autre part, pour abréger, par *système de triples*, ou *système cyclique*, nous entendrons toujours, dans la suite, un système cyclique de triples de Steiner.

(²) H.-S. White, *Trans. of the A. M. S.*, t. XIV, 1913, p. 13.

déductibles l'une de l'autre par une substitution métacyclique (¹). Nous l'admettrons pour la suite, jusqu'à démonstration ultérieure. On ne peut plus songer en effet à la vérification au moyen des trains de White pour un système de triples de chaque classe, comme elle a été faite dans notre premier travail, à cause du trop grand nombre des classes. D'autre part, il ne paraît pas possible d'aborder cette recherche des systèmes cycliques de triples différents par une autre voie, en tout cas, pas par une voie plus courte. C'est pourquoi à l'alternative d'abandonner cette recherche, nous avons préféré celle qui va suivre.

Les résultats d'ailleurs ont justifié notre peine. Pour $N = 7$, 13, 19, 25 et 31 éléments, la recherche directe des systèmes de caractéristiques et l'application du groupe $\{|x, \alpha x|\}$ aux systèmes cycliques de triples qui s'en déduisent, nous ont fourni les systèmes cycliques différents, *mais sans rendre compte des groupements très particuliers de ces systèmes*. Pour $N = 31$, les 2048 systèmes de triples existants donnaient 80 systèmes cycliques différents (80 classes de systèmes équivalents par les substitutions métacycliques); trois groupements de 16 systèmes étaient d'un même type, trois autres groupements de 8 systèmes d'un même type également, et deux groupements à part donnaient les 8 systèmes offrant le plus d'intérêt. Pour $N = 19$, les 4 systèmes de triples différents formaient deux groupements différents; de même les 12 systèmes différents pour $N = 25$ (²). A partir de $N = 31$, la recherche directe des systèmes de caractéristiques n'était plus possible. L'introduction du groupe que nous notons $\{|\underline{x}, \underline{\alpha x}|\}$ nous a du coup simplifié considérablement cette recherche, et rendu compte des groupements des systèmes cycliques différents. Nous ne cherchons

(¹) Je ne serais même pas surpris que le théorème soit déjà démontré, étant donné son importance en théorie des groupes. Je ne connais malheureusement pas assez la littérature de la théorie des groupes pour en décider. Quoi qu'il en soit, sa démonstration serait d'un intérêt essentiel dans le présent travail.

(²) Également dans la constitution des trains de White, apparaissaient nettement les groupements particuliers de ces systèmes. Les trains de White, appartenant aux systèmes d'un même groupement, semblaient dériver plus ou moins d'une même forme initiale, caractéristique de ce groupement [*voir* par exemple, dans les figures des trains pour $N = 19$ (fin du mémoire), les trains des systèmes a et a_1 d'une part et d et d_3 d'autre part].

plus que les systèmes de caractéristiques *non déductibles l'un de l'autre par les substitutions du groupe* $\{|\underline{x}, \underline{\alpha x}|\}$ et chacun d'eux se trouve déterminer directement *une famille de systèmes de triples différents à symétrie propre* (les groupements précédents pour $N = 31$, 19 et 25). Ces systèmes de caractéristiques fondamentaux [1] dont dépendent ainsi entièrement la répartition des systèmes de triples différents, et les groupes qu'ils possèdent apparaissent maintenant comme les éléments irréductibles du problème.

Dans un premier Chapitre, nous introduisons ce groupe $\{|\underline{x}, \underline{\alpha x}|\}$ et étudions son effet sur l'ensemble des caractéristiques. Dans un second Chapitre, nous faisons la recherche des systèmes de triples différents pour $N = 37$. Enfin, dans un dernier paragraphe, nous donnons les résultats de cette recherche pour $N = 43$.

Le groupe $|\underline{x}, \underline{\alpha x}|$ et son effet sur l'ensemble des caractéristiques.

1. La substitution $|x, \alpha x|$ des $6n$ éléments $1, 2, \ldots, 6n$, α racine primitive de N [appartenant à l'exposant $\varphi(N)$, mod N], transforme les trois triples d'une série qui contiennent l'élément o dans les trois triples contenant l'élément o de la série transformée.

Par suite, la substitution $|x, \alpha x|$ des $3n$ éléments $1, 2, \ldots, 3n$, dans laquelle nous remplaçons, non seulement chaque entier αx par son plus petit reste positif (mod N), mais encore chaque reste ainsi trouvé *a supérieur à* $\frac{1}{2}N$, *par son complément* $N - a$ [2] *inférieur à* $\frac{1}{2}N$, transforme *une caractéristique en une caractéristique.*

Nous noterons dorénavant par $\underline{a}$ l'élément a, chaque fois que nous entendons ainsi *la valeur absolue de son plus petit reste positif ou négatif* (mod N). Conséquemment, nous noterons par $|\underline{x}, \underline{\alpha x}|$ la substitution précédente.

---

[1] Nous les appelons dans la suite « systèmes de caractéristiques *différents* ».

[2] Pour un entier a compris entre o et N, nous appellerons *complément* de a le nombre $N - a$.

2. Si nous introduisons un signe quelconque, par exemple $\underline{=}$, pour cette relation entre les entiers a et $\underline{a}$ (mod N), $a \underline{=} \underline{a}$ (mod N), cette relation a en partie les propriétés d'une congruence ordinaire (mod N), c'est-à-dire, si $a \underline{=} b$ et $b \underline{=} c$,

$$a \underline{=} c \qquad (\text{mod N})$$

et vis-à-vis de la multiplication, si $a \underline{=} b$ et $c \underline{=} d$,

$$(1) \qquad ac \underline{=} bd \qquad (\text{mod N}),$$

et comme cas particulier, si $a \underline{=} b$, $m \underline{=} m$,

$$ma \underline{=} mb \qquad (\text{mod N}).$$

En effet, $a \underline{=} b$ (mod N) équivaut à $a \equiv \pm b$ (mod N), les deux autres congruences $\pm a \equiv b$ ne différant pas de ces deux premières.

De $a \equiv \pm b$ et $b \equiv \pm c$, il suit

$$a \equiv \pm c \qquad (\text{mod N}).$$

De $a \equiv \pm b$ et $c \equiv \pm d$, il suit

$$ac \equiv \pm bd \qquad (\text{mod N}).$$

Par contre, vis-à-vis de l'addition, la relation n'a plus nécessairement la propriété de la congruence (mod N) : si $a \equiv \pm b$ et $c \equiv \pm d$,

$$a + c \equiv \pm b \pm d,$$

mais la valeur absolue du second membre n'est pas toujours égale à $b + d$.

De la propriété (1) nous avons, s'appliquant plus directement à l'usage que nous allons en faire :

$$a \underline{=} \underline{a}, \quad b \underline{=} \underline{b}, \quad ab \underline{=} \underline{a}.\underline{b}, \quad \underline{ab} \underline{=} \underline{a}.\underline{b}$$

ou enfin

$$\underline{ab} = \underline{\underline{a}.\underline{b}}.$$

Autrement dit, les deux opérations $\underline{\underline{a}.\underline{b}}$ et $\underline{ab}$ donnent le même

résultat, et sont indifférentes à remplacer l'une par l'autre. D'où

$$\underline{a^n} \equiv (\underline{a})^n; \qquad \underline{a^n} = \underline{(\underline{a})^n} = \underline{\underline{(\underline{a})^{n-1}.\underline{a}}}, \qquad \ldots.$$

3. La substitution $|x, \alpha x|$ des $6n$ éléments $1, 2, \ldots, 6n$ est le cycle

$$(1\,\alpha^1\alpha^2\alpha^3 \ldots \alpha^{6n-1}) \quad \text{ou} \quad (\alpha^0\alpha^1\alpha^2 \ldots \alpha^{6n-1}).$$

La substitution $|\underline{x}, \underline{\alpha x}|$ des $3n$ éléments $1, 2, \ldots, 3n$ est le cycle

$$(1\,\underline{\alpha}\,\underline{\alpha^2}\,\underline{\alpha^3} \ldots \underline{\alpha^{3n-1}}) \quad \text{ou} \quad (\underline{\alpha^0}\,\underline{\alpha^1}\,\underline{\alpha^2} \ldots \underline{\alpha^{3n-1}}).$$

On a en effet :

$$\alpha^{3n} \equiv -1, \quad \alpha^{3n+\nu} \equiv -\alpha^\nu \quad (\text{mod } N);$$

les petits restes positifs des puissances $\alpha^{3n}, \alpha^{3n+1}, \ldots, \alpha^{6n-1}$ sont les compléments des plus petits restes positifs des $3n$ premières puissances. Les entiers $1, \underline{\alpha}, \underline{\alpha^2}, \ldots, \underline{\alpha^{3n-1}}$ sont donc les $3n$ éléments $1, 2, \ldots, 3n$.

Les $6n$ premières puissances de la substitution cyclique $s = |x, \alpha x|$ forment le groupe cyclique d'ordre $6n$: $\{|x, \alpha x|\}$. Celles de ces puissances dont l'exposant est premier avec $6n$ sont formées d'un seul cycle; elles sont évidemment les substitutions $|x, \alpha x|$ correspondant aux autres racines primitives de N. On sait d'ailleurs que les puissances α^ν, dont l'exposant ν est premier avec $6n$, sont congrues aux autres racines primitives de N.

Les $3n$ premières puissances de la substitution cyclique $\sigma = |\underline{x}, \underline{\alpha x}|$ forment le groupe cyclique d'ordre $3n$: $\{|\underline{x}, \underline{\alpha x}|\}$. Seules les puissances de σ, dont l'exposant est premier avec $3n$, sont formées d'un seul cycle, et correspondent aux autres racines primitives de N. Dans le cas où deux racines primitives de N, α et β sont complémentaires, $\beta = N - \alpha$, $\underline{\alpha} = \underline{\beta}$, $\underline{\alpha^2} = \underline{\beta^2}$, etc., et les deux substitutions correspondantes sont identiques [1].

---

[1] Les racines primitives sont complémentaires deux à deux ou non complémentaires, selon que le nombre premier est de la forme $4n + 1$ ou $4n - 1$. Cette remarque que je n'ai pu retrouver dans les *Disquisitiones arithmeticæ*, de Gauss, se trouve démontrée ici très simplement, en passant, pour les nombres

4. Les deux groupes cycliques $\{|x, \alpha x|\}$ et $\{|\underline{x}, \underline{\alpha x}|\}$ sont *réguliers transitifs :* leur ordre est égal à leur degré, chacune de leurs substitutions est formée de cycles égaux (contenant le même nombre d'éléments) et déplace tous les éléments, et par les substitutions du groupe, chaque élément se trouve successivement transformé en tous les autres. On sait qu'un groupe régulier transitif d'ordre N est *imprimitif;* chacune de ses substitutions donne une répartition des N éléments en systèmes imprimitifs, constitués directement par les éléments de chaque cycle.

5. Le groupe cyclique d'ordre $3n$: $\{|\underline{x}, \underline{\alpha x}|\}$ contient la substitution suivante, qui est la puissance n de la substitution $\sigma = |\underline{x}, \underline{\alpha x}|$:

$$(2) \qquad (\underline{\alpha^0}\,\underline{\alpha^n}\,\underline{\alpha^{2n}})(\underline{\alpha^1}\,\underline{\alpha^{n+1}}\,\underline{\alpha^{2n+1}})\ \ldots\ (\underline{\alpha^{n-1}}\,\underline{\alpha^{2n-1}}\,\underline{\alpha^{3n-1}}).$$

Le système imprimitif constitué par chacun de ces cycles est une *caractéristique.* En effet, α étant toujours une racine primitive de N, les trois triples formés avec l'élément o :

$$o\,\alpha^\nu\,\alpha^{n+\nu}, \quad o\,\alpha^{2n+\nu}\,\alpha^{3n+\nu}, \quad o\,\alpha^{4n+\nu}\,\alpha^{5n+\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

appartiennent à la même série cyclique [1]. Trois des six éléments α^ν, $\alpha^{n+\nu}$, $\alpha^{2n+\nu}$, $\alpha^{3n+\nu}$, $\alpha^{4n+\nu}$, $\alpha^{5n+\nu}$ sont les compléments des trois autres et inférieurs à $\frac{1}{2}$N (d'après 3°, introduction); ils ne peuvent être que les trois éléments $\underline{\alpha^\nu}$, $\underline{\alpha^{n+\nu}}$, $\underline{\alpha^{2n+\nu}}$, puisque $\alpha^{3n+\nu} \equiv -\alpha^\nu$, $\alpha^{4n+\nu} \equiv -\alpha^{n+\nu}$, $\alpha^{5n+\nu} \equiv -\alpha^{2n+\nu}$, et le triple $\underline{\alpha^\nu}\,\underline{\alpha^{n+\nu}}\,\underline{\alpha^{2n+\nu}}$ est la caractéristique de cette

---

premiers de la forme $6n+1$, par le fait que les racines primitives seront complémentaires ou non, selon que

$$\varphi(3n) = \frac{1}{2}\varphi(6n) \qquad \text{ou} \qquad \varphi(3n) = \varphi(6n).$$

Or on a $\varphi(3n) = \frac{1}{2}\varphi(6n)$ pour n pair, c'est-à-dire pour les nombres premiers $6n+1$ de la forme $12n'+1 = 4n''+1$, et $\varphi(3n) = \varphi(6n)$ pour n impair, c'est-à-dire pour les nombres premiers $6n+1$ de la forme $12n'-5 = 4n''-1$.

[1] La construction du système cyclique de Netto est déjà l'application directe de cette propriété (*voir* notre premier travail, page 57). Il est d'ailleurs facile et court de répéter ici la démonstration. Les trois triples contenant l'élément o dans

série cyclique. Les cycles de la substitution (2) sont donc des caractéristiques, et constituent un système de n caractéristiques sans élément commun. Nous l'appellerons le *système des caractéristiques imprimitives*.

6. La démonstration donnée ne fait aucune restriction sur l'entier positif ν, et le triple $\underline{\alpha^\nu}\,\underline{\alpha^{n+\nu}}\,\underline{\alpha^{2n+\nu}}$ est encore une caractéristique quel que soit $\nu \gtreqless n$. Cette caractéristique est aussi toujours l'une des caractéristiques imprimitives (2). En effet soit ν' un entier positif $\gtreqless n$; l'élément $\underline{\alpha^{\nu'}}$ est contenu dans l'une des caractéristiques (2). Supposons par exemple $\underline{\alpha^{\nu'}} = \underline{\alpha^{2n+\nu}}$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$), ce qui signifie

$$\alpha^{\nu'} \equiv \pm\, \alpha^{2n+\nu};$$

on aura

$$\alpha^{n+\nu'} \equiv \pm\, \alpha^{3n+\nu} \equiv \mp\, \alpha^{\nu}; \qquad \alpha^{2n+\nu'} \equiv \pm\, \alpha^{4n+\nu} \equiv \mp\, \alpha^{n+\nu} \qquad (\text{mod } N),$$

c'est-à-dire

$$\underline{\alpha^{n+\nu'}} = \underline{\alpha^{\nu}}; \qquad \underline{\alpha^{2n+\nu'}} = \underline{\alpha^{n+\nu}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans ce cas,

$$\underline{\alpha^{\nu'}},\ \underline{\alpha^{n+\nu'}},\ \underline{\alpha^{2n+\nu'}};\quad \underline{\alpha^{\nu'+1}},\ \underline{\alpha^{n+\nu'+1}},\ \underline{\alpha^{2n+\nu'+1}};\quad \ldots;\quad \underline{\alpha^{\nu'+n-1}},\ \underline{\alpha^{\nu'+2n-1}},\ \underline{\alpha^{\nu'+3n-1}}$$

sont évidemment de nouveau les n caractéristiques imprimitives différentes.

7. La substitution $|x, \alpha^{2n}x|$ transforme la série cyclique qui contient les trois triples

$$0,\ \alpha^{\nu},\ \alpha^{n+\nu};\quad 0,\ \alpha^{2n+\nu},\ \alpha^{3n+\nu};\quad 0,\ \alpha^{4n+\nu},\ \alpha^{5n+\nu}$$

en elle-même. On a donc le théorème :

---

la série déterminée par 0, α^{ν}, $\alpha^{n+\nu}$ sont :

$$0,\ \alpha^{\nu},\ \alpha^{n+\nu};\quad -\alpha^{\nu},\ 0,\ -\alpha^{\nu}+\alpha^{n+\nu};\quad -\alpha^{n+\nu},\ -\alpha^{n+\nu}+\alpha^{\nu},\ 0.$$

Au moyen des congruences, faciles à établir,

$$\alpha^{3n+\nu} \equiv -\alpha^{\nu}, \qquad \alpha^{n+\nu} - \alpha^{\nu} \equiv \alpha^{2n+\nu} \qquad (\text{mod } N);$$

on voit immédiatement qu'ils peuvent s'écrire :

$$0,\ \alpha^{\nu},\ \alpha^{n+\nu};\quad 0,\ \alpha^{2n+\nu},\ \alpha^{3n+\nu};\quad 0,\ \alpha^{4n+\nu},\ \alpha^{5n+\nu}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Les 2^n systèmes cycliques, déterminés par le système des caractéristiques imprimitives, possèdent chacun le diviseur métacyclique d'ordre $3n$:

$$\{|x, 1+x|, |x, \alpha^{2n}x|\}.$$

De ce résultat découlera plus loin une conséquence importante.

8. Soit maintenant une *autre* caractéristique quelconque. Nous pouvons l'écrire

$$\underline{\alpha^a}, \underline{\alpha^b}, \underline{\alpha^c} \quad [a, b, c = 0, 1, 2, \ldots, 3n-1, \text{ et incongrus entre eux } (\bmod n)] \text{ (}^1\text{)}.$$

Les puissances de la substitution $|\underline{x}, \underline{\alpha x}|$ la transforme en $3n$ caractéristiques *différentes :*

$$(3) \qquad \underline{\alpha^a}, \underline{\alpha^b}, \underline{\alpha^c}; \quad \underline{\alpha^{a+1}}, \underline{\alpha^{b+1}}, \underline{\alpha^{c+1}}; \quad \ldots; \quad \underline{\alpha^{a+3n-1}}, \underline{\alpha^{b+3n-1}}, \underline{\alpha^{c+3n-1}}.$$

En effet, si la même caractéristique se retrouvait deux fois dans cet ensemble, il y aurait deux puissances différentes de $|\underline{x}, \underline{\alpha x}|$ transformant $\underline{\alpha^a}$, $\underline{\alpha^b}$, $\underline{\alpha^c}$ dans la même caractéristique. Par suite, une puissance autre que l'identité transformerait $\underline{\alpha^a}$, $\underline{\alpha^b}$, $\underline{\alpha^c}$ en elle-même, et contiendrait donc le cycle $(\underline{\alpha^a}\,\underline{\alpha^b}\,\underline{\alpha^c})$ ou son inverse. Or il n'y a que deux puissances de $|\underline{x}, \underline{\alpha x}|$ contenant des cycles de trois éléments, la substitution (2) et son inverse, qui ont pour cycle les caractéristiques imprimitives. Mais, par hypothèse, $\underline{\alpha^a}$, $\underline{\alpha^b}$, $\underline{\alpha^c}$ n'est pas une caractéristique imprimitive.

9. Les $3n$ caractéristiques (3) se répartissent en *n ensembles* ou *carrés* de trois caractéristiques chacun, qui sont imprimitifs vis-à-vis des substitutions du groupe cyclique $\{|\underline{x}, \underline{\alpha x}|\}$. Ces carrés sont :

$$(4) \quad \begin{cases} \underline{\alpha^a}, \quad \underline{\alpha^b}, \quad \underline{\alpha^c}; & \underline{\alpha^{a+1}}, \quad \underline{\alpha^{b+1}}, \quad \underline{\alpha^{c+1}}; & \ldots; \quad \underline{\alpha^{a+n-1}}, \underline{\alpha^{b+n-1}}, \underline{\alpha^{c+n-1}}; \\ \underline{\alpha^{a+n}}, \underline{\alpha^{b+n}}, \underline{\alpha^{c+n}}; & \underline{\alpha^{a+n+1}}, \underline{\alpha^{b+n+1}}, \underline{\alpha^{c+n+1}}; & \ldots; \quad \underline{\alpha^{a+2n-1}}, \underline{\alpha^{b+2n-1}}, \underline{\alpha^{c+2n-1}}; \\ \underline{\alpha^{a+2n}}, \underline{\alpha^{b+2n}}, \underline{\alpha^{c+2n}}; & \underline{\alpha^{a+2n+1}}, \underline{\alpha^{b+2n+1}}, \underline{\alpha^{c+2n+1}}; & \ldots; \quad \underline{\alpha^{a+3n-1}}, \underline{\alpha^{b+3n-1}}, \underline{\alpha^{c+3n-1}}. \end{cases}$$

---

(1) a, b, c peuvent d'ailleurs aussi bien être pris *quelconques;* ils sont seulement les trois incongrus entre eux (mod n).

Dans chacun de ces carrés, trois éléments disposés verticalement forment de nouveau une caractéristique imprimitive (§ **6**). Si nous représentons chacune des n caractéristiques imprimitives :

$$\underline{\alpha^0}, \underline{\alpha^n}, \underline{\alpha^{2n}} : \quad \underline{\alpha^1}, \underline{\alpha^{n+1}}, \underline{\alpha^{2n+1}} ; \quad \ldots ; \quad \underline{\alpha^{n-1}}, \underline{\alpha^{2n-1}}, \underline{\alpha^{3n-1}},$$

par le chiffre de son rang d'ordre :

$$\mathbf{1}, \ \mathbf{2}, \ \ldots, \ \mathbf{n},$$

les carrés précédents, en commençant par celui où, par exemple dans la troisième rangée verticale, se trouve la première caractéristique imprimitive $\underline{\alpha^0}$, $\underline{\alpha^n}$, $\underline{\alpha^{2n}}$, sont représentés par :

$$(5) \qquad \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{1}; \quad \mathbf{p}+\mathbf{1}, \mathbf{q}+\mathbf{1}, \mathbf{2}; \quad \ldots; \quad \mathbf{p}+\mathbf{n}, \mathbf{q}+\mathbf{n}, \mathbf{n},$$

p et **q** étant deux des nombres **1**, **2**, ..., **n**, et en entendant par chacun de ces entiers son plus petit reste positif (mod n).

Le groupe des permutations des carrés (4) ou des nouveaux triples (5), par les substitutions du groupe cyclique $\{|\underline{x}, \underline{\alpha x}|\}$, est isomorphe au groupe cyclique $\{(\mathbf{1}\,\mathbf{2}\,\mathbf{3} \ldots \mathbf{n})\}$.

Remarquons de suite que, lorsque dans les triples (5) les trois éléments sont différents, les neuf éléments dans les carrés correspondants sont différents et peuvent servir à construire un système de caractéristiques. Cela se produit chaque fois que les trois éléments de la première caractéristique $\underline{\alpha^a}$, $\underline{\alpha^b}$, $\underline{\alpha^c}$ sont choisis dans trois caractéristiques imprimitives différentes. Par contre, lorsque deux des éléments de la caractéristique $\underline{\alpha^a}$, $\underline{\alpha^b}$, $\underline{\alpha^c}$ appartiennent à la même caractéristique imprimitive, dans les triples (5) deux éléments sont égaux, et dans un système de caractéristiques, il ne pourra pas entrer deux caractéristiques appartenant au même carré (4).

Recherche des systèmes cycliques de triples différents pour $N = 37$.

10. La recherche des systèmes de caractéristiques est maintenant considérablement simplifiée. Sans chercher à exprimer le procédé sous une forme générale, nous allons l'appliquer directement au cas de $N = 37$ éléments.

Pour $N = 37$, $n = 6$, le nombre des caractéristiques est

$$\frac{(N-1)(N-5)}{12} = 96 \quad (^1).$$

2 est racine primitive de 37. La substitution $|\underline{x}, \underline{2x}|$ est (²)

$$(1\,2\,4\,8\,6'\,5\,0'\,7'\,3\,6\,2'\,3'\,1'\,5'\,7\,4'\,9\,8').$$

Si nous disposons ces caractéristiques en *colonnes* de $3n = 18$ caractéristiques, invariante chacune par les substitutions du groupe cyclique $\{|\underline{x}, \underline{2x}|\}$, comme il a été dit aux paragraphes **8** et **9**, nous avons le tableau suivant (³) :

Caractéristiques imprimitives : 1 0′ 1′. 2 7′ 5′. 4 3 7. 8 6 4′. 6′ 2′ 9, 5 3′ 8′.

	Colonnes.....	I.	II.	III.	IV.	V.
	1	2′ 3′ 1	5′ 4′ 1	7 8 1	7 6 1	0′ 9 1
	7	9 8′ 0′	2 8 0′	4 6 0′	4 4′ 0′	1′ 6′ 0′
	3′	6′ 5 1′	7′ 6 1′	3 4′ 1′	3 8 1′	1 2′ 1′
	2	3′ 1′ 2	7 9 2	4′ 6′ 2	4′ 2′ 2	7′ 8′ 2
	8	8′ 1 7′	4 6′ 7′	8 2′ 7′	8 9 7′	5′ 5 7′
	4′	5 0′ 5′	3 2′ 5′	6 9 5′	6 6′ 5′	2 3′ 5′
	3	1′ 5′ 4	4′ 8′ 4	9 5 4	9 3′ 4	3 1 4
	9	1 2 3	8 5 3	6′ 3′ 3	6′ 8′ 3	7 0′ 3
	5′	0′ 7′ 7	6 3′ 7	2′ 8′ 7	2′ 5 7	4 1′ 7
(6)	4	5′ 7 8	9 1 8	8′ 0′ 8	8′ 1′ 8	6 2 8
	0′	2 4 6	6′ 0′ 6	5 1′ 6	5 1 6	4′ 7′ 6
	6′	7′ 3 4′	2′ 1′ 4′	3′ 1 4′	3′ 0′ 4′	8 5′ 4′
	5	7 4′ 6′	8′ 2 6′	1 7′ 6′	1 5′ 6′	2′ 4 6′
	1′	4 8 2′	5 7′ 2′	0′ 5′ 2′	0′ 2 2′	9 3 2′
	7′	3 6 9	3′ 5′ 9	1′ 2 9	1′ 7′ 9	6 7 9
	6	4′ 9 5	1 4 5	2 3 5	2 7 5	3′ 8 5
	2′	8 6′ 3′	0′ 3 3′	7′ 7 3′	7′ 4 3′	8′ 6 3′
	8′	6 2′ 8′	1′ 7 8′	5′ 4 8′	5′ 3 8′	5 4′ 8′

(¹) Voir notre premier travail, première partie, p. 60. Le nombre des caractéristiques est égal au nombre des triples situés à l'intérieur du triangle AOC′. Le nombre des triples situés sur une médiane est $\frac{N-1}{2}$. Celui des triples situés à l'intérieur du triangle AOB est $\frac{(N-1)(N-2)}{6} - \frac{N-1}{2} = \frac{(N-1)(N-5)}{6}$. Celui des caractéristiques sera $\frac{(N-1)(N-5)}{12}$.

(²) Les éléments 10, 11, ..., 18 sont notés 0′, 1′, ..., 8′.

(³) Nous indiquons par les chiffres placés à gauche de la barre verticale le rang d'ordre des caractéristiques, dans leur déduction de la caractéristique de tête correspondante par les puissances de $|\underline{x}, \underline{2x}|$.

et en représentant chaque caractéristique imprimitive par son rang d'ordre, comme plus haut :

Colonnes.....	I.	II.	III.	IV.	V.
	561	241	341	341	151
	612	352	452	452	262
(7)	123	463	563	563	313
	234	514	614	614	424
	345	625	125	125	535
	456	136	236	236	646

Nous avons disposé ici verticalement les carrés (4) et les triples (5) écrits horizontalement dans le paragraphe **9**. A cela près, nous avons suivi *en tout* l'ordre des notations précédentes, en faisant $\alpha = 2$, par exemple pour l'ordre des éléments dans les caractéristiques imprimitives, etc.

Nous avons commencé, dans chaque colonne, la rangée verticale de droite par la caractéristique imprimitive $\underline{2}^0$, $\underline{2}^6$, $\underline{2}^{12}$, comme dans les triples (5).

11. L'existence et les propriétés de ces colonnes sont, en principe, *indépendantes* du nombre $N = 6n + 1$, premier (ou de la forme p^m). En effet, les puissances de la substitution $|\underline{x}, \underline{\alpha x}|$ sont les substitutions $|\underline{x}, \underline{mx}|$, m entier positif quelconque, et une caractéristique $a, b, a + b\ (a + b \overline{\gtrless} 3n)$, pour N éléments, est encore une caractéristique pour un N supérieur. Cette étude des propriétés de l'ensemble des caractéristiques, au moyen du groupe $\{|\underline{x}, \underline{\alpha x}|\}$, fera l'objet d'un autre travail. Nous remarquons ici seulement que :

La colonne V a deux éléments appartenant à la même caractéristique imprimitive dans la caractéristique de tête [ou deux éléments égaux dans les triples (7)]; dans un système de caractéristiques, il n'entrera donc pas deux caractéristiques appartenant au même de ses carrés.

Les colonnes III et IV ne diffèrent que par le déplacement d'un élément dans la rangée verticale du milieu ($\underline{2}^3 = 8$ et $\underline{2}^9 = 6$); leurs carrés homologues ont ainsi les mêmes éléments et peuvent se substituer l'un à l'autre pour construire un système de caractéristiques.

La colonne I présente, pour le moment du moins, le plus d'intérêt. Ses deux premières rangées verticales contiennent les $3n$ couples qui n'entrent qu'une fois dans une caractéristique, tandis que les autres couples des éléments $1, 2, \ldots, 3n$ entrent chacun dans deux caractéristiques de l'ensemble. Cela permet déjà d'établir quelques théorèmes relatifs au groupe de substitutions qui appartient à l'ensemble des caractéristiques. Nous indiquerons le premier :

Pour $N = 6n + 1$ *premier, pour lequel* $3n$ *est le plus petit exposant qui rend* $\underline{2^{3n}} = 1 \pmod{N}$, *le groupe qui appartient à l'ensemble des caractéristiques est le groupe* $\{|\underline{x}, \underline{\alpha x}|\}$, α *racine primitive de* N.

12. Tout système de caractéristiques qui contient une caractéristique imprimitive, ou une caractéristique de l'une des colonnes, se transforme par une puissance de $|\underline{x}, \underline{2x}|$ en un système qui contient une caractéristique imprimitive donnée, ou une caractéristique fixée de cette colonne. Il nous suffira donc d'obtenir, par exemple, les systèmes contenant la caractéristique imprimitive $10'1'$, et pour chaque colonne ceux contenant la caractéristique de tête; avec les substitutions du groupe $\{|\underline{x}, \underline{2x}|\}$, nous en déduirons tous les systèmes de caractéristiques possibles. Nous appellerons systèmes de caractéristiques *différents*, ceux qui ne sont pas équivalents par les substitutions du groupe $\{|\underline{x}, \underline{2x}|\}$; nous verrons que, aussi dans la suite, ce sont les seuls qu'il nous importe de connaître.

13. Voici le tableau de ces systèmes différents pour notre cas de $N = 37$. Le procédé suivi pour les obtenir découle à peu près déjà de l'ordre dans lequel ils sont écrits; nous donnons d'ailleurs en Note plus bas le détail de la recherche. Les systèmes 1, 2, 3, 4, 5, 12, 13 et 14 s'obtiennent et s'écrivent sans autre; pour les autres, nous notons les caractéristiques par le chiffre de leur colonne et en indice leur rang d'ordre [écrit à gauche dans le tableau (6)] dans leur déduction de la caractéristique de tête par les puissances de $|\underline{x}, \underline{2x}|$. Le groupe $\{(123\ldots3n)\}$ est isomorphe au groupe $\{|\underline{x}, \underline{2x}|\}$. Lorsque, dans une

colonne, deux caractéristiques appartiennent au même carré, elles sont entre parenthèses.

A. — *Systèmes contenant des caractéristiques imprimitives.*

								Systèmes équivalents.
1.	Le système des caractéristiques imprimitives							1
2.	Trois caractéristiques imprimitives et le carré de la colonne I contenant les trois autres							6
3, 4, 5.	Même formation avec un carré des colonnes II, III et IV							18
6.	Deux caractéristiques imprimitives	$10'1'$, $27'5'$, I_5, $I_{8'}$, II_9, IV_3						18
7.		$10'1'$, $86\,4'$, II_5, $II_{4'}$, III_3, $III_{2'}$						9
8.	Une caractéristique imprimitive	$10'1'$	I_6	–	$III_{2'}$	$IV_{8'}$	$V_4 V_5$	18
9.		–	–	$II_{4'}$	–	$IV_{2'}$	$V_4 V_{7'} V_{8'}$	18
10.		–	I_5	$II_{1'}$	–	$IV_{3'} IV_{8'}$	V_4	18
11.		–	–	$II_{5'}$	$(III_2 III_8) III_3$	$IV_{8'}$	–	18

B. — *Systèmes ne contenant pas de caractéristiques imprimitives.*

12.	Le système des premier et quatrième carrés de la colonne I							3
13, 14.	Les deux systèmes formés du premier carré de II et du troisième carré de III ou IV							12
15.	Systèmes contenant au moins deux caractéristiques de la colonne V	$I_{3'}$	$II_3 II_{4'}$	$III_{2'}$	–	$V_1 V_4$		18
16.		–	$II_9 II_{8'}$	–	–	$V_1 V_{0'} V_5 V_4$		9
17.		$I_{0'} I_{2'}$	–	$III_{3'} III_{5'}$	–	$V_1 V_8$		18
18.		$I_{1'}$	$II_5 II_{5'}$	$III_{3'}$	–	$V_1 V_8$		18
19.		$I_3 I_{2'}$	–	$III_6 III_{5'}$	–	$V_1 V_{0'}$		9
20.	Systèmes contenant deux caractéristiques de la colonne I, et non obtenus dans les précédents	$(I_3 I_{5'}) I_1 I_6$	–	–	IV_9	V_4		18
21.		$I_1 I_4$	$II_{0'}$	$III_3 III_{3'}$	–	V_2		18
22.		$I_1 I_5$	$II_3 II_{0'}$	III_6	$IV_{7'}$	–		18
23.		$I_1 I_5$	$(II_7 II_{3'})$	III_3	$IV_{8'}$	–		18
24.	Systèmes contenant deux caractéristiques de la colonne II, non encore obtenus	–	$II_1 II_5$	$III_8 III_{0'}$	IV_3	V_9		18
25.		$I_{8'}$	$II_1 II_2 II_{1'}$	–	$IV_{2'}$	V_7		18
26.		–	$II_1 II_2 II_9$	$III_7 III_9$	IV_4	–		18
27.		–	$II_1 II_{0'}$	–	$(IV_3 IV_{5'}) IV_{3'}$	V_2		18
28.	Systèmes contenant deux caractéristiques de la colonne III, non encore obtenus	I_7	$II_{4'}$	$III_1 III_2 III_{0'}$	$IV_{2'}$	–		18
29.		I_2	–	$III_1 III_3 III_{1'}$	IV_9	$V_{0'}$		18
30.		I_7	$II_{6'}$	$III_1 III_6$	$IV_{2'} IV_{4'}$	–		18
31.	Systèmes contenant deux caractéristiques de la colonne IV, non encore obtenus	$I_{3'}$	$II_{2'}$	$III_{8'}$	$IV_1 (IV_2 IV_8)$	–		18
32.		$I_{4'}$	–	III_2	$IV_1 IV_{7'} IV_{2'}$	$V_{1'}$		18
						Total		445

Nous indiquons à droite, pour chaque système différent, le nombre des systèmes équivalents par les 18 substitutions du groupe $\{|\underline{x}, \underline{2x}|\}$. Dès qu'un système n'a qu'une caractéristique dans l'une des colonnes,

il a nécessairement 18 systèmes équivalents; dans les quelques autres cas (2, 3, 4, 5, 7, 12, 13, 14, 16, 19), le nombre des systèmes équivalents est ou immédiatement donné, ou immédiatement déterminable par les caractéristiques d'une colonne (*voir* la Note).

Note contenant le détail de la recherche. — 1. Un système ne peut contenir *cinq caractéristiques imprimitives* sans contenir la sixième.

2. Un système ne peut contenir *quatre caractéristiques imprimitives*, car les deux autres caractéristiques ne pourraient être prises que dans la colonne V, les deux dans le même carré, ce qui est impossible, ou chacune dans un carré différent, ce qui est également impossible [deux triples (7) dans la même colonne ont toujours au moins trois éléments différents].

3. Un système qui contient *trois caractéristiques imprimitives* ne peut être complété qu'avec le carré, qui contient les trois autres caractéristiques imprimitives, si ce carré existe. Car, dans le cas contraire, il faudrait le compléter avec des caractéristiques prises dans deux ou trois carrés différents des colonnes I à V, et n'ayant aucun des éléments des trois caractéristiques imprimitives données. Il faudrait donc que les triples (7), représentant ces deux ou trois carrés, ne contiennent que les mêmes trois éléments. Or, dans les colonnes (7), il n'y a :

Deux triples contenant les mêmes éléments que dans la troisième et la quatrième, chaque triple de l'une avec l'homologue de l'autre, et dans ce cas, il n'est possible que d'y prendre deux caractéristiques sans élément commun;

Deux ou trois triples formés des mêmes trois éléments que dans la dernière, les trois triples **151**, **313**, **535** ou **262**, **424**, **646**, et dans ce cas encore, on voit immédiatement qu'on ne peut y trouver une caractéristique dans chacun des trois triples, sans avoir deux fois le même élément.

4. Inversement, un système construit avec un carré de l'une des colonnes I, II, III, IV ne peut être complété qu'avec trois caractéristiques imprimitives, ou avec le carré constitué de ces trois caractéristiques imprimitives, si ce carré existe. Autrement le système est impossible, pour les mêmes raisons que celles de la démonstration précédente.

5. La recherche des systèmes différents contenant *deux caractéristiques imprimitives* se réduit à ceci : les couples des éléments **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, représentant les caractéristiques imprimitives, se répartissent en trois séries imprimitives :

12, **23**, **34**, **45**, **56**, **61**,
13, **24**, **35**, **46**, **51**, **62**,
14, **25**, **36**,

par les substitutions du groupe $\{(\mathbf{123456})\}$, triplement isomorphe au

groupe $\{|\underline{x}, \underline{2x}|\}$. Il nous suffit donc d'obtenir les systèmes possibles avec les couples de caractéristiques imprimitives **12**, **13**, **14**.

6. La recherche des systèmes contenant *une caractéristique imprimitive*, $10'1'$, est un peu plus longue. Il suffit naturellement d'essayer avec $10'1'$ une seule caractéristique de chaque carré, dont le triple (7) ne contient pas l'élément **1**.

7. Un système, qui ne contient plus de caractéristiques imprimitives, contient nécessairement *deux caractéristiques* de l'une au moins des colonnes I à V. *Représentons les caractéristiques* d'une colonne *par leur rang d'ordre*, dans leur déduction de la caractéristique de tête. Les substitutions du groupe $\{(1\,2\,3\ldots 8')\}$, isomorphe au groupe $\{|\underline{x}, \underline{2x}|\}$, laissent imprimitifs les couples suivants des éléments $1, 2, \ldots, 8'$, contenant l'élément 1 :

$$12,\quad 13,\quad 14,\quad 15,\quad 16,\quad 17,\quad 18,\quad 19,\quad 10'.$$

De ces couples de caractéristiques, les seuls à prendre en considération dans notre recherche, parce que contenant six éléments différents, sont :

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{lllllll} \text{Pour la colonne I.....} & 13, & 14, & 15, & 16, & 17, & 10'. \\ \text{» II....} & 12, & 15, & 17, & 18, & 19, & 10'. \\ \text{» III...} & 12, & 13, & 16, & 17, & 19, & 10'. \\ \text{» IV...} & 12, & 13, & 14, & 17, & 18, & 19. \\ \text{» V....} & 12, & 14, & 15, & 16, & 18, & 10'. \end{array}\right.$$

Nous avons effectué la recherche avec les colonnes dans cet ordre : V, I, II, III, IV, en essayant donc successivement chacun des couples précédents de caractéristiques de la colonne V, puis de la colonne I, II, etc. Dès que l'on a deux caractéristiques données, il est vite fait d'éliminer (dans la même colonne et dans les quatre autres) les caractéristiques ayant avec elles un élément commun ; il ne reste jamais qu'un nombre restreint de caractéristiques, et la recherche pour chacun des couples (8) est l'affaire de quelques instants.

Le procédé a en outre l'avantage de se vérifier lui-même. En effet, chaque système doit être trouvé plus d'une fois dans cette recherche. Par exemple, le système 16 doit être trouvé quatre fois dans la recherche pour la colonne V [car la combinaison d'indices $10'54'$, par les substitutions du groupe $\{(1\,2\,3\ldots 8')\}$, prend les deux formes contenant 1, $10'54'$ et $10'65'$, et le système doit être trouvé deux fois avec le couple (8) $10'$, une fois avec le couple 15 et une fois avec le couple 16] et une fois dans la recherche pour la colonne II. Il est aisé d'établir combien de fois et où chaque système doit être trouvé, et si, la recherche faite, chaque système a été trouvé en place et le nombre de fois voulu, on peut être sûr de l'opération.

La recherche des systèmes contenant des caractéristiques imprimitives a été

vérifiée également, en la répétant une seconde fois avec des caractéristiques imprimitives différentes.

14. Soit maintenant l'un quelconque des 32 systèmes de caractéristiques différents, que nous venons d'obtenir. Représentons ses six caractéristiques par les lettres

$$(9) \qquad a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f.$$

Chacune de ces caractéristiques détermine les deux séries cycliques conjuguées correspondantes, et le système donne 2^6 systèmes cycliques de triples de Steiner. Soit l'un quelconque de ces systèmes :

$$(10) \qquad \mathrm{A}, \quad \mathrm{B}, \quad \mathrm{C}, \quad \mathrm{D}, \quad \mathrm{E}, \quad \mathrm{F}.$$

Nous représentons par A, B, ..., F ses séries cycliques. Rappelons que les substitutions $|x, \alpha x|$ et $|\underline{x}, \underline{\alpha x}|$ changent respectivement une série cyclique en une série cyclique et la caractéristique de la première dans la caractéristique de la seconde.

Lorsque la substitution $|\underline{x}, \underline{2x}|$ transforme le système de caractéristiques (9) en un système de caractéristiques :

$$(11) \qquad a', \quad b', \quad c', \quad d', \quad e', \quad f',$$

la substitution $|x, 2x|$ transforme le système de triples (10) en un système de triples :

$$(12) \qquad \mathrm{A}', \quad \mathrm{B}', \quad \mathrm{C}', \quad \mathrm{D}', \quad \mathrm{E}', \quad \mathrm{F}',$$

dont les caractéristiques sont les caractéristiques précédentes. Inversement, lorsque la substitution $|x, 2x|$ transforme le système de triples (10) en un système de triples (12), la substitution $|\underline{x}, \underline{2x}|$ transforme les caractéristiques (9) dans les caractéristiques (11).

Admettons maintenant le théorème que deux systèmes cycliques de triples équivalents sont déductibles l'un de l'autre par une substitution métacyclique, et rappelons les données de l'introduction [1]. Nous avons les résultats suivants :

---

[1] Le groupe métacyclique est produit par les deux substitutions $|x, 1+x|$ et $|x, \alpha x|$. La substitution $|x, 1+x|$ laisse invariable le système cyclique de

1° Deux systèmes de triples déterminés par deux systèmes de caractéristiques différents sont *différents*. Autrement, une puissance de $|x, 2x|$ transformerait l'un des systèmes de triples dans l'autre, et une puissance de $|\underline{x}, \underline{2x}|$ transformerait l'un dans l'autre les deux systèmes de caractéristiques correspondants.

2° Si la première puissance de $|\underline{x}, \underline{2x}|$ qui transforme le système de caractéristiques (9) en lui-même, est

$$|\underline{x}, \underline{2x}|^{3n} = |\underline{x}, \underline{2^{3n}x}| = |\underline{x}, \underline{x}|,$$

la première puissance de $|x, 2x|$, qui transforme le système de triples (10) en un système de mêmes caractéristiques, est

$$|x, 2x|^{3n} = |x, -x| = |x, \mathrm{N} - x|.$$

Cette puissance $|x, 2x|^{3n}$ transforme le système (10) dans le système conjugué (¹), et la puissance $|x, 2x|^{6n}$ le transforme en lui-même. Le système de triples (10) ne possède alors que le diviseur cyclique $\{|x, 1+x|\}$ (²) et 2^5 *systèmes de triples* déterminés par les caractéristiques (9) sont nécessairement *différents*.

3° Si la première puissance de $|\underline{x}, \underline{2x}|$, qui transforme le système de caractéristiques (9) en lui-même, est $|\underline{x}, \underline{2x}|^d$, $d < 3n$ et diviseur de $3n$, $|x, 2x|^d$ est la première puissance de $|x, 2x|$, qui transforme le système de triples (10) en un système de mêmes caractéristiques. Ce système de triples transformé n'est pas le système (10) lui-même, d étant diviseur de $3n$, car $|x, 2x|^{3n}$ transformerait le système (10) en

---

triples. Par suite, avec le théorème admis, deux systèmes cycliques équivalents sont déductibles l'un de l'autre par une puissance de $|x, \alpha x|$. Autrement dit, les systèmes de triples qui ne se trouvent pas dans les transformées de (10), par les puissances de $|x, 2x|$, sont *différents* du système (10).

(¹) Nous appelons systèmes *conjugués*, les deux systèmes de triples formés des séries respectivement conjuguées. Rappelons encore qu'une substitution métacyclique change deux séries conjuguées en deux séries conjuguées (Introduction, 4°), et donc deux systèmes cycliques conjugués en deux systèmes conjugués.

(²) En tant que substitutions du groupe métacyclique, mais je ne puis pas assurer qu'il n'y a pas de substitutions, autres que métacycliques, qui transforment le système (10) en lui-même.

lui-même, ce qui n'est pas. Il n'est pas non plus le conjugué du système (10), si $2d$ est diviseur de $3n$, pour la même raison qu'avant, puisque dans ce cas $|x, 2x|^{2d}$ transformerait le système (10) en lui-même.

Pour $n = 6$, $3n = 18$, $2d$ est diviseur de $3n$ pour les diviseurs $d = 1, 3, 9$. Donc le 1er, le 3e et le 9e transformé d'un système (10) par la substitution $|x, 2x|$, ne peuvent être le conjugué de ce système (10). Il reste les diviseurs 2 et 6; seuls le 2e et le 6e transformé d'un système (10), peuvent être, avant le 18e, le conjugué de (10) (1).

15. Par conséquent, pour les systèmes de caractéristiques suivants, le système (9) étant successivement chacun de ces systèmes, nous aurons :

Systèmes 7, 16, 19; $d = 9$. — Le 9e transformé d'un système (10) par $|x, 2x|$ est de mêmes caractéristiques que (10), mais $|x, 2x|^{18}$ est la première puissance qui donne le conjugué de (10). Chacun de ces systèmes détermine donc 2^3 *systèmes de triples différents*, possédant uniquement le diviseur cyclique $\{|x, 1 + x|\}$.

Systèmes 2, 3, 4, 5; $d = 6$. — Le 6e transformé d'un système (10) peut être son conjugué. Avec chacun de ces systèmes (9), nous trouvons que, pour huit systèmes (10), le 6e transformé est le conjugué, et pour huit autres, $|x, 2x|^{18}$ est la première puissance qui donne le conjugué (2). Chacun de ces systèmes détermine 2^4 *systèmes de triples*

---

(1) Si le 2e transformé est le conjugué du système (10), naturellement le 6e, le 10e et le 14e le seront également, avant le 18e.

(2) Cette recherche ne demande plus qu'un temps minime pour chaque système de caractéristiques en question. Nous l'effectuerons comme exemple avec le système 2.

Le premier système de triples que détermine le système 2, c'est-à-dire le système des six séries cycliques *directes* (prises dans le triangle AOC'; *voir* notre premier travail, p. 60), est

(13) $013', \quad 027', \quad 037, \quad 056', \quad 064', \quad 099'.$

Nous n'écrivons que le triple de tête de chaque série. Formons la puissance $|x, 2x|^6$; par cette substitution, ces six triples se changent en six autres

différents; huit d'entre eux possèdent le diviseur métacyclique d'ordre $3 \times 37 = 111$

$$\{|x, 1+x|, |x, 2^{12}x|\},$$

et les huit autres n'ont que le diviseur cyclique $\{|x, 1+x|\}$.

Systèmes 13 *et* 14; $d = 6$. — Le 6e transformé d'un système (10) peut encore être le conjugué. Avec chacun de ces systèmes (9), nous trouvons que, pour deux systèmes (10), le 6e transformé est le conjugué, et pour dix autres, $|x, 2x|^{18}$ est la première puissance qui donne le conjugué. Chacun de ces systèmes détermine donc 12 *systèmes de triples différents;* deux d'entre eux possèdent le diviseur

---

contenant encore l'élément o, et qui nous donnent sans autre la série transformée de chacune des précédentes. Cette série transformée ne peut d'ailleurs être que l'une de ces mêmes séries (13) ou l'une des conjuguées. En remarquant toujours que la substitution métacyclique $|x, 2x|^6$ change deux séries conjuguées en deux séries conjuguées, *cette première transformation suffit pour notre tableau*, que nous écrirons en omettant l'élément o et faisant ressortir les séries conjuguées :

Système direct.		13′.	27′.	37.	56′.	64′.	99′.	B_0.	B_1.	B_2.	B_3.	B_4.	B_5.	
Transformés.	6e...	99′	**22″**	**33‴**	13′	**69″**	**56″**	B'_{16}	B'_1	B'_{126}	B'_{361}	B'_6	B'_{156}	...
	12e...	**56″**	27′	37	99′	64′	**15″**	B_{14}		B_{124}	B_{134}	B_{146}	B_{145}	...
	18e...	**15″**	**22″**	**33‴**	**56″**	**69″**	**97″**	B'_0		B'_2	B'_3	B'_4	B'_5	...

Pour écrire le 12e transformé, par exemple, 99′ devient **56″**, **22″** devient 27′ puisque 27′ devient **22″**, etc.

Désignons par B_0 le système (13), par $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ ses séries cycliques, par B_i, B_{ik}, B_{1ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) les systèmes obtenus en remplaçant, dans B_0, respectivement la série a_i; les deux séries a_i, a_k; les trois séries a_1, a_i, a_k; par les conjuguées; enfin par B'_i, B'_{ik}, B'_{1ik}, les systèmes conjugués respectifs (B_1 a pour conjugué $B_{23456} = B'_1$, etc.).

Les quatre systèmes précédents sont ainsi B_0, B'_{16}, B_{14}, B'_0. Prenons maintenant B_1, c'est-à-dire remplaçons la première rangée verticale du tableau par les séries conjuguées. *Sans rien écrire,* nous voyons que le 6e transformé est déjà B'_1. Nous prenons ensuite B_2, c'est-à-dire nous remplaçons la deuxième rangée verticale par les conjuguées, nous trouvons B'_{126}, B_{124}, B'_2, puis nous prenons B_3, B_4, etc., c'est-à-dire chaque fois un système qui n'a pas encore été obtenu, *lui* ou *son conjugué*, et nous continuons ainsi jusqu'à épuisement des 2^5 systèmes *directs* B_i, B_{ik} et B_{1ik}.

métacyclique

$$\{|x, 1+x|, \quad |x, 2^{12}x|\},$$

et les dix autres n'ont que le diviseur cyclique $\{|x, 1+x|\}$.

Système 12; $d = 3$. — Le 3e transformé d'un système (10) ne peut pas être le conjugué, mais le 6e transformé pourra être le conjugué de (10). Pour cinq systèmes (10), $|x, 2x|^{18}$ est la première puissance qui donne le conjugué, et pour un seul, le 6e transformé est son conjugué. Ce système détermine *six systèmes de triples différents;* cinq n'ont que le diviseur cyclique $\{|x, 1+x|\}$, et le sixième a le diviseur métacyclique

$$\{|x, 1+x|, \quad |x, 2^{12}x|\}.$$

Systèmes des caractéristiques imprimitives, $d = 1$. — Tous les transformés d'un système (10) sont des systèmes de mêmes caractéristiques. D'autre part, on sait (§ **7**), que ce système (10) possède le diviseur métacyclique d'ordre 3N

$$\{|x, 1+x|, \quad |x, \alpha^{2n}x|\},$$

c'est-à-dire que la puissance $|x, \alpha x|^{2n}$ le transforme en lui-même. On aura donc pour $N = 6n+1$ *premier, au moins* $\left[\frac{2^n}{2n}\right] = \left[\frac{2^{n-1}}{n}\right]$ *systèmes de triples différents, fournis par le système des caractéristiques imprimitives*, en entendant ici par ces crochets le premier entier égal ou *supérieur* à $\frac{2^{n-1}}{n}$. Dans notre cas, $\left[\frac{2^{n-1}}{n}\right] = 6$; nous trouvons en effet cinq systèmes (10), pour qui la puissance $|x, 2x|^6$ est la première qui donne le conjugné, ayant donc le diviseur métacyclique

$$\{|x, 1+x|, \quad |x, 2^{12}x|\},$$

et un système pour lequel la puissance $|x, 2x|^2$ donne déjà le conjugué et qui a le diviseur métacyclique d'ordre $9 \times 37 = 333$

$$\{|x, 1+x|, \quad |x, 2^4x|\}.$$

La recherche des systèmes cycliques de triples différents pour $N = 37$ est ainsi terminée. Nous obtenons

$21 \times 2^5 + 3 \times 2^4 + 4 \times 2^3 + 2 \times 12 + 6 + 6 = 820$ *systèmes cycliques différents.*

Recherche des systèmes cycliques de triples différents pour $N = 43$.

16. Nous avons appliqué également le procédé au cas $N = 43$ éléments en suivant une marche en tout pareille à celle qui vient d'être exposée. Nous ne donnerons maintenant plus que les résultats :

Pour $N = 43$, $n = 7$, le nombre des caractéristiques est

$$\frac{(N-1)(N-5)}{12} = 133.$$

La recherche a été faite avec la substitution $|\underline{x}, \underline{3x}|$, 3 étant racine primitive de 43. Nous obtenons 157 *systèmes de caractéristiques différents*.

140 *systèmes* ne possèdent que l'identité [1] : $d = 3n = 21$. Ils déterminent donc chacun 2^6 systèmes de triples différents, ne possédant que le groupe cyclique $\{|x, 1+x|\} = \{s\}$.

15 *systèmes* ont le diviseur $\{|\underline{x}, \underline{3^7x}|\}$: $d = 7$. $2d$ n'est pas diviseur de $3n$; donc le 7e transformé d'un système de triples peut être son conjugué. Autrement dit un système de triples déterminé par l'un de ces systèmes de caractéristiques peut posséder un diviseur du groupe métacyclique autre que le groupe $\{s\}$. Ces systèmes de caractéristiques sont *de deux types*, comme plus haut (§ 15) ceux pour lesquels $d = 6$. Cinq d'entre eux donnent chacun 32 systèmes de triples différents : 16 n'ayant que le diviseur cyclique $\{s\}$ et 16 ayant le diviseur métacyclique

$$\{|x, 1+x|, \quad |x, 3^{14}x|\}.$$

Les dix autres donnent chacun 24 systèmes de triples différents : 20 n'ayant que le groupe cyclique $\{s\}$ et 4 le diviseur métacyclique précédent.

1 *système* a le diviseur $\{|\underline{x}, \underline{3^3x}|\}$: $d = 3$. $2d$ n'est pas diviseur

---

[1] En tant que substitutions du groupe cyclique $\{|\underline{x}, \underline{3x}|\}$, mais de nouveau je ne puis pas assurer qu'il n'y a pas de substitutions, autres que celles de ce groupe, qui transforment l'un de ces systèmes de caractéristiques en lui-même.

de $3n$: un système de triples déterminé par ce système pourra posséder le diviseur métacyclique

$$\{|x, 1+x|, \quad |x, 3^6 x|\}.$$

On trouve 10 systèmes de triples différents, 9 n'ayant que le groupe $\{s\}$, et 1 possédant le diviseur métacyclique indiqué.

1 *système* (système des caractéristiques imprimitives) a le groupe entier $\{|\underline{x}, \underline{3x}|\}$; $d = 1$. Il donne au moins $\left[\frac{2^{n-1}}{n}\right] = 10$ systèmes de triples différents. On trouve en effet dix systèmes différents, neuf n'ayant que le groupe $\{s\}$ et le dixième le diviseur métacyclique

$$\{|x, 1+x|, \quad |x, 3^2 x|\}.$$

Nous obtenons ainsi pour $N = 43$:

$140 \times 2^6 + 5 \times 2^5 + 10 \times 24 + 10 + 10 = 9380$ *systèmes de triples différents.*

Conclusion.

Nous résumerons dans le tableau suivant, nos résultats obtenus jusqu'ici dans cette recherche des systèmes cycliques de triples différents pour $N = 6n + 1$.

Nous désignons par :

S le nombre des systèmes cycliques de triples différents;
S′ le nombre des systèmes de caractéristiques;
S″ le nombre des systèmes de caractéristiques différents.

Ce tableau est :

$N = 6n + 1$.	n.	S″.	S′.	S.
7	1	1	1	1
13	2	1	1	1
19	3	2	4	4
31	5	8	64	80
37	6	32	445	820
43	7	157	3049	9380
25 (1)	4	2	15	12

(1) Nous mettons à part le cas $N = 25$, parce que non premier.

La recherche des systèmes cycliques différents pour les premières valeurs de N, jusqu'à $N = 31$, laborieuse dans notre premier travail, n'aurait été qu'un jeu avec l'introduction du groupe $\{|\underline{x}, \underline{\alpha x}|\}$. Même pour $N = 31$, l'existence des 8 systèmes de caractéristiques différents, déterminant immédiatement les 80 systèmes de triples différents (en 8 groupements distincts; *voir* fin de l'Introduction), se reconnaît très vite dans le tableau (6) correspondant, à quatre colonnes de caractéristiques.

Nous avons donc un procédé permettant d'obtenir encore, avec un peu de temps, les systèmes cycliques de triples différents pour les valeurs immédiatement suivantes de N : 49, 61, 67, etc., et surtout, fournissant déjà, *pour* $N = 6n + 1$ *premier*, indéfiniment grand, un nombre *indéfini* de systèmes de triples différents. Nous entendons par là, non seulement les $\left[\frac{2^{n-1}}{n}\right]$ systèmes de triples différents, déterminés par le système des caractéristiques imprimitives, mais, par exemple, également les systèmes de triples différents déterminés par les systèmes de caractéristiques différents constitués d'un carré d'une des $n - 1$ colonnes du tableau (6) (¹) et des $n - 3$ caractéristiques imprimitives restantes (²), les systèmes de triples différents déterminés par les systèmes de caractéristiques différents, constitués de deux carrés d'une colonne du tableau (6) (³) et des $n - 6$ caractéristiques imprimitives restantes, etc. Ainsi l'étude du tableau (6) des colonnes de caractéristiques, engendrées par le groupe $\{|\underline{x}, \underline{\alpha x}|\}$ donnera déjà, avec N croissant, un nombre très grand de systèmes de caractéristiques différents *immédiats*, et comme il a été dit au paragraphe **11**,

(¹) Il faut excepter de ce raisonnement les colonnes (colonne V) ayant dans la caractéristique de tête deux éléments appartenant à la même caractéristique imprimitive.

(²) Ces systèmes de caractéristiques ont le diviseur $\{|\underline{x}, \underline{\alpha^n x}|\}$. Chacun détermine donc encore au moins $\left[\frac{2^{n-1}}{n}\right]$ systèmes de triples différents.

(³) Dès que $n > 7$, dans chaque colonne du tableau (7), il y a certainement deux triples entièrement différents; les deux carrés correspondants contiendront les éléments de six caractéristiques imprimitives. Dès que $n > 14$, il y aura dans chaque colonne de (7) trois triples entièrement différents, etc.

elle fera l'objet d'un travail ultérieur. Nous devons seulement reconnaître, encore une fois, en terminant, que la démonstration du théorème à la base de l'obtention des *systèmes de triples différents* est encore à faire ([1]); cependant, même indépendamment de ce théorème et de la question des systèmes de triples différents, les résultats obtenus dans ce travail pour la construction des *systèmes de caractéristiques*, autrement dit pour la solution du problème de Heffter (*voir* notre premier travail, p. 58), ont déjà leur intérêt.

([1]) Quoique, nous le répétons encore, pour des raisons de la théorie des groupes, le théorème *doit exister*, si ce n'est sous la forme générale que nous lui avons donnée, du moins, dans le cas de deux systèmes cycliques de triples équivalents.

Contribution à la Géométrie conforme. Cercles et surfaces cerclées.

PAR E. VESSIOT.

Introduction et Résumé.

1. Il y a, pour l'espace à trois dimensions, une géométrie conforme [1], où l'on étudie les propriétés géométriques qui demeurent inaltérées par les transformations conformes; de même qu'il y a une géométrie euclidienne et une géométrie projective, pour lesquelles les déplacements et les transformations projectives jouent, respectivement, un rôle analogue.

Le groupe conforme, qui sert à définir cette géométrie conforme, est, comme on sait, le groupe des ∞^{10} transformations ponctuelles qui n'altèrent pas les angles; c'est aussi, comme il est connu, le groupe des transformations ponctuelles qui changent toute sphère en sphère. On trouvera, dans le premier paragraphe de cette étude, la démonstration du fait que ce groupe conforme est également le groupe de toutes les transformations (ponctuelles ou de contact) changeant tout cercle en cercle.

2. Des questions importantes de la géométrie classique, telles que la détermination des systèmes triples orthogonaux, la théorie des systèmes cycliques, la recherche des surfaces isothermiques, relèvent de la géométrie conforme; et il y aurait intérêt à les approfondir à ce point de vue. Mais cela ne sera possible que quand les principes fon-

[1] A. DEMOULIN l'appelle géométrie *anallagmatique* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 5 juin 1905).

damentaux de la géométrie conforme auront été établis; elle n'a été, jusqu'ici, que très peu étudiée.

Des théories élémentaires trouvent, cependant, leur expression la plus simple quand on les expose du point de vue de la géométrie conforme. La courbure normale, en un point M d'une courbe Γ, tracée sur une surface Σ, est le rayon de la sphère, tangente à Σ en M, qui a un contact du second ordre avec Γ : le théorème de Meunier se résume dans le fait que cette *sphère de courbure normale* ne dépend que de la direction de la tangente en M à Γ. La formule d'Euler, pour les courbures normales, est une conséquence immédiate du fait que les directions de tangentes, qui sont ainsi associées à chaque sphère tangente à Σ en M, sont, en vertu de la remarque précédente, celles des tangentes menées en ce point (double) à l'intersection de cette sphère et de la surface Σ.

La courbure géodésique est, de même, le rayon de la sphère, normale à Σ en M, qui a un contact du second ordre avec Γ; et il sera commode de substituer à la considération de la courbure géodésique celle de cette *sphère de courbure géodésique*. Par leur intersection, ces deux sphères de courbures, normale et géodésique, donnent le cercle de courbure de Γ, dont les éléments différentiels du second ordre sont ainsi déterminés. La détermination de la sphère osculatrice, par son angle avec la sphère de courbure normale, fournira ceux du troisième ordre.

3. Les figures géométriques élémentaires avec lesquelles on doit opérer en géométrie conforme sont, comme nous venons d'en indiquer des exemples, les sphères et les cercles. En ce qui concerne les sphères, les éléments infinitésimaux à introduire sont l'angle d'une sphère variable S avec la sphère infiniment voisine, qu'on peut appeler *variation angulaire* (infinitésimale) de la sphère S; et un autre élément qu'on peut nommer la *rotation propre* (infinitésimale) d'un couple variable de sphères orthogonales S_1, S_2. Cette rotation propre est l'angle de S_1 avec la sphère infiniment voisine de S_2; au signe près, c'est aussi l'angle de S_2 avec la sphère infiniment voisine de S_1.

Si nous reprenons l'exemple des sphères de courbures normale et

géodésique d'une courbe Γ, tracée sur une surface Σ, la rotation propre de ce couple de sphères est l'angle de torsion géodésique $\Theta\, ds$; qui est, du reste, égal aussi à la variation angulaire de l'une et l'autre des deux sphères considérées ([1]).

A la dénomination près que nous employons ([2]), ces rotations propres ont été introduites dans l'étude des familles de ∞^1 sphères, et de leurs enveloppes ([3]). Par une généralisation de la méthode du trièdre mobile, appliquée par Darboux à l'étude euclidienne des courbes et des surfaces, on peut associer à la sphère variable, dont on étudie l'enveloppe, un pentasphère orthogonal déterminé, c'est-à-dire un système de cinq sphères, deux à deux orthogonales. Et c'est par les rapports des rotations propres, infinitésimales, des couples de sphères orthogonales fournies par ce pentasphère que l'on définit les invariants différentiels fondamentaux de la surface enveloppe considérée ([4]).

4. Après l'étude des systèmes de ∞^1 sphères, qui se trouve ainsi achevée, du moins dans ses traits essentiels et dans le cas général, et pour préparer la théorie des courbes et des surfaces en géométrie conforme, sur laquelle je reviendrai dans d'autres articles, il était nécessaire de faire l'étude des systèmes de ∞^1 cercles. Elle a été le sujet de la thèse de M. Besserve (Paris, 1915) : il y a déterminé par un calcul direct, en suivant la méthode de Lie, les invariants différentiels de ces systèmes de cercles; il en a donné certaines interprétations géomé-

---

([1]) Demartres avait déjà observé que $\Theta\, ds$ est la variation angulaire de la sphère de courbure normale (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXI, juillet 1897).

([2]) J'indique plus loin les raisons qui m'ont fait adopter ces noms de *variation angulaire* et de *rotation propre;* et les noms correspondants de *vitesse angulaire* et de *vitesse de rotation* (propre).

([3]) Le Vavasseur, *Académie des Sciences de Toulouse*, 10e série, t. I, 1901; C. Guichard, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1912; Besserve, *Thèse*, Paris, 1915.

([4]) La méthode du pentasphère mobile a été introduite par A. Demoulin (*loco citato*). Elle est aujourd'hui classique, et n'est, du reste, qu'un cas particulier d'une méthode générale, applicable à la géométrie de n'importe quel groupe de transformations.

triques; et en a déduit les conditions d'équivalence [1] de deux surfaces cerclées.

Il nous a paru cependant nécessaire de mettre en évidence, plus nettement et plus complètement que ne l'a fait cet auteur, les éléments géométriques fondamentaux de cette théorie; de les introduire directement; de donner aux résultats analytiques une forme simple et maniable et de pousser plus loin l'étude des surfaces cerclées. C'est ce que j'ai essayé de faire, en utilisant les coordonnées pentasphériques, ce qui permet de substituer au groupe conforme de l'espace son isomorphe, le groupe orthogonal à cinq variables, et en employant la méthode du pentasphère orthogonal variable. J'ai dû, pour abréger, me borner, essentiellement, aux cas généraux; et renoncer à donner des applications dans cet article. Je vais indiquer les idées qui m'ont guidé, et résumer les résultats que j'ai obtenus.

3. Je reprends d'abord l'étude d'un système de deux cercles A et B. Je montre que par le cercle A passent deux sphères, a et a', orthogonales entre elles, qui sont bissectrices de tout couple de sphères passant par A et coupant B sous un même angle. Deux sphères, b et b', passant par B, sont bissectrices de tout couple de sphères passant par B et coupant A sous un même angle. Chacune des sphères, a, a' est, de plus, orthogonale à l'une des sphères b, b'; par exemple, a est orthogonale à b', et a' à b. On retrouve ainsi un système de quatre sphères qui se rencontre [2] dans la recherche des cercles coupant à angle droit, en deux points, chacun des cercles donnés A et B : ces cercles, qu'on peut appeler *cercles perpendiculaires communs* à A et B, sont les cercles (a, b) et (a', b') [3].

J'introduis de plus les sphères bissectrices des couples (a, b), (a', b') : avec la sphère orthogonale commune à A et B, elles constituent un pentasphère orthogonal dont la considération met en évidence

---

(1) Le mot *équivalence* signifie, en géométrie conforme, que chacune des deux figures considérées peut être déduite de l'autre par une transformation conforme.

(2) *Voir*, par exemple, E. von Weber, *Archiv der Mathematik und Physik*, 3e série, t. VII, 1904.

(3) La notation cercle (a, b) indique le cercle intersection des sphères a et b.

la symétrie interne du système des deux cercles A et B, au point de vue conforme, et montre immédiatement que chaque système A, B est, à ce même point de vue, entièrement caractérisé par les valeurs ω et ω', des angles formés par les couples de sphères (a, b), (a', b') [1]. Je donne, de plus, des formules très simples pour exprimer les angles des sphères du faisceau A avec le cercle B, et inversement [2]; ainsi que les angles que forment entre elles les sphères du faisceau A et du faisceau B, et ceux sous lesquels sont coupés les deux cercles A et B par un cercle qui les rencontre, l'un et l'autre, en deux points.

M. Kœnigs [3] a proposé une généralisation de la notion d'angle, pour le cas de deux cercles A et B qui ne se rencontrent pas; et M. E. von Weber a indiqué que cet *angle de deux cercles* s'exprime, au moyen des angles ω et ω', par la formule

$$\cos\Psi = \cos\omega \cos\omega'.$$

Je définis un autre angle Ψ_1, qu'on peut également considérer comme une généralisation de l'angle de deux cercles sécants; car $\sin^2\Psi_1$ est, comme cela a lieu pour le carré du sinus de l'angle de deux cercles qui se rencontrent, la somme (constante) des carrés des sinus des angles sous lesquels un quelconque des cercles A et B est coupé par deux sphères orthogonales passant par l'autre. On a, pour cet angle Ψ_1, que j'appelle *inclinaison relative* des deux cercles, la formule

$$\sin^2\Psi_1 = \sin^2\omega + \sin^2\omega'.$$

La différence

$$\sin^2\Psi_1 - \sin^2\Psi = \sin^2\omega . \sin^2\omega',$$

qui s'annule quand les deux cercles se rencontrent, joue, dans une certaine mesure, le rôle de plus courte distance, et pourrait s'appeler l'*écart angulaire* des deux cercles.

---

(1) *Voir* une autre démonstration de ce résultat dans l'article de M. E. von Weber, cité ci-dessus.

(2) Le mot « faisceau A » signifie le faisceau des sphères passant par le cercle A.

(3) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II, 1898. M. Kœnigs part de la représentation d'un cercle par ses coordonnées pentasphériques, analogues aux coordonnées pluckériennes de la droite.

6. L'application des considérations précédentes à un cercle C d'une surface cerclée Σ et au cercle infiniment voisin conduit aux conséquences suivantes. Pour le cercle C et le cercle voisin C′, de la surface, qui tend vers C, les angles ω et ω' sont infiniment petits; il en est de même de Ψ et Ψ_1. Si l'on désigne par $d\varpi$, $d\varpi'$ les parties principales de ω et ω', celles de Ψ et Ψ_1, qui sont égales, ont pour expression commune l'*élément différentiel fondamental* $d\sigma$ défini par

$$d\sigma^2 = d\varpi^2 + d\varpi'^2.$$

On est ainsi conduit à poser

$$\frac{d\varpi}{d\sigma} = \cos\alpha, \qquad \frac{d\varpi'}{d\sigma} = \sin\alpha;$$

et α est l'une des formes de l'*invariant différentiel du premier ordre* de la surface cerclée.

Le pentasphère orthogonal associé, comme il a été expliqué, au couple de cercles C et C′, tend, lorsque C′ tend vers C, vers un pentasphère orthogonal Π qui comprend : les deux sphères p, p' (que j'appelle *sphères centrales*), passant par C et par les positions limites des cercles perpendiculaires communs à C et C′; les deux sphères q, q' (que j'appelle *adjointes* aux sphères centrales), coupant, respectivement, les précédentes, à angle droit, le long de ces cercles perpendiculaires communs à C et au cercle infiniment voisin; enfin la sphère r (que j'appelle *sphère orthogonale*), qui est orthogonale à C et au cercle infiniment voisin. Les pieds des cercles perpendiculaires communs limites, sur C, seront les deux couples de *points centraux* (¹) de ce cercle générateur : ce sont les points où C est coupé par les sphères adjointes q et q'.

Le cercle (q, q'), qui a pour foyers les points où la sphère orthogonale r rencontre C, et que j'appelle *cercle associé* à C, sert à définir la distribution, sur C, des points où les sphères passant par C touchent la surface Σ. A cet effet, un point quelconque m de C sera défini par l'angle θ que fait, avec la sphère adjointe q, la sphère qui passe par ce

(¹) Ne pas confondre avec les points désignés ainsi par Enneper, et, après lui, par Demartres.

point et par le cercle associé; et une sphère quelconque S du faisceau C sera définie par l'angle φ qu'elle fait avec la sphère centrale p, dont q est l'adjointe. La *formule de distribution*, qui a lieu lorsque S est tangente à Σ en m, a ainsi la forme simple

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\varphi,$$

où α est l'invariant différentiel défini plus haut. En particulier, chaque sphère centrale est tangente à Σ aux points centraux correspondants.

7. L'étude de la variation infinitésimale du pentasphère Π, associé au cercle générateur C, introduit les *autres invariants fondamentaux* (qui sont du second ordre), comme étant les vitesses de rotation propre (relativement à la variable canonique σ) des couples de sphères (p, p'), (q, q'), (r, q), (r, q'). Le mode particulier de variation des pentasphères qui correspondent à des surfaces cerclées est caractérisé par le fait que les quatre vitesses de rotation des couples (p, q'), (p', q), (p, r), (p', r) sont nulles.

Pour définir cette variation, pour une surface cerclée donnée, on obtient un système différentiel, analogue au système des équations dites de Serret-Frenet, en lequel se résume toute la théorie. Les conditions d'équivalence (conforme) de deux surfaces cerclées, leur définition par des équations intrinsèques, en résultent immédiatement.

Ce *système de Serret-Frenet* appartient à une classe de systèmes de Lie que j'ai étudiés autrefois [1]. Le groupe correspondant est, en général, le groupe linéaire orthogonal à cinq variables; il se réduit au groupe orthogonal à quatre variables, quand tous les cercles générateurs de la surface sont orthogonaux à une sphère fixe. On peut, par suite, indiquer la nature des intégrations dont dépend la détermination des surfaces cerclées définies par un système d'équations intrinsèques donné.

8. L'introduction des variables canoniques σ et θ fournit un mode de représentation invariante des points de la surface cerclée, et permet

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 février 1909.

une étude complète de la géométrie conforme sur cette surface, étude dont je donne les premiers éléments. Employant une notation vectorielle, je représente les sphères et les points de l'espace à trois dimensions par les vecteurs d'un espace à cinq dimensions dont les composantes sont les coordonnées pentasphériques de ces sphères et de ces points. Le produit de deux vecteurs a, b est désigné par ab ou (ab); on peut différentier ces vecteurs et ces produits scalaires.

Les cinq sphères p, p', q, q', r sont ainsi représentées par cinq vecteurs, désignés par les mêmes lettres, qui sont des fonctions de σ; je suppose

$$p^2 = p'^2 = q^2 = q'^2 = r^2 = 1.$$

Un point quelconque de la surface est alors représenté par le vecteur

$$m = r - iq \sin\theta + iq' \cos\theta$$

(pour lequel $m^2 = 0$). La sphère tangente, passant par le cercle générateur C, et tangente à Σ en ce point m, est

$$v = \frac{1}{k}(p \cos\theta \sin\alpha + p' \sin\theta \cos\alpha), \qquad \text{avec} \qquad k^2 = \cos^2\theta \sin^2\alpha + \sin^2\theta \cos^2\alpha.$$

Les courbes minima sont définies par $dm^2 = 0$. Ce dm^2 est une forme quadratique invariante, qui joue un rôle analogue au ds^2 de la surface, dont elle ne diffère du reste que par un facteur : elle sert en particulier à exprimer l'angle de deux autres courbes de la surface.

Pour une courbe tracée sur la surface, la sphère de courbure normale est

$$\rho m + v, \qquad \text{avec} \qquad \rho = -\frac{dm\,dv}{dm^2}.$$

Je donne les expressions explicites des formes dm^2 et $dm\,dv$, au moyen des invariants de la surface : j'en déduis l'équation différentielle des lignes de courbure, pour lesquelles je donne aussi des formules analogues à celles d'Olinde Rodrigues.

J'étudie ensuite, d'une manière analogue, la courbure géodésique, ce qui conduit à une généralisation de la notion de ligne géodésique : et je termine par le calcul de l'élément Θds, où Θ désigne la torsion

géodésique, après avoir établi pour une surface quelconque, relativement à cet élément, les résultats énoncés plus haut (n° 3) (¹).

I. — Le Groupe de la Géométrie des cercles.

9. Le groupe de transformations de contact de l'espace, le plus général, qui change tout cercle en cercle est le groupe (ponctuel) conforme.

Soit, en effet, T une transformation de contact changeant tout cercle en cercle : ce ne peut être qu'une transformation ponctuelle prolongée.

Supposons, en effet, le contraire; et considérons les ∞^4 cercles qui passent par un même point M de l'espace, arbitrairement choisi. Soit C l'un quelconque de ces cercles, C′ son transformé par T. Deux quelconques des cercles C ayant un élément de contact commun, les cercles homologues C′ ont un élément de contact commun, c'est-à-dire se rencontrent en un point M′. Mais si T n'est pas une transformation

(¹) Les résultats de ce mémoire, que je possédais depuis plusieurs années, et que les circonstances ne m'avaient pas permis de publier, ont été résumés, après qu'il était écrit, dans deux notes parues aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (10 avril et 25 avril 1922).

M. Hadamard m'a alors indiqué qu'il avait, dans des énoncés d'exercices proposés dans le tome II de ses *Leçons de géométrie élémentaire* (n°s 1249 à 1254), introduit les invariants ω et ω' et le système des sphères a, b, a', b'; ce qui m'avait échappé. Ces leçons de géométrie, parues en 1901, sont antérieures à l'article de M. E. von Weber, que j'ai cité plus haut, et que j'avais seul cité dans mes deux notes. Dans les énoncés de M. Hadamard figurent la plupart des propriétés angulaires des sphères des faisceaux A et B que les formules du présent mémoire mettent en évidence; ainsi que la possibilité de la transformation de chacun des cercles A et B dans l'autre par un système de deux inversions.

J'aurais dû citer alors également une note de A. Demoulin (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 août 1921), qui, publiée pendant les vacances où j'avais commencé la rédaction de ce mémoire, m'avait échappé. L'auteur y introduit, avec une définition différente, le *pentasphère* Π — [n° 7] —; il donne une *formule de distribution;* ainsi que les équations des *sphères de courbure principales*, rapportées au pentasphère Π. Un nouvel article de A. Demoulin, sur le même sujet, vient de paraître dans le *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique*, 5e série, tome 8, 1922, n° 8, p. 479.

ponctuelle, M′ ne peut rester le même quand on change, d'une manière arbitraire, le couple de cercles C considéré. On pourra donc trouver trois cercles C, soient C_1, C_2, C_3, dont les transformés C'_1, C'_2, C'_3 se couperont deux à deux en trois points distincts M'_{23}, M'_{31}, M'_{12}; et un cercle C arbitraire sera changé par T en un cercle C′ qui devra, de même, couper C'_1, C'_2, C'_3 en trois points distincts M'_1, M'_2, M'_3.

Mais il n'y a que ∞^3 cercles satisfaisant à cette condition; de sorte que nous concluons que la transformation T change en ∞^3 cercles seulement les ∞^4 cercles C qui passent par un point arbitraire M de l'espace. Or, on obtient tous les cercles de l'espace, et même chacun deux fois, en prenant successivement ceux qui passent par les ∞^2 points d'une sphère. En définitive, si T n'était pas une transformation ponctuelle, elle changerait les ∞^6 cercles de l'espace en ∞^5 cercles seulement.

Soit γ l'un quelconque de ces derniers. La transformation T^{-1}, inverse de T, devant redonner les ∞^6 cercles de l'espace, à partir des ∞^5 cercles γ, changerait chacun de ceux-ci en ∞^1 cercles. Or, cette singularité est inadmissible; car, d'après leur origine, les cercles γ doivent fournir, par leurs éléments de contact, tous les éléments de contact de l'espace; il existe donc, parmi ces cercles γ, des cercles qui possèdent une infinité d'éléments de contact dont aucun n'est singulier pour T^{-1}, c'est-à-dire qui, dans un domaine convenablement limité, ne donnent qu'un élément transformé. Comme un cercle est défini par trois de ses éléments de contact, on en conclut qu'un cercle γ ne peut donner, en général, par T^{-1}, qu'un cercle transformé, et non ∞^1.

Il y a donc contradiction; et il faut conclure que T est une transformation ponctuelle.

10. Ce point établi, considérons deux cercles C_1 et C_2 d'une même sphère S. Ils se coupent en deux points; il en est donc de même des cercles transformés C'_1 et C'_2, et ils définissent une sphère S′. Tout cercle de S, coupant en deux points chacun des cercles C_1 et C_2, aura pour homologue un cercle coupant C'_1 et C'_2 en deux points chacun, et qui, par suite, appartiendra à S′. Donc S′ est le lieu des cercles homologues des cercles de S; et la transformée de S est S′.

Ainsi la transformation T est une transformation ponctuelle qui change toute sphère en sphère : c'est donc une transformation conforme.

Réciproquement, toute transformation conforme, changeant toute sphère en sphère, change tout cercle, intersection de deux sphères, en l'intersection des sphères homologues, c'est-à-dire en un cercle.

C'est donc le groupe conforme qui est le groupe fondamental de la géométrie cerclée.

II. — Notations et formules.

11. J'emploierai des coordonnées pentasphériques. On définit un tel système de coordonnées par un système de cinq sphères orthogonales deux à deux, ou pentasphère orthogonal. Les coordonnées d'une sphère quelconque sont alors les cinq cosinus [1] des angles qu'elle forme avec les sphères coordonnées (coordonnées absolues), ou cinq nombres proportionnels à ces cosinus (coordonnées homogènes).

On est ainsi conduit à introduire une géométrie à cinq dimensions, et des vecteurs à cinq composantes. Nous désignerons le vecteur par une lettre minuscule, a par exemple, et ses composantes par la même lettre affectée d'indices, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Si ces composantes sont les coordonnées d'une sphère, nous l'appellerons la sphère a. Nous poserons, en général,

$$\sum_{k=1}^{5} a_k^2 = a^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} b_k^2 = b^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} a_k b_k = ab.$$

Si a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sont les coordonnées absolues d'une sphère, on

---

[1] On en précise la valeur par la formule cartésienne $\cos V = \frac{R^2 + R'^2 - D^2}{2RR'}$, où l'on choisit pour R et R′ des signes déterminés. Si les sphères sont réelles, et si l'on prend R et R′ positifs, cela revient à prendre pour V l'angle des normales extérieures.

a donc $a^2 = 1$. L'angle des deux sphères a et b est donné par

$$\cos V = \frac{ab}{\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}}, \qquad \text{ou simplement} \qquad \cos V = ab,$$

suivant qu'elles sont définies par des coordonnées homogènes, ou des coordonnées absolues ([1]).

L'ensemble des sphères a qui passent par un point donné, est défini par une équation linéaire homogène

$$\sum_{k=1}^{5} a_k x_k = 0, \qquad \text{ou} \qquad ax = 0,$$

dans laquelle

$$x^2 = \sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 0.$$

Le vecteur x est donc ici l'équivalent du point. Les points sont des vecteurs de longueur nulle, si l'on veut. Les composantes x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 du vecteur sont les coordonnées du point. Ce sont aussi les coordonnées de la sphère de rayon nul qui a le point en question pour centre.

Les changements de pentasphère de référence, comme les transformations conformes, se traduisent par des transformations orthogonales, opérant sur les composantes des vecteurs ci-dessus considérés. Toute invariance, en géométrie conforme, se traduit donc par une invariance algébrique, relative au groupe orthogonal à cinq variables. De là l'importance des coordonnées pentasphériques.

12. Un cercle A sera défini comme commun à deux sphères a, a'. Une sphère quelconque passant par A sera $\lambda a + \lambda' a'$, λ et λ' étant des coefficients numériques.

Si les sphères a, a' sont orthogonales, $aa' = 0$. Supposant, de plus,

---

([1]) Les sphères a et $-a$ diffèrent par le sens positif choisi sur la normale; la formule $\cos V = ab$ donne l'angle des directions positives des normales aux deux sphères considérées.

$a^2 = 1$, $a'^2 = 1$, nous avons en

$$a'' = a\cos\varphi + a'\sin\varphi \qquad (\text{d'où } a''^2 = 1),$$

la sphère du faisceau considéré qui fait l'angle φ avec a et l'angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$ avec a'. Les foyers du cercle sont alors les points $a \pm ia'$.

Considérons un autre cercle, soit B, intersection des sphères, orthogonales entre elles, b et b'; et supposons $b^2 = b'^2 = 1$.

Nous allons chercher d'abord la condition de rencontre de A et B. C'est que la sphère orthogonale commune à a, a', b, b' soit de rayon nul. Les coordonnées de cette sphère sont les déterminants du tableau formé avec les coordonnées de a, a', b, b'. On a donc à écrire que la somme des carrés de ces déterminants est nulle, ce qui donne, d'après le théorème de Binet-Cauchy,

$$(1) \quad 0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & (ab) & (ab') \\ 0 & 1 & (a'b) & (a'b') \\ (ab) & (a'b) & 1 & 0 \\ (ab') & (a'b') & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (ab)^2 - (ab')^2 - (a'b)^2 - (a'b')^2 + [(ab)(a'b') - (ab')(a'b)]^2.$$

13. La formule $1 - \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ qui lie, en coordonnées rectangulaires cartésiennes, les trois cosinus directeurs d'une droite, fournit les deux énoncés suivants :

1° *Le carré du cosinus de l'angle d'une droite avec un plan est égal à la somme des carrés des cosinus des angles de ce plan avec deux plans rectangulaires passant par la droite.*

2° *Le carré du sinus de l'angle de deux droites est égal à la somme des carrés des sinus des angles formés par l'une d'elles avec deux plans rectangulaires passant par l'autre.*

Pour le premier énoncé, la droite est Oz, les plans passant par elle sont les plans yOz et xOz, et α, β, γ définissent la normale au plan considéré, de sorte que γ est le sinus de l'angle de la droite et du plan.

Pour le second énoncé, l'une des droites est Oz, on considère

encore les plans yOz et xOz passant par elle, et α, β, γ définissent la direction de la seconde droite.

Une transformation par inversion permet d'étendre l'énoncé 1° au cas de l'angle d'un cercle et d'une sphère, et l'énoncé 2° au cas de l'angle de deux cercles qui se rencontrent. Ainsi :

1° *Le carré du cosinus de l'angle d'une sphère avec un cercle est la somme des carrés des cosinus des angles de cette sphère avec deux sphères orthogonales passant par le cercle.*

2° *Le carré du sinus de l'angle de deux cercles qui se rencontrent est égal à la somme des carrés des sinus des angles formés par l'un des cercles avec deux sphères orthogonales passant par l'autre.*

Avec les notations du numéro précédent, ces énoncés donnent les formules suivantes :

1° *Angle de la sphère b avec le cercle (a, a'),*

$$\cos^2 V = (ab)^2 + (a'b)^2; \tag{2}$$

2° *Angle des deux cercles (a, a') et (b, b'),*

$$\sin^2 W = [1 - (ab)^2 - (a'b)^2] + [1 - (ab')^2 - (a'b')^2], \tag{3}$$

ou

$$\cos^2 W = (ab)^2 + (a'b)^2 + (ab')^2 + (a'b')^2 - 1. \tag{3'}$$

Si l'on tient compte de la relation (1), on peut substituer à cette dernière formule la suivante :

$$\cos W = (ab)(a'b') - (ab')(a'b). \tag{4}$$

On y arriverait directement en transformant par inversion la formule de la théorie des trièdres trirectangles, $\gamma = \alpha\beta' - \beta\alpha'$, qui donne le cosinus de l'angle d'une droite $O'x'$ avec Oz en fonction des cosinus des angles que forment les plans xOz et yOz, qui sont deux plans rectangulaires quelconques passant par Oz, avec deux plans rectangulaires quelconques passant par la droite $O'x'$ [1].

---

[1] C'est à cause de cette démonstration que nous n'avons pas laissé un double signe dans la formule (4). Il faut entendre ici que le cercle (a, a') est

14. Supposons que les sphères a, a' fassent un angle quelconque α, et que les sphères b, b' fassent un angle quelconque β; mais, pour simplifier, conservons les coordonnées absolues, de sorte que

$$a^2 = a'^2 = b^2 = b'^2 = 1, \qquad aa' = \cos\alpha, \qquad bb' = \cos\beta.$$

On pourra appliquer les formules précédentes, en y remplaçant a' par $a'' = \frac{a' - a\cos\alpha}{\sin\alpha}$, et b' par $b'' = \frac{b' - b\cos\beta}{\sin\beta}$. D'où les formules générales (¹) :

$$(2') \qquad \cos^2 V \sin^2\alpha = (ab)^2 + (a'b)^2 - 2(ab)(a'b)\cos\alpha,$$

$$\begin{aligned}(3') \quad \cos^2 W \sin^2\alpha \sin^2\beta = {} & (ab)^2 + (ab')^2 + (a'b)^2 + (a'b')^2 - \sin^2\alpha\sin^2\beta \\ & - 2[(ab)(a'b) + (ab')(a'b')]\cos\alpha \\ & - 2[(ab)(ab') + (a'b)(a'b')]\cos\beta \\ & + 2[(ab)(a'b') + (ab')(a'b)]\cos\alpha\cos\beta,\end{aligned}$$

$$(4') \qquad \cos W \sin\alpha \sin\beta = (ab)(a'b') - (ab')(a'b).$$

En éliminant $\cos W$ entre les deux dernières, on aurait la condition d'intersection des deux cercles.

Enfin, si l'on employait des coordonnées homogènes, il faudrait remplacer chaque produit scalaire tel que (ab) par $\frac{ab}{\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}}$, expression du cosinus de l'angle des deux sphères a et b.

15. Nous aurons à calculer le rapport anharmonique

$$\rho = (PP'QQ')$$

formé sur un cercle par les couples de points PP', QQ' où il est coupé par deux sphères données. Il s'obtient au moyen de l'angle Ω des sphères menées par P, P' et Q, Q' orthogonalement au cercle. On a,

---

supposé parcouru dans le sens qui est direct par rapport au couple des directions positives des normales aux sphères a et a'. Le cercle (a', a) en diffère par ce sens de circulation. La formule donne l'angle des tangentes positives des deux cercles (a, a'), (b, b').

(¹) α est supposé positif, de manière que le cercle (a, a'') soit orienté comme le cercle (a, a'). De même pour β.

en effet,

$$(5) \qquad \rho = \frac{\cos\Omega - 1}{\cos\Omega + 1} = -\tang^2\frac{\Omega}{2}, \qquad \cos\Omega = \frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

Pour arriver à ce résultat, il suffit de transformer la figure formée par le cercle et les deux sphères orthogonales, par une inversion, en prenant pour pôle le point P : le cercle devient une droite, l'une des sphères devient un plan perpendiculaire à cette droite, l'autre une sphère ayant la droite pour diamètre. En coupant par un plan passant par la droite, il reste à évaluer le rapport anharmonique formé, sur un diamètre d'un cercle, par les extrémités de ce diamètre, le pied d'une corde perpendiculaire au diamètre et le point à l'infini, en fonction de l'angle de la corde et du cercle. En prenant le cercle pour cercle trigonométrique, et le diamètre pour axe des cosinus, l'angle Ω de la corde et du cercle est l'abscisse angulaire de l'une des extrémités de la corde, et la formule $\rho = \frac{\cos\Omega - 1}{\cos\Omega + 1}$ est l'expression du rapport anharmonique des points considérés en fonction de leurs abscisses, rapportées au centre du cercle.

Remarquons que l'angle Ω a, en réalité, deux déterminations supplémentaires. La formule (5) leur fait correspondre deux valeurs ρ et $\frac{1}{\rho}$ pour le rapport anharmonique. Cela correspond au fait que rien ne permet de distinguer, dans la manière dont ils sont définis, les deux points d'un même couple.

III. — Système de deux cercles.

16. Considérons deux cercles A et B, définis respectivement par deux couples (a, a'), (b, b') de sphères orthogonales. Nous supposerons donc

$$a^2 = a'^2 = b^2 = b'^2 = 1, \qquad aa' = bb' = 0.$$

Pour simplifier les discussions, et en vue de l'application aux surfaces cerclées, nous supposerons les cercles A et B réels.

Nous allons étudier les rapports de chacun de ces cercles avec les sphères passant par l'autre. Nous aurons donc à introduire des sphères

variables

$$u = a\cos\varphi + a'\sin\varphi, \qquad v = b\cos\psi + b'\sin\psi,$$

passant, respectivement, par A et B [1].

D'après la formule (2), l'angle U de u avec B, et l'angle V de v avec A sont donnés par les équations

$$(6) \quad \cos^2 U = [(ab)\cos\varphi + (a'b)\sin\varphi]^2 + [(ab')\cos\varphi + (a'b')\sin\varphi]^2,$$

$$(7) \quad \cos^2 V = [(ab)\cos\psi + (ab')\sin\psi]^2 + [(a'b)\cos\psi + (a'b')\sin\psi]^2.$$

Nous allons les réduire à une forme canonique simple, en particularisant les couples orthogonaux de sphères, (a, a') et (b, b'), qui définissent A et B. Mais il faut d'abord écarter un cas d'exception.

En effet, la formule (6), par exemple, pourrait être indépendante de φ. Cela supposerait

$$(8) \quad (ab)^2 + (ab')^2 = (a'b)^2 + (a'b')^2, \qquad (ab)(a'b) + (ab')(a'b') = 0.$$

Ces équations seraient vérifiées pour

$$(9) \qquad (ab) = (ab') = (a'b) = (a'b') = 0;$$

c'est-à-dire si le cercle A est l'intersection de deux sphères orthogonales à B. L'inverse a lieu en même temps; et l'on dit que les cercles sont *conjugués*. On a

$$\cos^2 U = \cos^2 V = 0,$$

c'est-à-dire que toute sphère qui passe par un des cercles est orthogonale à l'autre.

Écartons cette hypothèse (9), et interprétons les conditions (8), en supposant, par exemple, $ab \neq 0$. En posant $a'b' = \lambda ab$ dans les équations (8), elles donnent

$$a'b = -\lambda ab', \qquad a'b' = \lambda ab, \qquad (1-\lambda^2)[(ab^2 + (ab')^2] = 0.$$

Comme ab et ab', cosinus des angles de sphères réelles, sont réels,

---

[1] La direction positive de la normale à u en un point de A s'obtient en faisant tourner de φ la direction positive de la normale à a, autour de la tangente à A, orientée dans le sens de circulation qui correspond à la notation (a, a') pour le cercle A. De même B sera considéré comme le cercle orienté (b, b'); et ψ aura la signification analogue à celle de φ.

et $ab \neq 0$, il reste

$$(10) \qquad \lambda = \pm 1, \qquad a'b' = \lambda ab, \qquad a'b = -\lambda ab',$$

et les formules (6) et (7) se réduisent simultanément à

$$(11) \qquad \cos^2 U = \cos^2 V = (ab)^2 + (ab')^2.$$

Chaque sphère passant par un des cercles coupe donc l'autre sous un angle qui est toujours le même : on peut dire que les cercles sont *isogonaux* ([1]).

17. Écartons ces cas. Alors pour chaque valeur de U, l'équation (6) définit, en interprétant φ comme abscisse sur le cercle trigonométrique, les directions de deux diamètres de ce cercle, dont les bissectrices sont indépendantes de U. Cela veut dire qu'il existe deux sphères orthogonales, passant par A, sur lesquelles sont également inclinées deux sphères quelconques du faisceau A coupant B sous un même angle. Nous les appellerons les *sphères centrales* (*du couple* A, B) *relatives à* A.

Il y a de même un couple de *sphères centrales relatives à* B, bissectrices de chaque couple de sphères du faisceau B coupant A sous un même angle.

Nous pouvons, dès lors, supposer qu'on a défini A et B par leurs sphères centrales, qui seront donc les sphères a, a', b, b'.

Dans ces conditions, les termes en $\sin\varphi\cos\varphi$ et $\sin\psi\cos\psi$ disparaissent des formules (6) et (7); c'est-à-dire que l'on a

$$(ab)(a'b) + (ab')(a'b') = 0, \qquad (ab)(ab') + (a'b)(a'b') = 0.$$

On en conclut que si l'on n'avait pas l'un au moins des systèmes de relations

$$(12) \qquad (ab') = (a'b) = 0 \qquad \text{ou} \qquad (ab) = (a'b') = 0,$$

([1]) On vérifie sur les conditions (10) que ce cas est celui où il existe deux droites isotropes contenant chacune un foyer de chacun des cercles. Les équations (9) expriment que les foyers de A et les foyers de B sont sommets opposés d'un quadrilatère formé par quatre droites isotropes; ou encore que chaque cercle passe par les foyers de l'autre.

on aurait

$$(ab)^2 - (a'b')^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad (ab')^2 - (a'b)^2 = 0;$$

mais alors on retomberait sur le cas des cercles isogonaux.

Donc nous concluons à l'un des systèmes (12); et comme on peut échanger les notations a, a' et b, b', nous pouvons supposer

$$(13) \qquad ab' = a'b = 0.$$

Alors les quatre sphères centrales, dans l'ordre circulaire a, a', b, b' sont telles que deux sphères consécutives quelconques sont orthogonales. Nous appellerons ω et ω' les angles des sphères opposées [1]

$$(14) \qquad \cos\omega = ab, \qquad \cos\omega' = a'b'.$$

Les relations (6) et (7) prennent ainsi la forme annoncée

$$(6') \qquad \cos^2 U = \cos^2\omega \cos^2\varphi + \cos^2\omega' \sin^2\varphi,$$

$$(7') \qquad \cos^2 V = \cos^2\omega \cos^2\psi + \cos^2\omega' \sin^2\psi.$$

qui est, de plus, identique pour les deux relations, ce qui révèle une sorte de symétrie interne ou de réciprocité, dans le système des deux cercles. A égalité d'inclinaison sur les sphères centrales de A et de B, deux sphères passant par A et B (respectivement) coupent B et A (respectivement) sous le même angle.

On peut aussi écrire ces relations sous la forme

$$(6'') \qquad \sin^2 U = \sin^2\omega \cos^2\varphi + \sin^2\omega' \sin^2\varphi,$$

$$(7'') \qquad \sin^2 V = \sin^2\omega \cos^2\psi + \sin^2\omega' \sin^2\psi.$$

18. On vérifiera sans peine que ces formules [avec les conditions (13) et les notations (14)] peuvent être obtenues d'une infinité de manières dans le cas des cercles isogonaux ($\cos^2\omega = \cos^2\omega'$), et des cercles conjugués ($\cos\omega = \cos\omega' = 0$). Dans le premier cas, il suffit, ayant choisi arbitrairement le couple (a, a'), de déterminer le couple (b, b') par la condition $(a'b) = 0$. Dans le second cas, les couples (a, a') et (b, b') demeurent entièrement arbitraires.

---

[1] Nous pourrons supposer $\cos\omega$ et $\cos\omega'$ positifs, en choisissant convenablement les signes de a, b, a', b'.

Remarquons, d'autre part, que la condition (1), exprimant que les deux cercles se rencontrent, devient ici

$$\cos^2\omega + \cos^2\omega' - 1 = (\cos\omega\cos\omega')^2,$$

c'est-à-dire

$$\sin^2\omega\sin^2\omega' = 0.$$

Elle consiste donc dans le contact de deux sphères centrales, opposées, (a et b) ou (a' et b'). Ces sphères centrales sont donc alors les sphères qui passent par chacun des cercles et sont tangentes à l'autre au point commun. Si elles sont confondues, les deux cercles sont bisécants. Les cercles sont tangents, si toute sphère passant par l'un est tangente à l'autre, c'est-à-dire si l'on a, à la fois,

$$\sin\omega = \sin\omega' = 0.$$

19. Pour simplifier, j'écarterai dorénavant tout cas d'intersection, et je vais indiquer quelques conséquences des formules précédentes.

La formule (6″) montre que $\sin^2\omega$ et $\sin^2\omega'$ ne peuvent être négatifs tous les deux, car il y a toujours des sphères u qui rencontrent B.

Si l'un est positif et l'autre négatif, il y a deux sphères menées par A qui sont tangentes à B; elles sont données par

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm i\frac{\sin\omega}{\sin\omega'};$$

de sorte que, si l'on désigne leur angle par δ, on a, en valeurs absolues,

$$\operatorname{tang}\frac{\delta}{2} = i\frac{\sin\omega}{\sin\omega'}. \tag{15}$$

On voit qu'il y a en même temps deux sphères tangentes à A, menées par B, dont l'angle a la même valeur δ. On pourra appeler cet angle δ le *diamètre angulaire relatif* des deux cercles: il tend vers zéro ou π, si les deux cercles tendent à se couper.

Ce cas est celui où les deux cercles ne sont pas *engagés* l'un dans l'autre : des deux couples de sphères centrales opposées, il y a un

couple de sphères qui se coupent et un couple de sphères qui ne se coupent pas (¹).

Si $\sin^2\omega$ et $\sin^2\omega'$ sont positifs tous deux, les formules montrent que toute sphère passant par l'un des cercles coupe l'autre; c'est le cas où les cercles sont engagés l'un dans l'autre; les couples de sphères centrales opposées sont deux couples de sphères qui se rencontrent (²).

Dans ce cas l'angle aigu sous lequel une sphère passant par l'un des cercles coupe l'autre varie entre les limites extrêmes ω et ω', sans jamais s'annuler; tandis que quand les cercles ne sont pas engagés l'un dans l'autre, il varie entre zéro et celle des valeurs ω et ω' qui est réelle.

Cet angle ne peut devenir droit, par conséquent, que si l'un des angles ω, ω' est droit. Supposons, par exemple, $\cos\omega' = 0$. Il vient

$$\cos^2 U = \cos^2\omega \cos^2\varphi,$$

ou, au signe près,

$$\cos U = \cos\omega\cos\varphi, \qquad \cos V = \cos\omega\cos\psi;$$

de sorte qu'il y a une sphère et une seule passant par un quelconque des deux cercles et coupant l'autre à angle droit; et c'est celle des sphères centrales qui coupe à angle droit la sphère centrale opposée. Les cercles sont dits alors en *involution :* ils peuvent, du reste, être engagés l'un dans l'autre, ou ne pas l'être (³).

20. L'angle χ des deux sphères u et v est donné par

$$\cos\chi = uv = (a\cos\varphi + a'\sin\varphi)(b\cos\psi + b'\sin\psi),$$

(¹) On peut alors supposer $0 < \omega \leqq \frac{\pi}{2}$ et $\omega' = ih$, avec $h > 0$.

(²) On peut alors supposer $0 < \omega \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 < \omega' \leqq \frac{\pi}{2}$.

(³) Je n'insiste pas sur d'autres conséquences évidentes. Par exemple, deux sphères orthogonales passant par A coupent B sous deux angles U et U′ tels que

$$\cos^2 U + \cos^2 U' = \cos^2\omega + \cos^2\omega' = \text{const.}$$

J'aurai à y revenir.

qui, en tenant compte de (13) et (14), devient

$$\cos\chi = \cos\omega\cos\varphi\cos\psi + \cos\omega'\sin\varphi\sin\psi. \tag{16}$$

Enfin, les angles respectifs W_A et W_B du cercle (u, v) avec A et B sont donnés par la formule (4'), de sorte que l'on a

$$\sin\chi\cos W_A = (au)(a'v) - (av)(a'u),$$
$$\sin\chi\cos W_B = (bu)(b'v) - (bv)(b'u),$$

ce qui devient, avec les valeurs (13) et (14),

$$\sin\chi\cos W_A = -\cos\omega\sin\varphi\cos\psi + \cos\omega'\cos\varphi\sin\psi, \tag{17}$$
$$\sin\chi\cos W_B = \cos\omega\cos\varphi\sin\psi - \cos\omega'\sin\varphi\cos\psi. \tag{18}$$

Nous remarquerons que ces formules deviennent, en prenant, par exemple, les signes + dans les premiers membres,

$$\cos W_A = -\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}, \qquad \cos W_B = \frac{\partial\chi}{\partial\psi}. \tag{19}$$

Les maxima et minima de χ se produiront donc pour les cercles (u, v) coupant à angle droit chacun des cercles donnés : nous les appellerons les *cercles perpendiculaires communs*.

Les combinaisons

$$\sin\chi(\cos W_A + \cos W_B) = (\cos\omega + \cos\omega')\sin(\psi - \varphi),$$
$$\sin\chi(\cos W_A - \cos W_B) = (\cos\omega' - \cos\omega)\sin(\psi + \varphi)$$

montrent que, si l'on écarte le cas des cercles isogonaux, il y a deux cercles perpendiculaires communs, donnés par

$$\varphi, \psi = 0 \text{ ou } \pi, \qquad \varphi, \psi = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2}.$$

Ce sont donc les cercles (a, b) et (a', b'), cercles d'intersection des sphères centrales opposées. Comme nous l'avons vu, un seul est réel, le cercle (a, b) par exemple, si les cercles A et B ne sont pas engagés l'un dans l'autre; ils sont réels tous deux, dans le cas contraire : les valeurs de χ qui leur correspondent sont, comme il était évident, ω et ω' [1].

---

[1] Nous considérons ici χ comme l'angle aigu des deux sphères, abstraction faite de tout choix de directions positives sur les normales à ces sphères.

Il n'y a, du reste, de véritable minimum pour χ que dans le second cas, et pour la plus petite des valeurs ω, ω'. L'angle χ peut toujours devenir droit, et peut toujours s'annuler dans le premier cas. Dans le second cas il reste toujours supérieur à la plus petite des valeurs ω, ω'.

21. Lorsque deux cercles A et B sont conjugués, tout cercle (u, v) qui rencontre l'un et l'autre en deux points est divisé par ces points harmoniquement. Pour vérifier ce résultat connu, qui justifie le nom de *conjugué* donné à deux tels cercles, il suffit de remarquer que si l'on a, conformément aux notations adoptées dans cette étude,

$$u = a\cos\varphi + a'\sin\varphi, \qquad v = b\cos\psi + b'\sin\psi,$$

les sphères

$$u' = a\sin\varphi - a'\cos\varphi, \qquad v' = b\sin\psi - b'\cos\psi$$

sont alors les sphères orthogonales à (u, v) menées par les points où ce cercle est rencontré par chacun des cercles A et B. Et comme ces sphères u' et v' sont orthogonales, la propriété résulte de la formule (5), qui donne $\rho = -1$, pour $\cos\Omega = 0$.

Les cercles perpendiculaires communs à A et B, qui sont (a, b) et (a', b'), étant conjugués en vertu des relations

$$aa' = ab' = ba' = bb' = 0,$$

déterminent donc deux divisions harmoniques sur A et B.

Considérons inversement les divisions déterminées par A et B sur chacun des cercles perpendiculaires. La sphère a' est orthogonale à (a, b), et passe par les points communs à (a, b) et (a, a'); la sphère b' est orthogonale à (a, b) et passe par les points communs à (a, b) et (b, b'). Donc, d'après la formule (5), le rapport anharmonique des deux couples déterminés sur (a, b) par A et B est

$$\frac{(a'b') - 1}{(a'b') + 1} = \frac{\cos\omega' - 1}{\cos\omega' + 1} = -\tang^2\frac{\omega'}{2}.$$

De même, le rapport anharmonique des deux couples déterminés par A et B sur (a', b') est égal à $-\tang^2\frac{\omega}{2}$. Ces résultats ont été indiqués déjà par M. E. von Weber, sans démonstration.

22. Au système des deux cercles A, B, on peut associer un pentasphère orthogonal déterminé : il est formé par les sphères bissectrices des sphères centrales qui se coupent suivant chacun des cercles perpendiculaires communs,

$$(20)\quad p = \frac{a+b}{2\cos\frac{\omega}{2}}, \qquad q = \frac{a-b}{2\sin\frac{\omega}{2}}, \qquad p' = \frac{a'+b'}{2\cos\frac{\omega'}{2}}, \qquad q' = \frac{a'-b'}{2\sin\frac{\omega'}{2}},$$

auxquelles on associe la sphère orthogonale commune [1] aux deux cercles A et B.

Si A et B sont engagés l'un dans l'autre, p, q, p', q' sont réelles et la sphère orthogonale commune est imaginaire (centre réel, carré du rayon négatif).

Si A et B ne sont pas engagés l'un dans l'autre, la sphère orthogonale commune est réelle, mais l'un des cercles perpendiculaires communs, le cercle (a', b') par exemple, est imaginaire, et des deux sphères p' et q', la sphère p' est seule réelle.

Si l'on se donne le tétrasphère orthogonal p, q, p', q', et les angles ω et ω' associés aux cercles opposés (conjugués) (p, q) (p', q'), on a, pour les cercles donnés (a, a'), (b, b'), les formules

$$(21)\quad \begin{cases} a = p\cos\frac{\omega}{2} + q\sin\frac{\omega}{2}, & a' = p'\cos\frac{\omega'}{2} + q'\sin\frac{\omega'}{2}, \\ b = p\cos\frac{\omega}{2} - q\sin\frac{\omega}{2}, & b' = p'\cos\frac{\omega'}{2} + q'\sin\frac{\omega'}{2}. \end{cases}$$

Si l'on change ω en $\omega + 2k\pi$, cela ne peut faire que changer le signe des vecteurs a et b.

Si l'on change ω en $\pi - \omega$, cela revient à échanger p et q, en changeant le signe de b. Mais le changement de p en q, sans changement des autres sphères du tétrasphère, peut s'obtenir par une transformation conforme.

On peut donc conclure que deux systèmes de deux cercles A, B,

---

[1] C'est la sphère qui passe par les quatre foyers des deux cercles. Elle n'est de rayon nul que si les cercles ont un point commun. Elle n'est indéterminée que si les cercles sont sur une même sphère; les foyers sont alors sur un même cercle. Si ce cercle est de rayon nul, les cercles donnés sont tangents.

pour lesquels $\cos^2\omega$ et $\cos^2\omega'$ ont les mêmes valeurs, peuvent se transformer l'un en l'autre par une transformation conforme. En effet, on pourra toujours transformer l'un dans l'autre, au moyen d'une transformation conforme appropriée, les pentasphères orthogonaux qui leur sont respectivement associés, de manière à transformer l'un dans l'autre les couples de sphères qui correspondent à l'angle ω, et ceux qui correspondent à l'angle ω'.

L'un et l'autre système de cercles sera alors représenté par les mêmes formules (21); et la seule ambiguïté qui peut y subsister dans le choix des déterminations de ω et ω' ne peut donner que des systèmes de cercles réductibles l'un à l'autre, d'après ce qui précède, par une nouvelle transformation conforme ([1]).

Remarquons encore qu'un système de deux cercles est à lui-même son homologue pour les transformations conformes qui correspondent à un nombre pair de changements de signes, simultanés, de p, q, p', q' : suivant les cas, chacun des cercles sera à lui-même son homologue, ou bien chaque cercle sera l'homologue de l'autre ([2]).

Le changement de p en $-p$, par exemple (sans changement des autres sphères du système), s'obtient par une *symétrie* relative à la sphère p; c'est-à-dire par l'inversion qui laisse invariant chaque point de p. Cette inversion devient une symétrie, au sens euclidien du mot, si la sphère p se trouve être un plan.

D'autre part, deux symétries successives par rapport à deux sphères orthogonales fournissent une transformation conforme qu'on peut considérer aussi, par voie de généralisation, comme la *symétrie par rapport au cercle* commun à ces deux sphères. On dira donc que le système des cercles A et B reste invariant par les symétries effectuées par rapport à chacun des six cercles d'intersection des quatre sphères

---

([1]) Le fait que l'égalité des valeurs de $\cos^2\omega$ et $\cos^2\omega'$ est suffisante pour l'*équivalence* des deux systèmes de cercles (en géométrie conforme) résulte de ce qu'un système de deux cercles a deux invariants indépendants, et deux seulement, pour lesquels on peut évidemment choisir $\cos^2\omega$ et $\cos^2\omega'$ (*voir* Besserve, *Thèse*). Une démonstration directe, différente de la précédente, a été donnée par E. von Weber.

([2]) L'existence de ce second cas explique ce que nous avons indiqué plus haut, sous le nom de *symétrie interne* du système (n° **17**).

p, q, p', q' du pentasphère orthogonal considéré. Les symétries par rapport aux cercles perpendiculaires communs à A et B, cercles (p, q) et (p', q'), laissent invariant chacun des cercles A et B; les quatre autres échangent entre eux ces deux cercles.

Relativement à la symétrie par rapport à un cercle C, j'observe en passant qu'on peut la définir directement : deux points M et M′ sont symétriques par rapport à C, s'ils appartiennent à la fois à deux cercles perpendiculaires à C. Ou encore : soient D, D′ les extrémités du diamètre de C qui contient la projection orthogonale de M sur le plan de C; M′ est le conjugué harmonique de M, par rapport à D et D′, sur le cercle MDD′.

On peut définir d'une manière analogue la *symétrie conforme par rapport à un couple de points*, qui est la généralisation de la symétrie euclidienne par rapport à *un* point. Deux points M et M′ sont symétriques par rapport au couple I, J, s'ils sont sur un cercle passant en I et J, et s'ils sont conjugués harmoniques de I et J sur ce cercle. On remarquera que si M et M′ sont symétriques par rapport à I et J, inversement I et J sont aussi symétriques par rapport au couple M, M′.

Les trois espèces de symétrie conforme ainsi introduites donnent lieu à des théorèmes analogues aux théorèmes élémentaires classiques relatifs aux trois espèces de symétrie euclidienne, dont les symétries conformes sont la généralisation immédiate.

23. A la configuration formée par les cercles A et B, les sphères centrales, et le pentasphère orthogonal que nous avons associé à ces cercles, on peut encore adjoindre les sphères

$$(22)\quad \begin{cases} a_0 = -p\sin\frac{\omega}{2} + q\cos\frac{\omega}{2}, & a'_0 = -p'\sin\frac{\omega'}{2} + q'\cos\frac{\omega'}{2}, \\ b_0 = -p\sin\frac{\omega}{2} + q\cos\frac{\omega}{2}, & b'_0 = -p'\sin\frac{\omega'}{2} - q'\cos\frac{\omega'}{2}, \end{cases}$$

menées, par chacun des cercles perpendiculaires communs, normalement aux sphères centrales a, b, a', b', respectivement.

Les cercles (a_0, a'_0), (b_0, b'_0), que nous désignerons par A_0, B_0, sont respectivement conjugués à A et B. Ils sont définis par cette

propriété, jointe à la condition, qu'ils remplissent évidemment, d'être orthogonaux à la sphère orthogonale commune à A et B. Il y a réciprocité entre le système A, B et le système A_0, B_0. Partant du même tétrasphère p, q, p', q', on passe de l'un à l'autre en changeant les angles ω et ω', qui correspondent au premier, en $\pi + \omega$ et $\pi + \omega'$.

Voici quel est le rôle de ces cercles A_0, B_0, pour le système donné A, B. Les sphères du faisceau A_0 déterminent sur A la même involution que les sphères du faisceau B; et, de même, les sphères du faisceau B_0 déterminent sur B la même involution que les sphères du faisceau A [1].

D'une manière plus précise, les sphères

$$(23) \qquad v = b\cos\psi + b'\sin\psi, \qquad v_0 = a_0 \sin\omega\cos\psi + a'_0 \sin\omega' \sin\psi$$

coupent A aux mêmes points. Cela résulte de l'identité

$$a\cos\omega\cos\psi + a'\cos\omega'\sin\psi = v + v_0,$$

dont la vérification est immédiate.

Si donc on introduit l'angle ψ_0 de v_0 avec a_0, la sphère v_0 se représente par

$$(24) \qquad \bar{v}_0 = a_0\cos\psi_0 + a'_0\sin\psi_0,$$

et l'on a la relation

$$(25) \qquad \operatorname{tang}\psi_0 = \frac{\sin\omega'}{\sin\omega}\operatorname{tang}\psi.$$

Les considérations du n° 15 permettront de calculer, en fonction des angles ψ et ψ' relatifs à deux sphères v et v' du faisceau B, le rapport anharmonique des couples de points qu'elles déterminent sur A. Il suffira de se servir de la formule (5), $\rho = \frac{\cos\Omega - 1}{\cos\Omega + 1}$, Ω étant l'angle des deux sphères v_0 et v'_0, du faisceau A_0, qui sont associées à v et v' par la loi donnée par les formules (23). Remarquons que l'on

---

[1] Le cercle A_0 a pour foyers les points doubles de l'involution déterminée sur A par le faisceau B; ces points doubles sont, du reste, les points où A est coupé par la sphère orthogonale commune à A et B. Les foyers de B_0 se définissent de même.

a, d'après (23) et (6″),

$$\varphi_0^2 = \sin^2\omega\cos^2\psi + \sin^2\omega'\sin^2\psi = \sin^2 V,$$

V étant l'angle sous lequel φ coupe A; et nous aurons

$$(26)\qquad \cos\Omega = \frac{\sin^2\omega\cos\psi\cos\psi' + \sin^2\omega'\sin\psi\sin\psi'}{\sin V\sin V'},$$

formule dont le numérateur se déduit de $\sin^2 V$ par la formation polaire.

En particulier, les deux couples de points de A, déterminés par φ et φ', seront harmoniques, si l'on a

$$(27)\qquad \sin^2\omega\cos\psi\cos\psi' + \sin^2\omega'\sin\psi\sin\psi' = 0.$$

On peut vérifier ainsi que les sphères centrales relatives à B $\left(\psi = 0,\ \psi' = \frac{\pi}{2}\right)$ déterminent sur A une division harmonique. Ce n'est qu'une autre manière d'énoncer le résultat donné au n° **21** sur les cercles perpendiculaires communs.

Nous venons d'examiner l'involution déterminée sur A par le faisceau B. De même, pour l'involution déterminée par le faisceau A sur B, on devra associer les sphères

$$(27)\qquad u = a\cos\varphi + a'\sin\varphi,\qquad u_0 = b_0\sin\omega\cos\varphi + b'_0\sin\omega'\sin\varphi.$$

La seconde étant écrite

$$(28)\qquad \bar{u}_0 = b_0\cos\varphi_0 + b'_0\sin\varphi_0,$$

on aura la formule

$$(29)\qquad \operatorname{tang}\varphi_0 = \frac{\sin\omega'}{\sin\omega}\operatorname{tang}\varphi.$$

Enfin, l'angle Ω de deux sphères u_0, u'_0 sera donné par

$$(30)\qquad \cos\Omega = \frac{\sin^2\omega\cos\varphi\cos\varphi' + \sin^2\omega'\sin\varphi\sin\varphi'}{\sin U\sin U'},$$

où $\sin^2 U = u_0^2$, $\sin^2 U' = u_0'^2$ introduisent les angles des sphères u et u' avec le cercle B.

Je remarquerai enfin que les formules (25) et (29) font intervenir le *diamètre angulaire relatif* δ des deux cercles, introduit au n° **25**. Elles s'écrivent en effet, en tenant compte de (15),

$$(31) \qquad \operatorname{tang}\varphi = -i \operatorname{tang}\frac{\delta}{2}\operatorname{tang}\varphi_0, \qquad \operatorname{tang}\psi = -i \operatorname{tang}\frac{\delta}{2}\operatorname{tang}\psi_0.$$

24. Au lieu des invariants ω et ω', on peut faire intervenir des combinaisons symétriques de ces invariants. Elle se présentent d'elles-mêmes, si l'on cherche à étendre la notion d'*angle de deux cercles* à deux cercles A et B non sécants.

Le plus naturel est de s'adresser aux formules (4) et (3), établies dans le cas de deux cercles sécants.

Si l'on utilise la formule (4), on obtient la définition proposée par M. Kœnigs, et justifiée par son analogie avec la formule qui donne, en géométrie euclidienne, le cosinus de l'angle de deux directions. Cette analogie apparaît si l'on introduit les coordonnées des deux cercles, qui sont les déterminants des tableaux (matrices)

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 & a'_5 \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & b'_4 & b'_5 \end{matrix} \right\|,$$

formés avec les coordonnées pentasphériques des cercles. Si l'on suppose, comme nous l'avons fait,

$$a^2 = a'^2 = b^2 = b'^2 = 1, \qquad aa' = bb' = 0,$$

ces coordonnées A_k, B_k ($k = 1, 2, \ldots, 10$) satisfont aux conditions

$$\sum_k A_k^2 = 1, \qquad \sum_k B_k^2 = 1,$$

et l'on a

$$\sum A_k B_k = (ab)(a'b') - (a'b)(ab').$$

Si donc on définit un angle σ par la condition

$$(32) \qquad \cos\Psi = (ab)(a'b') - (ab')(a'b),$$

cela équivaudra à le définir par la formule

$$\cos\Psi = \sum_{k=1}^{10} A_k B_k \qquad \left(\text{avec} \sum_{k=1}^{10} A_k^2 = \sum_{k=1}^{10} B_k^2 = 1\right);$$

ce qui met en évidence l'analogie en question.

A notre point de vue, il importe de remarquer que le second membre de la formule (32) conserve, au signe près, la même valeur, quand on change les systèmes orthogonaux a, a'; b, b' qui définissent les deux cercles A, B. Cela se vérifie le plus simplement en utilisant les formules du n° **10**. Soient les deux couples orthogonaux quelconques

$$(33) \qquad u = a\cos\varphi + a'\sin\varphi, \qquad u' = -a\sin\varphi + a'\cos\varphi,$$

$$(34) \qquad v = b\cos\psi + b'\sin\psi, \qquad v' = -b\sin\psi + b'\cos\psi,$$

en supposant maintenant les conditions (13) et les notations (14). Il viendra

$$(uv)(u'v') - (uv')(u'v) = \cos\omega\cos\omega',$$

et la formule (32), où a, a', b, b' auront été remplacés par u, v, u', v', deviendra

$$(35) \qquad \cos\Psi = \cos\omega\cos\omega'.$$

Remarquons que $\cos\omega$ et $\cos\omega'$ ne sont définis qu'au signe près, de sorte qu'il serait plus correct de poser seulement

$$\cos\Psi = \pm\cos\omega\cos\omega'.$$

En résumé, étant donnés deux cercles A et B, on peut définir le cosinus de leur angle par la différence des produits en croix formés avec les cosinus des angles que forment deux sphères orthogonales quelconques passant par A avec deux sphères orthogonales quelconques passant par B; car cette différence est constante (au signe près) pour tous les couples de sphères orthogonales en question. Et il équivaut au même de dire que le cosinus de l'angle à définir est égal au produit des cosinus des angles suivant lesquels se coupent les couples de sphères centrales ayant pour intersections respectives les cercles perpendiculaires communs à A et B.

25. Passant à la formule (3), nous remarquons que, pour des cercles A, B non sécants, le second membre est encore la somme des carrés des sinus des angles formés par l'un des cercles avec deux sphères orthogonales passant par l'autre.

Pour deux couples (33) et (34) quelconques, cette somme est, d'après les formules (6″) et (7″), suivant le rôle attribué aux deux cercles,

$$\sin^2 U + \sin^2 U' = \sin^2\omega + \sin^2\omega', \qquad \sin^2 V + \sin^2 V' = \sin^2\omega + \sin^2\omega'.$$

Elle ne dépend donc pas des arbitraires qui figurent dans sa formation, rôle des cercles, choix des couples de sphères orthogonales.

On peut donc définir comme angle des deux cercles, à cet autre point de vue, l'angle Ψ_1 dont le carré du sinus est égal à la somme constante en question, ce qui revient à poser

$$\sin^2\Psi_1 = \sin^2\omega + \sin^2\omega', \tag{36}$$

formule où interviennent de nouveau les angles ω et ω' des sphères centrales. Ce n'est naturellement que la formule plus générale (3)

$$\sin^2\Psi_1 = 2 - (ab)^2 - (ab')^2 - (a'b')^2 - (a'b')^2 \tag{37}$$

(relative à deux couples orthogonaux quelconques), appliquée aux couples des sphères centrales.

Nous réserverons le nom d'*angle des deux cercles* à l'angle Ψ, introduit par M. Kœnigs, et nous donnerons à l'angle Ψ_1, que nous venons de définir, celui d'*inclinaison relative des deux cercles* (¹).

(¹) Si les cercles sont en involution, on a

$$\omega' = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\Psi = 0, \quad \sin^2\Psi_1 = 1 + \sin^2\omega \quad \text{ou} \quad \cos^2\Psi_2 = -\sin^2\omega.$$

On peut alors, par une inversion, transformer en droites un des cercles donnés et un des cercles perpendiculaires communs. Le système A, B est alors formé d'un cercle et d'une droite passant par son centre; et ω est l'*inclinaison* de la droite sur le plan du cercle. Donc Ψ_1 caractérise alors cette inclinaison, ce qui explique la dénomination adoptée.

26. Quand on définit les cercles par leurs coordonnées, on est conduit à introduire un autre élément. C'est, en gardant les notations précédentes, le carré de la matrice formée avec les coordonnées des quatre sphères a, a', b, b', satisfaisant toujours à

$$a^2 = a'^2 = b^2 = b'^2 = 1, \qquad aa' = bb' = 0.$$

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 & a'_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & b'_4 & b'_5 \end{matrix} \right\|.$$

Pour l'évaluer au moyen des coordonnées des deux cercles, il faut représenter celles-ci avec deux indices :

$$A_{ij} = a_i a'_j - a_j a'_i, \qquad B_{ij} = b_i b'_j - b_j b'_i.$$

On est amené à introduire ainsi les cinq formes

$$A_{ij} A_{kl} + A_{ik} A_{lj} + A_{il} A_{jk} = \Omega_h,$$

où h, i, j, k, l sont des indices différents. L'élément en question est la somme des carrés des polaires de ces cinq formes, c'est-à-dire [1]

$$(38) \qquad E^4 = \sum_h \left\{ \sum_s B_s \frac{\partial \Omega_h}{\partial A_s} \right\}^2.$$

Le carré de la matrice en question est donné, avec nos notations, par la formule (1), d'où résultent les formules

$$(39) \qquad E^4 = \cos^2 \Psi - \cos^2 \Psi_1 = \sin^2 \Psi_1 - \sin^2 \Psi = \sin^2 \omega \sin^2 \omega',$$

dès que l'on tient compte de (32), (37), (35), (36).

---

[1] Cette forme doublement quadratique a été introduite par M. Kœnigs pour exprimer la condition d'intersection des deux cercles ($E^4 = 0$). Il faut observer que, dans nos notations, $\Sigma A_s^2 = \Sigma B_s^2 = 1$: la formule (38) définit, par suite, l'élément que E. von Weber désigne par la lettre H. L'expression de $\cos \Psi$ est désignée par J dans son article. M. Besserve s'est servi, d'après Darboux, des expressions de ces deux éléments en fonction des distances mutuelles des foyers des deux cercles.

Comme la condition $E = 0$ est celle qui exprime que les cercles se rencontrent, nous dirons que E est l'*écart angulaire* des deux cercles.

On peut enfin chercher la relation entre les éléments que nous venons de définir et le diamètre angulaire relatif défini au n° **19** par la formule

$$\operatorname{tang}\frac{\delta}{2} = i\frac{\sin\omega}{\sin\omega'}.$$

On a

$$\cos\delta = \frac{\sin^2\omega' + \sin^2\omega}{\sin^2\omega' - \sin^2\omega}, \qquad \sin\delta = \frac{2i\sin^2\omega\sin^2\omega'}{\sin^2\omega' - \sin^2\omega}, \qquad \operatorname{tang}\delta = \frac{2i\sin^2\omega\sin^2\omega'}{\sin^2\omega' + \sin^2\omega},$$

d'où

$$\operatorname{tang}^2\delta = -\frac{4E^4}{\sin^4\Psi_1}. \tag{40}$$

IV. — Application aux surfaces cerclées. Éléments géométriques associés ou cercle générateur.

27. Nous allons appliquer les résultats précédents à deux cercles infiniment voisins d'une surface cerclée Σ. Le cercle générateur C est défini, initialement, par deux sphères, c et c', que nous pouvons supposer orthogonales; les coordonnées c_k, c'_k de ces sphères étant fonctions d'un paramètre t. Nous allons leur substituer un autre couple orthogonal variable

$$g = c\cos\gamma + c'\sin\gamma, \qquad g' = -c\sin\gamma + c'\cos\gamma, \tag{41}$$

choisi de manière à simplifier les calculs ultérieurs. Il est entendu que nous supposons

$$c^2 = c'^2 = 1, \qquad cc' = 0;$$

de sorte que nous aurons aussi

$$g^2 = g'^2 = 1, \qquad gg' = 0.$$

La condition que nous imposons au couple (41) est que chaque sphère de ce couple soit orthogonale au cercle caractéristique de

l'autre, c'est-à-dire que l'on ait

$$g\,dg' = g'\,dg = 0. \tag{42}$$

L'identité $g\,dg' + g'\,dg = 0$, qui résulte de $gg' = 0$, indique que cette double condition se réduit à une seule, qui est

$$g[-\sin\gamma\,dc + \cos\gamma\,dc' - g\,d\gamma] = 0,$$

ou, à cause de $c\,dc = c'\,dc' = 0$, $c\,dc' = -c'\,dc$,

$$\left\{\begin{array}{l} d\gamma = e\,dc' = -c'\,dc = \frac{1}{2}(c\,dc' - c'\,dc) = \rho\,dt \\ \quad \text{avec} \\ \qquad \rho = c\dfrac{dc'}{dt} = -c'\dfrac{dc}{dt}. \end{array}\right. \tag{43}$$

La détermination de γ dépend donc d'une quadrature, et γ est défini à une constante additive près.

Remarquons l'interprétation suivante. L'angle de la sphère c avec la sphère $c' + \Delta c'$ est de la forme $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, avec $\sin\varepsilon = c(c' + \Delta c')$. Donc $\rho = c\frac{dc'}{dt} = \lim\frac{\varepsilon}{\Delta t}$ mesure l'un des éléments de la variation du couple (c, c'); il est égal et de signe contraire à celui que l'on obtient en changeant le rôle des deux sphères. C'est ce que l'on appellera la *vitesse de rotation* (conforme) du couple [1]. Cette vitesse est réduite à zéro pour les couples (g, g'), ci-dessus déterminés.

On peut observer que $c(c' + \Delta c')$ est aussi le cosinus de l'angle du cercle (c, c') avec le cercle $(c', c' + \Delta c')$, intersection de la sphère c' et de la sphère voisine $c' + \Delta c'$.

28. Cherchons l'*angle du cercle* C *avec le cercle infiniment voisin* (n° **24**). Il est donné par la formule (32), c'est-à-dire par

$$\cos\Psi = [g(g + \Delta g)]\,[g'(g' + \Delta g')] - [g(g' + \Delta g')]\,[g'(g + \Delta g)]. \tag{44}$$

---

[1] On devrait dire *vitesse de rotation propre*. Dans le cas d'un couple de plans rectangulaires, en géométrie euclidienne, c'est la projection de la vitesse de rotation instantanée sur l'arête du dièdre formé par ces deux plans.

Or, à cause de

$$(g+\Delta g)^2=1 \qquad \text{ou} \qquad 2g\Delta g-\overline{\Delta g}^2=0,$$

ceci se réduit à

$$\cos\Psi=1-\frac{1}{2}(\Delta g^2+\Delta g'^2)+\ldots.$$

les termes non écrits étant d'ordre infinitésimal supérieur, puisque $g\Delta g'$, $g'\Delta g$ sont d'ordre supérieur au premier, à cause des conditions (42). On aura donc, pour la partie principale de σ^2, l'expression $dg^2+dg'^2$. Nous introduirons donc l'élément fondamental $d\sigma$ défini par

$$(45) \qquad d\sigma^2=dg^2+dg'^2,$$

qui fournit l'angle de C avec le cercle infiniment voisin, et définit, par intégration, ce que l'on peut appeler la *distance angulaire* de deux cercles C, mesurée sur la surface Σ.

Opérons de même pour l'*inclinaison relative du cercle* C *et du cercle infiniment voisin* (n° **25**). La formule (37) donne ici

$$(46) \qquad \begin{aligned}\sin^2\Psi_1=2&-[g(g+\Delta g)]^2-[g'(g'+\Delta g')]^2\\&-[g(g'+\Delta g')]^2-[g'(g+\Delta g)]^2,\end{aligned}$$

ou, en réduisant aux termes d'ordre infinitésimal moindre,

$$\sin^2\Psi_1=\overline{\Delta g}^2+\overline{\Delta g'}^2+\ldots.$$

Donc l'inclinaison cherchée est encore $dg^2+dg'^2$; de sorte que les deux extensions, au cas de cercles non sécants, de la notion d'angle conduisent ici au même élément infinitésimal.

29. Passons à l'*écart angulaire du cercle* C *et du cercle infiniment voisin* (n° **26**) donné par la formule (39). Les termes du second degré se détruisant, d'après ce qui précède, il faut conserver dans les formules (44) et (46) les termes de degré supérieur. Il vient ainsi, en tenant compte de

$$(g+\Delta g)(g'+\Delta g')=0, \qquad \text{d'où} \qquad g\Delta g'+g'\Delta g=-\Delta g\Delta g',$$

et n'écrivant que l'ensemble des termes d'ordre moindre,

$$E^4 = \overline{\Delta g}^2\,\overline{\Delta g'}^2 - (\Delta g\,\Delta g')^2 + \ldots.$$

Donc l'écart angulaire E des deux cercles infiniment voisins considérés est du premier ordre et sa partie principale est égale à l'élément $d\eta$ défini par la formule

$$(47) \qquad d\eta^4 = dg^2\,dg'^2 - (dg\,dg')^2.$$

Un calcul facile, que j'omets, donne, pour $d\sigma$ et $d\eta$, exprimés au moyen des coordonnées d'un couple quelconque c, c' de sphères orthogonales passant par le cercle variable C, les formules générales

$$(48) \qquad d\sigma^2 = dc^2 + dc'^2 - 2\,d\gamma^2,$$

$$(49) \qquad \begin{aligned} d\eta^4 &= dc^2\,dc'^2 - (dc\,dc')^2 - (dc^2 + dc'^2)\,d\gamma^2 + d\gamma^4 \\ &= (dc^2 - d\gamma^2)(dc'^2 - d\gamma^2) - (dc\,dc')^2, \end{aligned}$$

ce qui conduit à introduire la combinaison simple, indépendante de $d\gamma$,

$$(50) \qquad d\tau^4 = d\sigma^4 - 4\,d\eta^4 = (dc^2 - dc'^2)^2 + 4(dc\,dc')^2.$$

Remarquons que les termes dg^2, dg'^2, dc^2, dc'^2 sont susceptibles d'une interprétation géométrique simple bien connue : dg^2, par exemple, est le carré de l'angle de la sphère g avec la sphère infiniment voisine. Car l'angle ε de g et $g + \Delta g$ est donné par

$$2(1 - \cos\varepsilon) = \varepsilon^2 + \ldots = 2[1 - g(g + \Delta g)] = -2\,g\,\Delta g = \overline{\Delta g}^2,$$

ce qui montre que le carré de la partie principale de ε^2 est dg^2.

Le quotient $\dfrac{dg^2}{dt^2} = \left[\lim \dfrac{\varepsilon}{\Delta t}\right]^2$ est le carré de ce que l'on peut appeler la *vitesse angulaire* (conforme) de la sphère g considérée [1].

30. Le *diamètre angulaire relatif du cercle* C *et du cercle infiniment voisin* a une valeur finie. D'après la formule (40) on a, en

[1] En géométrie euclidienne, la sphère étant remplacée par un plan, c'est la vitesse de rotation instantanée du plan autour de sa caractéristique.

effet, pour cette limite δ,

$$\tan^2\delta = -\frac{4\,d\eta^4}{d\sigma^4}, \tag{51}$$

d'où

$$\cos^2\delta = \frac{d\sigma^4}{d\sigma^4 - 4\,d\eta^4} = \frac{d\sigma^4}{d\tau^4}, \tag{52}$$

équation où intervient l'expression $d\tau^4$ signalée plus haut.

On obtient ainsi un invariant différentiel du premier ordre des surfaces cerclées, et l'on sait que tout autre est une fonction de celui-là. Le plus simple, dans nos notations, serait $\frac{d\sigma}{d\eta}$, que l'on peut considérer comme l'analogue du *paramètre de distribution* des surfaces réglées, puisque $d\sigma$ joue le rôle d'angle, et $d\eta$ le rôle de distance de deux cercles générateurs infiniment voisins ([1]).

31. Considérons enfin les angles ω et ω' formés par les sphères centrales relatives à un cercle C et à un cercle voisin C'. Lorsque ce dernier tend vers le premier, ω et ω' tendent vers zéro; car on a, d'après les formules données aux n^{os} **15** et **16**,

$$\sin^2\omega + \sin^2\omega' = \sin^2\theta, \qquad \sin^2\omega' - \sin^2\omega = \frac{1}{\cos\delta}\sin^2\theta_1.$$

Ces formules donnent immédiatement les parties principales $d\varpi$ et $d\varpi'$ des angles ω et ω'

$$d\varpi^2 = \left(1 - \frac{1}{\cos\delta}\right)\frac{1}{2}\,d\sigma^2, \qquad d\varpi'^2 = \left(1 + \frac{1}{\cos\delta}\right)\frac{1}{2}\,d\sigma^2, \tag{53}$$

δ étant défini par les formules (51) ou (52).

([1]) *Voir* la Thèse de M. Besserve, qui donne (p. 48) des formules équivalentes à (51) et (52). Il introduit l'angle δ comme angle des sphères passant par C dont les points de contact avec la surface sont confondues (*sphères fondamentales*). Il indique aussi l'analogie de $\frac{d\sigma}{d\eta}$ avec le *paramètre de distribution* que nous signalons ici, mais avec une définition très indirecte de l'élément qui joue le rôle de distance (p. 44).

Pour établir la concordance de nos formules avec celles de M. Besserve, introduisons les coordonnées pentasphériques des foyers (x, y, z), (x', y', z') du

On en conclut encore les relations

$$(54)\quad d\sigma^2 = d\varpi^2 + d\varpi'^2, \qquad d\eta^2 = d\varpi\, d\varpi', \qquad d\zeta^4 = d\sigma^4 - 4\,d\eta^4 = (d\varpi^2 - d\varpi'^2)^2$$

entre $d\varpi$ et $d\varpi'$ et les éléments invariants précédemment introduits.

En vertu des formules (45) et (47), on voit que $d\varpi^2$ et $d\varpi'^2$ sont les deux racines de l'équation en s

$$(55)\qquad (s - dg^2)(s - dg'^2) - (dg\, dg')^2 = 0.$$

---

cercle C :

$$f_1 = x, \quad f_2 = y, \quad f_3 = z, \quad f_4 = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{2}, \quad f_5 = \frac{x^2 + y^2 - z^2 + 1}{2i};$$

$$f'_1 = x', \quad f'_2 = y', \quad f'_3 = z', \quad f'_4 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1}{2}, \quad f'_5 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2 + 1}{2i}.$$

On a

$$ff' = 2R^2,$$

R étant le rayon du cercle; et l'on peut appliquer nos formules avec

$$c = \frac{f + f'}{2R}, \qquad c' = \frac{f - f'}{2iR}.$$

On trouve

$$dc^2 + dc'^2 = \frac{df\, df'}{R^2} - 2\frac{dR^2}{R^3}, \qquad dc^2 - dc'^2 = \frac{df^2 + df'^2}{2R^2}, \qquad dc\, dc' = \frac{df^2 - df'^2}{4iR^2}$$

et

$$d\eta = c\, dc' = \frac{f'\, df - f\, df'}{4iR^2} = \frac{P + P'}{4iR^2},$$

$$P = (x' - x)\, dx + (y' - y)\, dy + (z' - z)\, dz,$$

$$P' = (x' - x)\, dx' + (y' - y)\, dy' + (z' - z)\, dz'.$$

On a ainsi

$$(\alpha)\qquad d\sigma^2 = \frac{df\, df'}{R^2} + \frac{PP'}{2R^4}, \qquad d\zeta^4 = d\sigma^4 - 4\,d\eta^4 = \frac{df^2\, df'^2}{R^4},$$

et l'on doit remarquer que $df\, df'$, df^2, df'^2 se réduisent à

$$df^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad df'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2,$$

$$df\, df' = dx\, dx' + dy\, dy' + dz\, dz'.$$

Les seconds membres des formules (α) sont ainsi identiques aux quantités $\Delta_1^2\, dt^2$, $\Delta^4\, dt^4$ de M. Besserve. D'après la formule (52), $\frac{d\sigma}{d\zeta}$ est l'invariant I_0 de M. Besserve.

ou, si l'on revient à c et c',

$$(55\,bis)\qquad (s + d\gamma^2 - dc^2)(s + d\gamma^2 - dc'^2) - (dc\,dc')^2 = 0.$$

Ces éléments $d\varpi$ et $d\varpi'$ vont jouer dans la suite un rôle important.

32. Nous allons chercher maintenant ce que deviennent, lorsque le cercle C′ de la surface tend vers C, les sphères centrales relatives au couple (C, C′) et le pentasphère orthogonal associé à ce couple.

Les sphères centrales

$$\begin{aligned} a &= g\cos\varphi_1 + g'\sin\varphi_1, & b &= (g+\Delta g)\cos\psi_1 + (g'+\Delta g')\sin\psi_1, \\ a' &= -g\sin\varphi_1 + g'\cos\varphi_1, & b' &= -(g+\Delta g)\sin\psi_1 + (g'+\Delta g')\cos\psi_1 \end{aligned}$$

sont définies (n° **17**) par les conditions $ab' = a'b = 0$, qui, combinées par addition et soustraction, donnent les équations

$$\begin{aligned} (2 + g\,\Delta g + g'\Delta g')\sin(\varphi_1 - \psi_1) + (g\,\Delta g' - g'\Delta g)\cos(\varphi_1 - \psi_1) &= 0, \\ (g'\,\Delta g' - g\,\Delta g)\sin(\varphi_1 + \psi_1) + (g\,\Delta g' + g'\Delta g)\cos(\varphi_1 + \psi_1) &= 0. \end{aligned}$$

La première montre que $\varphi_1 - \psi_1$ est infiniment petit; c'est même un infiniment petit du troisième ordre au moins par rapport à l'accroissement Δt du paramètre qui fait passer de C à C′. Car on a

$$g\,dg' = g'\,dg = 0,$$

et l'on en déduit

$$g\,d^2g' = -dg\,dg' = g'\,d^2g.$$

Nous transformons la seconde en tenant compte des identités

$$2g\,\Delta g = -\overline{\Delta g}^2, \qquad 2g'\,\Delta g' = -\overline{\Delta g'}^2,$$

déjà utilisées, et de l'identité

$$g\,\Delta g' + g'\Delta g = -\Delta g\,\Delta g',$$

qui résulte de

$$(g + \Delta g)(g' + \Delta g') = 0.$$

Il vient ainsi

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 + \psi_1) = \frac{2\,\Delta g\,\Delta g'}{\overline{\Delta g}^2 - \overline{\Delta g'}^2};$$

et l'on conclut [1] que φ_1 et ψ_1 tendent vers une limite commune Φ, donnée par

$$\text{(56)} \qquad \operatorname{tang} 2\Phi = \frac{2\,dg\,dg'}{dg^2 - dg'^2}.$$

Les sphères centrales a et b tendent donc vers la même sphère limite, qui, d'après les formules (20), est aussi limite pour la sphère p du pentasphère associé au couple; nous la désignerons par cette même lettre p. Nous désignerons de même par p' la sphère vers laquelle tendent a', b' et la sphère p' du pentasphère. Nous posons donc ici

$$\text{(57)} \qquad p = g\cos\Phi + g'\sin\Phi, \qquad p' = -g\sin\Phi + g'\cos\Phi,$$

Pour trouver ce que deviennent les cercles perpendiculaires communs (p, q), (p', q'), il suffira de chercher ce que deviennent q et q', données par les formules (20). On a, par exemple,

$$\frac{b-a}{2\sin\frac{\omega}{2}} = \frac{\Delta g}{2\sin\frac{\omega}{2}}\cos\psi_1 + \frac{\Delta g}{2\sin\frac{\omega}{2}}\sin\psi_1,$$

d'où l'on conclut immédiatement, à la limite,

$$-q = \frac{dg}{d\varpi}\cos\Phi + \frac{dg'}{d\varpi}\sin\Phi.$$

On aura pour q' une formule toute semblable. Nous introduirons les valeurs opposées, de sorte que nous aurons, pour limite des deux sphères q, q',

$$\text{(58)} \qquad q = \frac{dg}{d\varpi}\cos\Phi + \frac{dg'}{d\varpi}\sin\Phi, \qquad q' = -\frac{dg}{d\varpi'}\sin\Phi + \frac{dg'}{d\varpi'}\cos\Phi.$$

Quant à la cinquième sphère du pentasphère considéré, qui est la sphère orthogonale commune aux quatre autres, elle tend vers la sphère orthogonale commune aux sphères (57), (58), ou, plus simplement, aux sphères g, g', dg, dg' : on peut dire que cette dernière sphère est la sphère orthogonale à C et au cercle infiniment voisin.

---

[1] Comme il a été dit [n° **4**], nous ne considérons que les cas généraux; nous écartons donc ici le cas d'indétermination où $dg\,dg'$ et $dg^2 - dg'^2$ seraient nuls tous deux

33. *En résumé*, nous trouvons deux cercles Γ et Γ' perpendiculaires communs au cercle C et au cercle infiniment voisin; nous les appellerons les *cercles centraux de* C; les points I et J, I′ et J′ où ils coupent C seront les deux couples de *points centraux* (¹). Nous appellerons *sphères centrales* de C les sphères p et p' qui passent respectivement par C et Γ, et par C et Γ'. Nous appellerons *sphères adjointes* les sphères q et q' qui, passant respectivement par Γ et Γ', sont respectivement orthogonales aux sphères centrales p et p' (passant par Γ, et par Γ'). Enfin nous appellerons *sphère orthogonale* de C la sphère orthogonale à C et au cercle infiniment voisin.

Les deux sphères centrales, les deux sphères adjointes et la sphère orthogonale constituent, d'après ce qui précède, un *pentasphère orthogonal associé à* C, qui est entièrement déterminé.

On a introduit précédemment les sphères menées par C et tangentes au cercle voisin C′; elles ont, comme nous l'avons vu, pour bissectrices les sphères centrales relatives à C. A la limite ces sphères tangentes deviennent ce qu'on a appelé *sphères fondamentales* (²).

Les sphères que nous appelons « sphères centrales » sont donc bissectrices de ces sphères fondamentales et forment avec elles les angles $\pm\frac{\delta}{2}$ et $\frac{\pi}{2}\pm\frac{\delta}{2}$.

34. Les formules (22) montrent que le cercle q, q', défini par (38), c'est-à-dire le cercle dg, dg', est la position limite commune C_0 des cercles A_0 et B_0, considérés au n° **23**, si l'on assimile C au cercle A considéré alors, et C′ au cercle B (³). Nous dirons que C_0 est le *cercle associé à* C.

Reprenons les notations de ce n° **23**, et considérons la sphère u passant par C et qui fait l'angle φ avec la sphère centrale a. Imaginons en même temps la sphère u_0 qui coupe C′ orthogonalement aux points

(¹) Ne pas confondre avec les points introduits sous ce nom par Enneper et Demartres.

(²) Besserve, *Thèse*, p. 48.

(³) Ce cercle C_0 est celui qui a pour foyers les points où la *sphère orthogonale* de C coupe C. Les cercles C et C_0 sont, évidemment, conjugués.

m et m', où C' est rencontré par u : elle fait avec b_0 l'angle φ_0 donné par la formule (29).

Supposons, par exemple, φ constant : m et m' se déplacent lorsque Δt tend vers zéro, sur la courbe d'intersection (autre que C) de u avec la surface cerclée, et tendent vers les points μ et μ' où cette courbe coupe C.

Ce sont les points de contact de u avec la surface. Ils sont donc situés sur la sphère passant par C_0 et faisant avec q (limite de b_0) l'angle φ_0 qu'on obtient en passant à la limite dans la formule (29), c'est-à-dire qui est donné par

$$\text{(59)} \qquad \operatorname{tang}\varphi_0 = \frac{d\varpi'}{d\varpi}\operatorname{tang}\varphi.$$

Remarquons que, d'après (15), on a

$$\text{(15 bis)} \qquad \operatorname{tang}\frac{\delta}{2} = i\frac{d\varpi}{d\varpi'},$$

de sorte que cette formule (59) peut aussi s'écrire [comparez (31)]

$$\text{(59 bis)} \qquad \operatorname{tang}\varphi = -i\operatorname{tang}\frac{\delta}{2}\operatorname{tang}\varphi_0.$$

On a ainsi une forme tout à fait précise de la *loi de variation des sphères, passant par* C, *et tangentes à la surface aux divers points de* C. Si l'on se donne, par exemple, le point de contact μ, on cherchera l'angle φ_0 que fait avec la sphère adjointe q la sphère qui passe par C_0 et μ; et la formule (59 *bis*) donnera l'angle φ que fait la sphère tangente cherchée avec la sphère centrale p.

On remarquera l'analogie de la formule (59) avec la *formule de Chasles*, relative aux surfaces réglées. On voit qu'à ce point de vue c'est $\frac{d\varpi'}{d\varpi}$ qui joue le rôle de paramètre de distribution.

En particulier, $\varphi_0 = k\pi$ entraîne $\varphi_0 = k'\pi$, c'est-à-dire que les points centraux relatifs à la sphère centrale p considérée sont les points de contact de cette sphère.

Si l'on fait $\delta = \pm\frac{\delta}{2}$ dans (59 *bis*), on trouve $\operatorname{tang}\varphi_0 = \pm i$, ce qui indique que le point de contact d'une sphère fondamentale est sur la

sphère de rayon nul $q \mp iq'$, c'est-à-dire est en un des foyers F, F′ du cercle C_0, comme on devait s'y attendre (*voir* note (¹), p. 125). Ces foyers sont, en d'autres termes, les points doubles de l'involution des couples de points de contact des sphères du faisceau C.

Remarquons encore que φ_0, comme φ, varie de $\frac{\pi}{2}$ quand on passe d'une sphère centrale à l'autre.

Nous avons défini la loi de variation en nous servant de la sphère centrale p; il est clair que des considérations toutes semblables s'appliquent à la sphère centrale p' et à son adjointe q'.

34 *bis*. Je signale encore la formule qui donne l'angle d'une sphère quelconque du faisceau C avec le cercle infiniment voisin C′. On la déduit immédiatement de la formule (6″); en ne gardant que les parties principales des deux membres, et désignant par dU celle de l'angle considéré, on obtient immédiatement

$$dU^2 = \cos^2\varphi\, d\varpi^2 + \sin^2\varphi\, d\varpi'^2. \tag{60}$$

De là une interprétation nouvelle de $d\varpi$ et $d\varpi'$ qu'on obtient en faisant successivement $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Ce sont les angles des deux sphères centrales de C avec le cercle C′, infiniment voisin de C sur la surface.

Remarquons enfin que, pour deux sphères du faisceau C, orthogonales entre elles, on a

$$dU^2 + dU'^2 = d\varpi^2 + d\varpi'^2 = d\sigma^2, \tag{54 bis}$$

ce qui donne une définition, très générale et très simple, de l'élément $d\sigma$.

V. — Les invariants des surfaces cerclées.

35. La génération de la surface cerclée Σ est maintenant ramenée au mouvement (dans l'espace conforme) du pentasphère orthogonal Π que nous avons associé au cercle générateur C : sphères centrales p et p', sphères adjointes q et q', sphère orthogonale. Nous désignerons par r cette dernière. Prenons comme paramètre-temps l'élément inva-

riant σ, défini [1] par

$$d\sigma^2 = dg^2 + dg'^2 = dc^2 + dc'^2 - \frac{1}{2}(c\,dc' - c'\,dc)^2;$$

et les invariants fondamentaux, dont l'expression en fonction de σ définira la surface Σ et toutes celles qui lui sont homologues par les transformations du groupe conforme, seront les *vitesses de rotation* (conformes) (n° **27**) des divers couples de sphères du pentasphère Π.

Calculons ces rotations. La différentiation des équations (57) donne, en tenant compte des formules (58),

$$(61) \qquad dp = p'\,d\Phi + q\,d\varpi, \qquad dp' = -p\,d\Phi + q'\,d\varpi'.$$

On en conclut

$$(62) \quad p'\,dp = -p\,dp' = d\Phi, \qquad q\,dp = -p\,dq = d\varpi, \qquad q'\,dp' = -p'\,dq' = d\varpi',$$
$$(63) \quad p\,dq' = p'\,dq = q\,dp' = q'\,dp = p\,dr = p'\,dr = r\,dp = r'\,dp = 0.$$

Les éléments invariants $d\varpi$, $d\varpi'$ sont les racines de l'équation (55) ou (55 *bis*). L'angle Φ est donné par la formule (56). De sa définition géométrique (angle de la sphère centrale p avec la sphère g) résulte qu'il augmente d'une constante γ_0 si l'on substitue au couple g, g', pour définir le cercle, un autre couple à vitesse de rotation nulle; car deux tels couples font un angle constant γ_0. On pouvait donc prévoir l'invariance de $d\Phi$. On a, du reste,

$$(64) \quad d\tau^2\,d\Phi = (dg\,d^2g' + dg'\,d^2g)\cos 2\Phi - (dg\,d^2g - dg'\,d^2g')\sin 2\Phi$$

avec

$$d\tau^2 \cos 2\Phi = dg^2 - dg'^2, \qquad d\tau^2 \sin 2\Phi = 2\,dg\,dg',$$
$$d\tau^4 = (dg^2 - dg'^2)^2 + 4(dg\,dg')^2.$$

56. Dans le calcul des autres vitesses de rotation, j'emploierai la notation δ, pour indiquer la différentiation d'une fonction de t et de Φ, dans laquelle Φ est laissé constant. On a ainsi, d'après (58),

$$\delta p = \cos\Phi\,dg + \sin\Phi\,dg' = q\,d\varpi, \qquad \delta p' = -\sin\Phi\,dg + \cos\Phi\,dg' = q'\,d\varpi'.$$

---

[1] Ceci exclut la classe des surfaces cerclées pour lesquelles $dg^2 + dg'^2$ est nul.

A cause de $qq' = 0$, on en conclut

$$\delta p\, d\,\delta p' - \delta p'\, d\,\delta p = (q\, dp' - q'\, dq)\, d\varpi\, d\varpi'.$$

On a, d'autre part,

$$d\,\delta p = \delta^2 p + \delta p'\, d\Phi, \qquad d\,\delta p' = \delta^2 p' - \delta p\, d\Phi,$$
$$\delta p^2 + \delta p'^2 = dg^2 + dg'^2 = d\sigma^2.$$

Par suite,

$$(q\, dq' - q'\, dq)\, d\varpi\, d\varpi' = (\delta p\, \delta^2 p' - \delta p'\, \delta^2 p) - d\sigma^2\, d\Phi;$$
$$= (dg\, d^2 g' - dg'\, d^2 g) - d\sigma^2\, d\Phi;$$

d'où la formule

$$(65)\quad q'\, dq = -q\, dq' = \frac{1}{2}(q'\, dq - q\, dq') = \frac{d\sigma^2\, d\Phi - (dg\, d^2 g' - dg'\, d^2 g)}{2\, d\varpi\, d\varpi'}.$$

57. Le vecteur r a pour composantes les déterminants formés avec le tableau des coefficients de p, p', q, q', ce que nous écrivons symboliquement

$$(66)\qquad r = \| p \quad p' \quad q \quad q' \|.$$

On a donc

$$r\, dq = | p \quad p' \quad q \quad q' \quad dq |, \qquad r\, dq' = | p \quad p' \quad q \quad q' \quad dq' |,$$

les seconds membres de ces formules désignant les déterminants dont les colonnes seraient les composantes des vecteurs indiqués successivement entre les deux barres. On a, avec les notations précédentes,

$$q = \frac{\delta p}{d\varpi}, \qquad q' = \frac{\delta p'}{d\varpi'}, \qquad dq = \frac{1}{d\varpi}(\delta^2 p + \delta p'\, d\Phi) + d\frac{1}{\varpi}\,\delta p,$$
$$dq' = \frac{1}{d\varpi'}(\delta^2 p' - \delta p\, d\Phi) + d\frac{1}{\varpi}\,\delta p',$$

de sorte qu'il vient

$$r\, dq\, d\varpi\, d\varpi' = \frac{1}{d\varpi}| p \quad p' \quad \delta p \quad \delta p' \quad \delta^2 p |,$$

$$r\, dq'\, d\varpi\, d\varpi' = \frac{1}{d\varpi'}| p \quad p' \quad \delta p \quad \delta p' \quad \delta^2 p' |;$$

d'où, en posant

$$(67)\quad dG' = | g \quad g' \quad dg \quad dg' \quad d^2 g |, \qquad dG'' = | g \quad g' \quad dg \quad dg' \quad d^2 g' |,$$

les formules

$$(68)\quad \begin{cases} r\,dq = \dfrac{1}{d\varpi\,d\varpi'}\left(\dfrac{dG'}{d\varpi}\cos\Phi + \dfrac{dG'}{d\varpi}\sin\Phi\right), \\ r\,dq' = \dfrac{1}{d\varpi\,d\varpi'}\left(-\dfrac{dG'}{d\varpi'}\sin\Phi + \dfrac{dG'}{d\varpi'}\cos\Phi\right). \end{cases}$$

38. On peut se proposer de calculer, en fonction de c et c' (sphères orthogonales quelconques passant par le cercle générateur), les rotations que nous venons d'exprimer au moyen de g et g' (couple orthogonal à vitesse de rotation nulle). Ce calcul fera intervenir l'angle γ, défini par $d\gamma = c\,dc = -c'\,dc$, qui définit le couple (g, g') par rapport au couple (c, c'). Nous désignerons par ∂ une différentiation de fonctions de t et de γ, dans laquelle on laisserait γ constant. Nous aurons ainsi, en ayant égard à $g\,dg = g'\,dg' = 0$, $g\,dg' = g'\,dg = 0$,

$$\partial g = \cos\gamma\,dc + \sin\gamma\,dc', \qquad \partial g' = -\sin\gamma\,dc + \cos\gamma\,dc',$$
$$\partial g = dg - g'\,d\gamma, \qquad \partial g' = dg' + g\,d\gamma,$$
$$\partial g^2 - \partial g'^2 = dg^2 - dg'^2, \qquad \partial g\,\partial g' = dg\,dg';$$

d'où l'on conclut

$$\frac{2\,dc\,dc'}{dc^2 - dc'^2} = \frac{(dg^2 - dg'^2)\sin 2\gamma + 2\,dg\,dg'\cos 2\gamma}{(dg^2 - dg'^2)\cos 2\gamma - 2\,dg\,dg'\sin 2\gamma};$$

et, en tenant compte des formules (64),

$$(69)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} 2(\Phi + \gamma) = \dfrac{2\,dc\,dc'}{dc^2 - dc'^2}, \qquad d\tau^2\cos 2(\Phi + \gamma) = dc^2 - dc'^2, \\ \qquad\qquad d\tau^2\sin 2(\Phi + \gamma) = 2\,dc\,dc'. \end{cases}$$

On remarquera que ces formules définissent directement la position des sphères centrales par rapport au couple (c, c'), l'angle de la sphère c avec la sphère centrale p étant $\Phi + \gamma$.

On en conclut

$$(70)\quad \begin{cases} d\Phi = -d\gamma + \dfrac{1}{d\tau^2}\,[(dc\,d^2c' + dc'\,d^2c)(dc^2 - dc'^2) \\ \qquad\qquad 2\,dc\,dc'(dc\,d^2c - dc'\,d^2c')]. \end{cases}$$

Pour le calcul de $q'\,dq$, nous avons ensuite

$$\partial^2 g = \cos\gamma\, d^2 c + \sin\gamma\, d^2 c', \qquad \partial^2 g' = -\sin\gamma\, d^2 c + \cos\gamma\, d^2 c',$$
$$\partial^2 g = d^2 g - 2\, dg'\, d\gamma - g\, d\gamma^2 - g'\, d^2\gamma,$$
$$\partial^2 g' = d^2 g' - 2\, dg\, d\gamma - g'\, d\gamma^2 + g\, d^2\gamma;$$

d'où, en observant les identités $g\, d^2 g = -\, dg^2$, $g'\, d^2 g' = -\, dg'^2$,

$$\partial g\, \partial^2 g' - \partial g'\, \partial^2 g = (dg\, d^2 g' - dg'\, d^2 g) - d\gamma\, d\sigma^2 + 2\, d\gamma^3.$$

Comme on a, d'autre part,

$$\partial g\, \partial^2 g' - \partial g'\, \partial^2 g = dc\, d^2 c' - dc'\, d^2 c,$$

il vient

$$(71) \qquad q'\, dq = \frac{1}{2\, d\varpi\, d\varpi'}\left[d\sigma^2(d\Phi + d\gamma) - 2\, d\gamma^3 - (dc\, d^2 c' - dc'\, d^2 c)\right].$$

Enfin, on peut écrire, par des simplifications immédiates de ces déterminants,

$$dG^{\prime\prime} = |g \quad g' \quad \partial g \quad \partial g' \quad \partial^2 g'|, \qquad dG'^{\prime\prime} = |g \quad g' \quad \partial g \quad \partial g' \quad \partial^2 g'|;$$

et l'on en conclut

$$dG^{\prime\prime} = dC^{\prime\prime} \cos\gamma + dC'^{\prime\prime} \sin\gamma, \qquad dG'^{\prime\prime} = -\, dC^{\prime\prime} \sin\gamma + dC^{\prime\prime} \cos\gamma,$$

en posant

$$(72) \qquad dC^{\prime\prime} = |c \quad c' \quad dc \quad dc' \quad d^2 c|, \qquad dC'^{\prime\prime} = |c \quad c' \quad dc \quad dc' \quad d^2 c'|.$$

Les formules (68) deviennent ainsi

$$(73) \qquad \begin{cases} r\, dq = \dfrac{1}{d\varpi\, d\varpi'}\left[\dfrac{dC^{\prime\prime}}{d\varpi}\cos(\Phi + \gamma) + \dfrac{dC'^{\prime\prime}}{d\varpi}\sin(\Phi + \gamma)\right], \\ r\, dq' = \dfrac{1}{d\varpi\, d\varpi'}\left[-\dfrac{dC^{\prime\prime}}{d\varpi}\sin(\Phi + \gamma) + \dfrac{dC'^{\prime\prime}}{d\varpi}\cos(\Phi + \gamma)\right]. \end{cases}$$

39. Ayant égard à l'identité $d\sigma^2 = d\varpi^2 + d\varpi'^2$, nous poserons

$$(74) \qquad q\, dp = d\varpi = \cos\alpha\, d\sigma, \qquad q'\, dp' = d\varpi' = \sin\alpha\, d\sigma,$$

ce qui revient, d'après (60), à

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\frac{\delta}{2} = i$$

et donne à la *formule de distribution* (59) la forme

$$(75) \qquad \operatorname{tang}\varphi_0 = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\varphi.$$

On remarquera que α est réel, quand δ est imaginaire, c'est-à-dire quand le cercle infiniment voisin de C est engagé dans C, et inversement.

Pour les autres rotations, nous poserons

$$(76) \quad p'\,dp = d\Phi = P\,d\sigma, \qquad q'\,dq = Q\,d\sigma, \qquad r\,dq = R\,d\sigma, \qquad r\,dq' = R'\,d\sigma.$$

Le système différentiel de Serret-Frenet, qui définit le mouvement (conforme) du pentasphère fondamental II, *s'écrit, par suite,*

$$(77) \qquad \frac{dp}{d\sigma} = q\cos\alpha + p'P, \qquad \frac{dp'}{d\sigma} = q'\sin\alpha - pP,$$

$$(78) \quad \frac{dq}{d\sigma} = -p\cos\alpha + q'Q + rR, \qquad \frac{dq'}{d\sigma} = -p'\sin\alpha - qQ + rR',$$

$$(79) \qquad \frac{dr}{d\sigma} = -qR - q'R'.$$

La forme de la dernière conduit à poser

$$(80) \qquad R = -H\cos\Omega, \qquad R' = -H\sin\Omega.$$

où H et Ω ont les interprétations suivantes.

On a $dr^2 = H^2\,d\sigma^2$, ce qui montre que $H\,d\sigma$ est l'angle de la sphère orthogonale avec la sphère orthogonale voisine; cela revient à dire (n° **29**) que H est la vitesse angulaire (conforme) de la sphère orthogonale.

A cause de $r\,dr = 0$ on voit, d'autre part, que la sphère dr est la sphère qui coupe à angle droit la sphère orthogonale le long de son cercle caractéristique; et cette sphère étant

$$\frac{1}{H}\frac{dr}{d\sigma} = q\cos\Omega + q'\sin\Omega,$$

on voit qu'elle passe par le cercle C_0 associé au cercle C, et que Ω est l'angle qu'elle fait avec la sphère q, adjointe à la sphère centrale p.

Les invariants différentiels de la surface cerclée sont donc

$$(81) \qquad \alpha, \quad P, \quad Q, \quad H, \quad \Omega$$

et les dérivées de ces invariants par rapport à σ. La surface est définie géométriquement, au point de vue conforme, quand on connaît, en fonction de σ, ces cinq invariants fondamentaux. Il faut observer que σ n'est défini qu'à une constante additive près, de sorte que les formules définissant la surface seraient, d'une manière plus précise, de la forme

$$(82) \qquad \frac{d\alpha}{d\sigma} = f_1(\alpha), \qquad P = f_2(\alpha), \qquad Q = f_3(\alpha), \qquad H = f_4(\alpha), \qquad \Omega = f_5(\alpha);$$

c'est-à-dire que ce sont des relations liant, deux à deux, les six invariants différentiels du premier et du second ordre [1].

Si α, P, Q, R, R′ sont connus en fonction de σ, la détermination de la famille de surfaces cerclées, homologues entre elles, qu'ils définissent s'obtient par l'intégration du système (77), (78), (79), où l'on peut considérer les lettres p, p', q, q', r comme des variables ordinaires. Chaque système de coordonnées $p_k, p'_k, q_k, q'_k, r_k$, pour $k = 1, 2, 3, 4, 5$, est une solution de ce système. Il suffit d'assujettir leurs valeurs

---

[1] Comparez Besserve, *Thèse*, p. 101. Nous nous bornons ici au cas général. En ce qui concerne la concordance des notations, elle est établie par ce qui précède en ce qui concerne l'invariant I_0 de M. Besserve, et $I_1 = \frac{dI_0}{d\sigma}$. Les *sphères fondamentales* sont

$$s = p\cos\frac{\delta}{2} + p'\sin\frac{\delta}{2}, \qquad s' = p\cos\frac{\delta}{2} - p'\sin\frac{\delta}{2};$$

d'où l'on tire, en ayant égard à (77),

$$ds^2 = \left(P\,d\sigma + \frac{1}{2}d\delta\right)^2, \qquad ds'^2 = \left(P\,d\sigma - \frac{1}{2}d\delta\right)^2.$$

En comparant aux résultats de la page 66 de la Thèse de M. Besserve, on conclut à l'identité de P avec l'invariant I_2 de cet auteur. M. Besserve trouvant d'autre part (p. 74), pour le carré de l'angle de la sphère orthogonale avec la sphère infiniment voisine, la formule $(I_4^2 + I_5^2 - 2I_0^2 I_4 I_5)\,d\sigma^2$, on en conclut que I_4 et I_5 sont des combinaisons, linéaires et homogènes, de R et R′, dont les coefficients ne dépendront que de α.

initiales à satisfaire aux conditions d'orthogonalité, pour qu'elles y satisfassent quel que soit σ.

Sur l'intégration de ce système, je renverrai aux indications que j'ai données autrefois [1], fournissant le moyen d'en ramener l'intégration à celle d'un système de Lie, d'ordre 3, dont le groupe associé est le groupe projectif qui laisse invariant le complexe linéaire

$$dz + x\,dy - y\,dx = 0.$$

40. Réciproquement, *le mouvement d'un pentasphère*

$$(p, p', q, q', r),$$

pour lequel les rotations des couples (p, q'), (q, p'), (p, r), (p', r) *sont nulles, définit une surface cerclée, pour laquelle ce pentasphère est le pentasphère associé au cercle générateur, lequel est le cercle* (p, p'). Les équations du mouvement seront, en effet, de la forme (77), (78), (79), en déterminant la variable σ par la condition

$$d\sigma^2 = (q\,dp)^2 + (q'\,dp')^2.$$

Soit C le cercle (p, p'). Comme on a

$$rp = 0, \qquad rp' = 0, \qquad r\,dp = 0, \qquad r\,dp' = 0,$$

la sphère r est orthogonale à C et au cercle infiniment voisin.

L'angle de l'une des sphères centrales avec p est donné [équation (69)] par la tangente de l'angle double, qui est nulle, car la condition $q\,dp' = 0$ donne $dp\,dp' = 0$, par la première équation (77). Donc p et p' sont les sphères centrales de C.

En continuant à appliquer à p et p' les formules générales établies précédemment pour c et c', nous trouvons, par (43), $d\gamma = p\,dp' = -\,\mathrm{P}\,d\sigma$, et, par (55 *bis*), en tenant compte de (77),

$$d\varpi^2 = dp^2 - \mathrm{P}^2\,d\sigma^2 = \cos^2\alpha\,d\sigma^2, \qquad d\varpi'^2 = dp'^2 - \mathrm{P}^2\,d\sigma^2 = \sin^2\alpha\,d\sigma^2;$$

on peut disposer des signes $\pm$, dont il est possible d'affecter p et p',

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 148, 8 février 1909. Le système (77), (78), (79) est lui-même un système de Lie, dont le groupe associé est le groupe orthogonal à cinq variables. On trouvera, dans le même Tome des *Comptes rendus* une autre méthode, de Darboux, pour intégrer de tels systèmes.

de manière à conclure de ces formules

$$d\varpi = \cos\alpha\, d\sigma, \qquad d\varpi' = \sin\alpha\, d\sigma.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que les formules (58) deviennent, si l'on y introduit c et c' par les équations (41),

$$q = \frac{dc}{d\varpi}\cos(\Phi+\gamma) + \frac{dc'}{d\varpi}\sin(\Phi+\gamma) + \frac{p'}{d\varpi}d\gamma,$$
$$q' = -\frac{dc}{d\varpi'}\sin(\Phi+\gamma) + \frac{dc'}{d\varpi'}\cos(\Phi+\gamma) - \frac{p}{d\varpi'}d\gamma.$$

Comme ici $c = p$, $c' = p'$, $\Phi + \gamma = 0$, $d\gamma = -\mathrm{P}\, d\sigma$, ces formules, qui définissent les sphères adjointes, se réduisent à

$$q = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\frac{dp}{d\sigma} - p'\mathrm{P}\right], \qquad q' = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{dp'}{d\sigma} + p\mathrm{P}\right].$$

Or ce sont les valeurs mêmes que l'on déduit des formules (77). Donc les sphères q, q' du pentasphère considéré sont bien les sphères adjointes aux sphères centrales du cercle (p, p').

On observera que tout ce qui est essentiel dans les hypothèses résulte de l'existence d'un système d'équations de la forme

$$\frac{dp}{dt} = \mathrm{A}q + \mathrm{P}p', \quad \frac{dp'}{dt} = \mathrm{A}'q' - \mathrm{P}p, \quad pp' = qq' = pq = pq' = p'q = p'q' = 0,$$

entre les vecteurs correspondant à quatre sphères p, p', q, q'.

On peut encore dire que la condition $dp\, dp' = 0$ exprime que les sphères p, p', supposées orthogonales, sont sphères centrales du cercle qu'elles déterminent, et que les conditions

$$p\, dp' = p'\, dq = p\, dq' = 0,$$

quand on les impose à quatre sphères, orthogonales deux à deux, expriment que le cercle (p, p') a pour sphères centrales p et p', et, pour sphères adjointes à ces sphères centrales respectives, les deux autres sphères q et q' du tétrasphère.

VI. — La Géométrie sur la surface cerclée.

41. Un point quelconque du cercle C, de la surface Σ, est, avec les notations précédentes,

$$m = r - iq \sin\vartheta + iq' \cos\vartheta, \tag{83}$$

car on a $m^2 = 0$, $mp = mp' = 0$. Ce point est sur la sphère

$$v_0 = q \cos\theta + q' \sin\theta, \tag{84}$$

car on a $mv_0 = 0$. L'angle θ est l'angle de cette sphère avec la sphère q; et le second point d'intersection de cette sphère avec C est donné par (83), quand on y change θ en $\theta + \pi$. L'angle θ est donc une sorte d'*abscisse angulaire*, sur le cercle C, pour laquelle le cercle C_0, associé à C, joue le rôle de pôle, la sphère adjointe q le rôle d'axe polaire, et les sphères (orientées) passant par C_0 le rôle de rayons vecteurs.

Les points de la surface Σ sont ainsi définis par les *coordonnées intrinsèques absolues* σ et θ.

Conformément à la loi de distribution [équation (75)], la sphère tangente à Σ en m est

$$v = \frac{1}{k}(p \cos\vartheta \sin\alpha + p' \sin\vartheta \cos\alpha), \qquad k = \sqrt{\cos^2\vartheta \sin^2\alpha + \sin^2\vartheta \cos^2\alpha}. \tag{85}$$

On peut le vérifier comme il suit. Sur une courbe quelconque Γ, un point m et un point voisin $m + \Delta m$ peuvent être considérés comme des sphères de rayon nul, qui définissent un faisceau de sphères, orthogonales à la droite joignant les deux points. A ce faisceau appartient la sphère Δm; donc, à la limite, la sphère dm est orthogonale à la courbe Γ en m. On vérifie, du reste, qu'elle passe bien par m, à cause de $m\,dm = 0$, qui résulte de $m^2 = 0$.

Si la courbe Γ est tracée sur Σ, on aura

$$dm = dr - i\,dq \sin\theta + i\,dq' \cos\theta - i v_0\, d\theta.$$

On en conclut, par les formules de Serret-Frenet,

$$v\,dm = \frac{1}{k}[-i \sin\vartheta \cos\vartheta \sin\alpha(-\cos\alpha) - i \cos\vartheta \sin\vartheta \cos\alpha(\sin\alpha)] = 0.$$

Donc la sphère v est orthogonale à toutes les sphères orthogonales en m aux courbes de Σ passant en ce point; et, par suite, est tangente à la surface.

Remarquons que les courbes $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ sont les lieux des points centraux, c'est-à-dire sont analogues aux *lignes de striction* des surfaces réglées [1].

42. Pour deux déplacements d et δ sur la surface, on a l'angle qu'ils forment, par l'angle des sphères dm, δm qui leur sont respectivement orthogonales. Cet angle V est donc donné par la formule

$$\cos V = \frac{dm\,\delta m}{\sqrt{dm^2}\sqrt{\delta m^2}}.$$

Le numérateur est la forme polaire de la forme quadratique dm^2, que l'on calcule au moyen des formules

$$dr^2 = (R^2 + R'^2)\,d\sigma^2, \qquad dq^2 = (\cos^2\alpha + Q^2 + R^2)\,d\sigma^2,$$
$$dq^2 = (\sin^2\alpha + Q^2 + R'^2)\,d\sigma^2;$$
$$dr\,dq = -RR'\,d\sigma^2, \qquad dr\,dq' = QR\,d\sigma^2, \qquad dq\,dq' = RR'\,d\sigma^2;$$
$$v_0\,dr = -(R\cos\theta + R'\sin\theta)\,d\sigma, \qquad v_0\,dq = R\sin\theta\,d\sigma,$$
$$v_0\,dq' = -Q\cos\theta\,d\sigma,$$

qui résultent des équations de Serret-Frenet. On trouve

$$(86) \qquad dm^2 = [(R\cos\theta + R'\sin\theta + iQ)\,d\sigma + i\,d\theta]^2 - k^2\,d\sigma^2.$$

Cette forme n'est pas autre chose, *à un facteur près*, que le ds^2 de la surface. En effet, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées rectangulaires du point m, ses *coordonnées pentasphériques cartésiennes* sont :

$$(87) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} m_1 = \mu x, & m_2 = \mu y, & m_3 = \mu z, \\ m_4 = \mu\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{2}, & & m_5 = \mu\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + 1}{2i}, \end{array} \right.$$

---

[1] Ne pas confondre avec les lignes désignées ainsi par Enneper et Demartres.

μ étant un facteur convenable. Or, on a

$$m = -im_5 - \mu \qquad \text{et} \qquad m^2 = 0.$$

De là

$$\left(d\frac{m_4}{\mu}\right)^2 + \left(d\frac{m_7}{\mu}\right)^2 = 0, \qquad \left(d\frac{m}{\mu}\right)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

$$dm^2 = \mu^2(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Pour déterminer le facteur μ, il suffit d'observer que les coordonnées pentasphériques cartésiennes d'une sphère c, de centre (x_0, y_0, z_0) et de rayon R_0, sont, avec la condition $c^2 = 1$,

$$(88)\quad \left\{\begin{array}{l} c_1 = -\dfrac{x_0}{R_0}, \qquad c_2 = -\dfrac{y_0}{R_0}, \qquad c_3 = -\dfrac{z_0}{R_0}, \\ c_4 = \dfrac{1 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + R_0^2}{2R_0}, \qquad c_5 = i\dfrac{1 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R_0^2}{2R_0}; \end{array}\right.$$

de sorte que, si l'on désigne ici par

$$(x_0, y_0, z_0, R_0), \quad (x_2, y_2, z_2, R_2), \quad (x'_2, y'_2, z'_2, R'_2)$$

les coordonnées des centres et les rayons respectifs des sphères x, q, q', on aura

$$m_1 = -\left(\frac{x_0}{R_0} - i\sin\theta\frac{x_2}{R_2} + i\cos\theta\frac{x'_2}{R'_2}\right),$$

$$m_2 = -\left(\frac{y_0}{R_0} - i\sin\theta\frac{y_2}{R_2} + i\cos\theta\frac{y'_2}{R'_2}\right),$$

$$m_3 = -\left(\frac{z_0}{R_0} - i\sin\theta\frac{z_2}{R_2} + i\cos\theta\frac{z'_2}{R'_2}\right).$$

On en conclut que le point m n'est autre que le point du plan des centres des trois sphères considérées qui a pour coordonnées barycentriques, relativement à ces trois centres, $-\frac{1}{R_0}, \frac{i\sin\theta}{R_2}, \frac{-i\cos\theta}{R'_2}$. Donc le facteur μ a pour expression :

$$(87\ bis)\qquad \mu = -\left(\frac{1}{R_0} - \frac{i\sin\theta}{R_2} + \frac{i\cos\theta}{R'_2}\right),$$

où R_0, R_2, R'_2 sont les rayons de la sphère orthogonale et des sphères adjointes aux sphères centrales.

Puisque l'on a $dm^2 = \mu^2 ds^2$, les *courbes minima* de la surface ont pour équation différentielle $dm^2 = 0$. On arrive à cette même équa-

tion en remarquant que la condition $dm^2 = 0$ exprime que dm est un vecteur définissant un point; que ce point étant infiniment voisin de m, la droite qui joint m à dm est tangente au lieu de m; et que l'identité $m\,dm = 0$ (résultant de $m^2 = 0$) exprime que cette droite est une droite isotrope.

Les *trajectoires orthogonales* des cercles C sont définies par

$$\frac{\partial(dm^2)}{\partial(d\theta)} = 0,$$

ou

$$(89) \qquad i\,d\theta + (\mathrm{R}\cos\theta + \mathrm{R}'\sin\theta + i\mathrm{Q})\,d\sigma = 0.$$

On retrouve ainsi que leur détermination résulte de l'intégration d'une équation de Riccati, obtenue en posant $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \mathrm{T}$.

Par ce changement de variable, la forme (88) deviendra, à un facteur près,

$$\begin{aligned}&\{[\mathrm{R}(1-\mathrm{T}^2) + 2\mathrm{R}'\mathrm{T} + i\mathrm{Q}(1+\mathrm{T}^2)]\,d\sigma + 2i\,d\mathrm{T}\}^2\\ &\quad - [(1-\mathrm{T}^2)^2\sin^2\alpha + 4\mathrm{T}^2\cos^2\alpha]\,d\sigma^2.\end{aligned}$$

Cette forme devra être employée, au lieu de (88), en un point de courbure $q \pm iq'$ (n° **24**), la forme (88) devenant alors illusoire. On a, dans ce cas, $\mathrm{T} = \pm i$, et la forme quadratique en question devient

$$[(\mathrm{R} \pm i\mathrm{R}')\,d\sigma - d\mathrm{T}]^2 + \cos 2\alpha\,d\sigma^2.$$

On en conclut, en particulier, que les lieux des points de courbure coupent le cercle C sous les angles donnés par

$$\cos j = \frac{\mathrm{R} \pm i\mathrm{R}'}{\sqrt{(\mathrm{R} \pm i\mathrm{R}')^2 + \cos 2\alpha}},$$

formule d'où l'on tire, pour interpréter R et R',

$$(\mathrm{R} \pm i\mathrm{R}')^2 = \cos 2\alpha \cot^2 j.$$

43. Passons à la détermination de la *courbure normale* d'une courbe tracée sur la surface. Elle équivaut à celle de la sphère, tangente en m à la surface, et qui a en m, avec la courbe considérée, un contact du second ordre. Une sphère tangente à la surface appartient

au faisceau défini par m et v; elle est donc

$$w = \rho m + v. \tag{90}$$

On a $\rho = rw$, c'est-à-dire que ρ est le cosinus de l'angle de la sphère considérée avec la sphère orthogonale.

Soit d la différentiation relative à la courbe de la surface que nous considérons. Comme on devait s'y attendre, la condition de contact $w\,dm = 0$ est réalisée; et il faut écrire la condition du contact du deuxième ordre, $w\,d^2 m = 0$. Or, si l'on suppose que la sphère w varie avec le point m de la courbe, on déduit de $w\,dm = 0$, l'identité

$$w\,d^2 m + dw\,dm = 0.$$

La condition cherchée est donc

$$0 = dw\,dm = dm(m\,d\rho + \rho\,dm + dv) = \rho\,dm^2 + dm\,dv;$$

d'où la formule cherchée

$$\rho = -\frac{dm\,dv}{dm^2}. \tag{91}$$

Si nous posons

$$\bar{v} = p\cos\theta\sin\alpha + p'\sin\theta\cos\alpha = kv, \tag{92}$$

nous aurons

$$dm\,d\bar{v} = k\,dm\,dv + dk.\,v\,dm = k\,dm\,dv,$$

et la formule précédente pourra s'écrire

$$\rho = -\frac{1}{k}\frac{dm\,d\bar{v}}{dm^2}. \tag{91 bis}$$

Le numérateur se calcule au moyen des équations de Serret-Frenet, qui donnent :

$$dp\,dr = -\mathrm{R}\cos\alpha\,d\sigma^2, \qquad dp\,dq = 0, \qquad dp\,dq' = -(\mathrm{P}\sin\alpha + \mathrm{Q}\cos\alpha)\,d\sigma^2,$$
$$dp'\,dr = -\mathrm{R}'\sin\alpha\,d\sigma^2, \qquad dp'\,dq = (\mathrm{P}\cos\alpha + \mathrm{Q}\sin\alpha)\,d\sigma^2, \qquad dp'\,dq' = 0,$$
$$v_0\,dp = \cos\theta\cos\alpha\,d\sigma, \qquad v_0\,dp' = \sin\theta\sin\alpha\,d\sigma.$$

On trouve

$$(93)\quad -dm\,d\bar{v} = \Big[ik^2\mathrm{P} + \sin\alpha\cos\alpha(\mathrm{R}\cos\theta + \mathrm{R}'\sin\theta + i\mathrm{Q}) - i\sin\theta\cos\theta\frac{d\alpha}{d\sigma}\Big]d\sigma^2 + 2i\sin\alpha\cos\alpha\,d\sigma\,d\theta.$$

On remarquera que les courbes qui satisfont à l'équation $dm\,dv = 0$ peuvent être considérées comme l'analogue des lignes asymptotiques, car en chacun de leurs points, la sphère passant par le cercle générateur, qui est tangente à la surface, a un contact du second ordre avec la courbe. Parmi ces courbes figurent les cercles générateurs $d\sigma = 0$; les autres sont définies par l'équation

$$0 = 2i\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\theta}{d\sigma} + ik^2\mathrm{P} + \sin\alpha\cos\alpha(i\mathrm{Q} + \mathrm{R}\cos\theta + \mathrm{R}'\sin\theta) - i\frac{d\alpha}{d\sigma}\sin\theta\cos\theta.$$

44. Il convient d'observer ici le cas $\mathrm{R} = \mathrm{R}' = 0$. L'équation (79) donne alors $r = \text{const}$. Donc, c'est le cas où *tous les cercles générateurs sont orthogonaux à une sphère fixe* (¹). En prenant alors comme variable $\operatorname{tang}\theta$, on ramènera l'équation précédente à une équation de Riccati.

D'autre part, l'équation (89) des trajectoires orthogonales des cercles générateurs s'intégrera par une quadrature.

Remarquons que le système de Serret-Frenet se réduit, dans ce cas, à un système du quatrième ordre :

$$(94)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{d\sigma} = q\cos\alpha + p'\mathrm{P}, & \dfrac{dp'}{d\sigma} = q'\sin\alpha - p\mathrm{P}; \\ \dfrac{dq}{d\sigma} = -p\cos\alpha + q'\mathrm{Q}, & \dfrac{dq'}{d\sigma} = -p'\sin\alpha - q\mathrm{Q}. \end{cases}$$

C'est un système de Lie, dont le groupe associé est le groupe orthogonal à quatre variables.

(¹) On pourrait dire qu'ils admettent cette sphère comme *sphère de symétrie*.

Dans la Note citée [1], j'ai donné des formules entièrement explicites, réduisant à l'intégration de deux équations de Riccati la résolution de tels systèmes.

On peut considérer le cas où la surface cerclée est une transformée (par une transformation conforme) d'une surface réglée, ou dégénère en une surface réglée, comme un cas limite du précédent, la sphère orthogonale fixe se réduisant alors à une sphère de rayon nul. Directement, il se trouve exclu de notre analyse; car nous avons écarté les cercles sécants de nos considérations (n° **19**).

Rappelons ici que, en géométrie conforme, les plans et les droites se présentent comme des sphères et des cercles passant par le *point à l'infini*. Car, en coordonnées pentasphériques cartésiennes (n° **42**), la condition pour que la sphère a se réduise à un plan est

$$a_4 - ia_5 = 0;$$

ce qui s'interprète en disant qu'elle contient le point

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0, \qquad r_4 = \lambda, \qquad r_5 = -i\lambda.$$

C'est ce point qui est le point à l'infini et qui remplace, en géométrie conforme, le plan à l'infini de la géométrie projective.

43. Je reviens au cas général, pour chercher l'*équation différentielle* des *lignes de courbure* et *les sphères de courbure principales*. Je simplifierai les calculs, en posant

$$(96)\quad \left\{\begin{array}{l} \rho k = \bar{\rho}, \qquad R\cos\theta + R'\sin\theta + iQ = ih, \qquad h\,d\sigma + d\theta = Z, \\ \qquad\qquad k^2 P - h\sin\alpha\cos\alpha - \dfrac{d\alpha}{d\sigma}\sin\theta\cos\theta = l. \end{array}\right.$$

Nous aurons ainsi

$$(97)\quad -dm^2 = Z^2 + k^2\,d\sigma^2, \qquad -dm\,d\bar{v} = 2i\sin\alpha\cos\alpha . Z\,d\sigma + il\,d\sigma^2;$$

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 février 1909. D'autres méthodes d'intégration avaient été données antérieurement par Eiesland, Laura, Darboux.

et il s'agit d'exprimer que l'équation

$$(98) \qquad \bar{\rho}\, dm^2 + dm\, d\bar{v} = 0$$

a une racine double en $\frac{d\theta}{d\sigma}$, ou en $\frac{Z}{d\sigma}$. D'où les équations

$$(99) \qquad \rho Z + i \sin\alpha \cos\alpha\, d\sigma = 0, \qquad (\bar{\rho} k^2 + il)\, d\sigma + i \sin\alpha \cos\alpha . Z = 0.$$

On en conclut l'équation en $\bar{\rho}$,

$$(100) \qquad \bar{\rho}^2 k^2 + \bar{\rho} il + \sin^2\alpha \cos^2\alpha = 0;$$

et l'équation différentielle des lignes de courbure

$$(101) \qquad \sin\alpha \cos\alpha . k^2\, d\sigma^2 - lZ\, d\sigma - \sin\alpha \cos\alpha . Z^2 = 0.$$

On observera que la valeur

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 = -\frac{l}{2k^2} = \frac{1}{2}(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2),$$

où $\bar{\rho}_1$, $\bar{\rho}_2$ sont les racines de (100), définit la *sphère harmonique*, qui, dans le faisceau des sphères tangentes $\bar{\rho} m + \bar{v}$, est la conjuguée harmonique de la sphère-point m $(\bar{\rho} = \infty)$ par rapport aux sphères principales $(\bar{\rho} = \bar{\rho}_1, \bar{\rho} = \bar{\rho}_2)$.

Aux points de courbure, nous faisons le changement de variable

$$T = \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}.$$

La sphère tangente sera

$$\bar{\rho}[-2iTq + i(1 - T^2)q'] + (1 - T^2)p \sin\alpha + 2Tp' \cos\alpha;$$

c'est-à-dire, suivant qu'il s'agit du point $q + iq'$, ou du point $q - iq'$,

$$(102) \qquad \begin{cases} \bar{\rho}(q - iq') + (p \sin\alpha + ip' \cos\alpha) & (T = i), \\ -\bar{\rho}(q - iq') + (p \sin\alpha - ip' \cos\alpha) & (T = -i). \end{cases}$$

L'équation (100) devient l'une des deux équations

$$(103) \qquad \begin{cases} \bar{\rho}^2 \cos 2\alpha - \bar{\rho}\left(\frac{d\alpha}{d\sigma} - iP \cos 2\alpha\right) = 0 & (T = i), \\ \bar{\rho}^2 \cos 2\alpha - \bar{\rho}\left(\frac{d\alpha}{d\sigma} + iP \cos 2\alpha\right) = 0 & (T = -i). \end{cases}$$

L'une des racines est donc nulle; et nous retrouvons ces résultats connus, que la sphère principale correspondante est la *sphère fondamentale;* et que la direction principale est celle du cercle générateur ($d\sigma = 0$); ce qui a fait donner par Demartres, aux points considérés, le nom de *points de courbure* [1].

46. On peut opérer autrement pour trouver les lignes de courbure, et obtenir ainsi des formules que l'on peut considérer comme les analogues des *formules d'Olinde Rodrigues.*

Pour que le point de contact de la sphère $w = \rho m + v$ décrive une ligne de courbure, il faudra, si cette sphère a un contact du second ordre avec le lieu de son point de contact, qu'elle soit tangente à la sphère infiniment voisine de même nature. Donc, que l'on ait simultanément

$$(104) \qquad \rho\, dm^2 + dm\, dv = 0, \qquad dw^2 = [d(\rho m + v)]^2 = 0.$$

Or on a, à cause des identités $m\,dm = 0$, $mv = 0$, $v\,dm = 0$,

$$[d(\rho m + v)]^2 = [m\,d\rho + (\rho\,dm + dv)]^2 = (\rho\,dm + dv)^2.$$

Donc, $\rho\,dm + dv$ est une sphère de rayon nul; ou, si l'on veut, définit un point. La première équation (104), qui s'écrit

$$dm(\rho\,dm + dv) = 0,$$

exprime que ce point est sur la sphère dm. Or, si les sphères dm et dv se coupaient suivant un cercle, le point $\rho\,dm + dv$ serait un des foyers de ce cercle, et ne serait pas sur la sphère dm. Il faut donc conclure

---

[1] On retrouve ici bien facilement un résultat de M. Besserve (*Thèse*, p. 70), sur l'angle des sphères principales en question, qui ne sont pas les sphères fondamentales. Le cosinus est

$$-\frac{1}{\cos 2\alpha}(1 - 2\bar{\rho}_2\bar{\rho}'_2) = \cos\delta(1 - 2\bar{\rho}_2\bar{\rho}'_2),$$

en désignant par $\bar{\rho}_2$, $\bar{\rho}'_2$ les racines non nulles des équations (103); et

$$\bar{\rho}_2\bar{\rho}_2 = \left(\frac{d\alpha}{d\sigma}\right)^2 \frac{1}{\cos^2 2\alpha} + P^2 = P^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{d\delta}{d\sigma}\right)^2.$$

que les sphères dm et dv sont tangentes; et que $\rho\, dm + dv$ est leur point de contact.

Mais on a

$$m\, dm = m\, dv = mv = 0;$$

et le point m, appartenant ainsi aux deux sphères dm et dv, et à la sphère v, qui leur est orthogonale ($v\, dm = v\, dv = 0$), est aussi leur point de contact.

La condition cherchée sera donc que $\rho\, dm + dv$ et v représentent un même point, ou bien que l'on ait une identité de la forme

$$\rho\, dm + dv = \lambda m. \tag{105}$$

Pour exprimer que cette identité a lieu, on pourra exprimer que les produits scalaires des deux membres par cinq vecteurs indépendants sont égaux. Comme les produits de chacun de ces deux membres par m et par v sont déjà nuls, on pourra se borner aux produits par

$$r, \quad q\cos\theta + q'\sin\theta, \quad p\sin\theta\cos\alpha - p'\cos\theta\sin\alpha.$$

La première des équations ainsi obtenues donne λ,

$$\rho(-i\mathrm{R}\sin\theta + i\mathrm{R}'\cos\theta)\, d\sigma = \lambda; \tag{106}$$

et les deux autres sont les équations (99).

En résumé, *le fait qu'un point de la surface décrit une ligne de courbure équivaut à l'existence d'une identité de la forme*

$$dv + \rho[dm + i(\mathrm{R}\sin\theta - \mathrm{R}'\cos\theta)m\, d\sigma] = 0. \tag{107}$$

Dans le cas, déjà signalé, $\mathrm{R} = \mathrm{R}' = 0$, cette équation se réduit à

$$dv + \rho\, dm = 0.$$

Il y a alors aussi une simplification dans les équations (99) et (100), où h se réduit à l'invariant Q; de sorte que Z est une différentielle totale $d\zeta$.

47. Je passe à la recherche de la *courbure géodésique* d'une courbe Γ tracée sur la surface Σ. Elle équivaut à la détermination de la sphère normale à la surface, qui a, avec la courbe considérée Γ, un contact du second ordre.

Parmi les sphères normales à la surface au point m, figure le faisceau des sphères δm, où δ désigne la différentiation relative à une courbe tracée arbitrairement sur la surface, à partir de m. Continuons à désigner par d la différentiation relative à la courbe Γ, que nous étudions. La condition $\delta m\, dm = 0$ définira la direction δ, perpendiculaire à la direction d; et la sphère δm correspondante sera l'une des sphères tangentes à la courbe Γ donnée, et normales à la surface. Le faisceau de toutes ces sphères (tangentes à Γ, et normales à Σ) est

$$(108) \qquad n = \nu m + \varpi, \qquad \varpi = \frac{\delta m}{\sqrt{\delta m^2}}, \qquad dm\,\delta m = 0.$$

Tout revient à calculer ν par la condition $n\,d^2 m = 0$ qui, à cause de $n\,dm = 0$, se réduit à $dn\,dm = 0$. On obtient ainsi, en tenant compte de $m\,dm = 0$, qui élimine $d\nu$,

$$(109) \qquad \nu\,dm^2 + d\varpi\,dm = 0;$$

et tout revient à calculer, explicitement, le produit scalaire $d\varpi\,dm$, qui se réduit, à cause de $dm\,\delta m = 0$, à

$$(110) \qquad d\varpi\,dm = \frac{dm\,d\,\delta m}{\sqrt{\delta m^2}} = -\frac{d^2 m\,\delta m}{\sqrt{\delta m^2}}.$$

Je poserai, pour abréger,

$$dm^2 = M(\sigma, \theta; d\sigma, d\theta),$$

$$dm\frac{\partial m}{\partial \sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial (d\sigma)} = M_1, \qquad dm\frac{\partial m}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial (d\theta)} = M_2.$$

On pourra prendre, pour satisfaire à $dm\,\delta m = 0$,

$$(113) \qquad \delta\sigma = M_2, \qquad \delta\theta = -M_1.$$

On aura ainsi, M étant une forme quadratique en $d\sigma$, $d\theta$,

$$\delta m^2 = M(\sigma, \theta; M_2, -M_1) = \Delta . M(\sigma, \theta; d\sigma, d\theta),$$

Δ étant le discriminant de la forme, c'est-à-dire ici k^2. Donc

$$(114) \qquad \delta m^2 = k^2\,dm^2.$$

Nous avons ensuite

$$d^2 m\frac{\partial m}{\partial \sigma} = d\left(dm\frac{\partial m}{\partial \sigma}\right) - dm\,d\frac{\partial m}{\partial \sigma} = dM_1 - dm\frac{\partial (dm)}{\partial \sigma} = dM_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial (dm^2)}{\partial \sigma};$$

c'est-à-dire

$$d^2 m^2 \frac{\partial m}{\partial \sigma} = d\mathrm{M}_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \sigma}; \qquad d^2 m^2 \frac{\partial m}{\partial \theta} = \partial \mathrm{M}_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \theta};$$

et, par suite,

$$d^2 m\, \delta m = \mathrm{M}_2\left(d\mathrm{M}_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \sigma}\right) - \mathrm{M}_1\left(d\mathrm{M}_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \theta}\right);$$

c'est-à-dire

$$(115) \qquad 4\, d^2 m\, \delta m = \frac{\partial(dm^2)}{\partial(d\theta)}\left[d\frac{\partial(dm^2)}{\partial(d\sigma)} - \frac{\partial(dm^2)}{\partial\sigma}\right] - \frac{\partial(dm^2}{\partial(d\sigma)}\left[d\frac{\partial(dm^2)}{\partial(d\theta)} - \frac{\partial(dm^2)}{\partial\theta}\right].$$

On voit donc que l'élément dm^2 intervient seul dans le calcul; ce qui est conforme à la nature de la courbure géodésique.

En effectuant, il vient, si l'on pose

$$-\mathrm{M} = \mathrm{E}\, d\sigma^2 + 2\mathrm{F}\, d\sigma\, d\theta + \mathrm{G}\, d\theta^2,$$

$$(116) \qquad -d^2 m\, \delta m = (\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2)(d\sigma\, d^2\theta - d\theta\, d^2\sigma) - \begin{vmatrix} \mathrm{E}\, d\sigma + \mathrm{F}\, d\theta & \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \sigma} d\sigma^2 + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \theta} d\sigma\, d\theta + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \sigma}\right) d\theta^2 \\ \mathrm{F}\, d\sigma + \mathrm{G}\, d\theta & \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \theta}\right) d\sigma^2 - \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \sigma}\partial\sigma\, d\theta + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \theta} d\theta^2 \end{vmatrix}.$$

On a

$$\mathrm{E} = h^2 + k^2, \qquad \mathrm{F} = h, \qquad \mathrm{G} = 1, \qquad \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = k^2;$$

et la formule (116) s'écrit

$$(117) \qquad -d^2 m\, \delta m = k^2(d\sigma\, d^2\theta - d\theta\, d^2\sigma) - k^2\left(\frac{\partial h}{\partial \sigma} - h\frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial k^2}{\partial \theta}\right) d\sigma^3 + \frac{1}{2}\mathrm{Z}\, dk^2\, d\sigma + \frac{1}{2}\mathrm{Z}^2\frac{\partial k^2}{\partial \theta} d\sigma + \frac{\partial h}{\partial \theta}\mathrm{Z}^3.$$

Rappelons les notations précédemment introduites

$$h = \mathrm{Q} - i(\mathrm{R}\cos\theta + \mathrm{R}'\sin\theta), \qquad k^2 = \cos^2\theta\sin^2\alpha + \sin^2\theta\cos^2\alpha,$$
$$\mathrm{Z} = h\, d\sigma + d\theta;$$

d'où résultent les formules auxiliaires

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = i(\mathrm{R}\sin\theta - \mathrm{R}'\cos\theta), \qquad h\frac{\partial h}{\partial \theta} = \mathrm{Q}\frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{1}{2}(\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2)\sin 2\theta - \mathrm{RR}'\cos 2\theta,$$
$$\frac{\partial k^2}{\partial \sigma} = \sin 2\alpha\cos 2\theta\frac{d\alpha}{d\sigma}, \qquad \frac{\partial k^2}{\partial \theta} = \sin 2\theta\cos 2\alpha.$$

On remarquera que le second membre de (116) est l'expression qui intervient dans le calcul de la courbure géodésique, en géométrie euclidienne, pour une surface dont le ds^2 serait (les coordonnées curvilignes étant désignées par σ et θ)

$$E\,d\sigma^2 + 2F\,d\sigma\,d\theta + G\,d\theta^2.$$

Nous pouvons donc conclure que *les géodésiques du dm^2, sur notre surface cerclée, sont les courbes qui sont coupées en trois points confondus par les sphères δm qui leur sont tangentes.* Ces sphères δm jouent ici le rôle que jouent, en géométrie euclidienne, les plans normaux à la surface.

48. Le *cercle osculateur* à la courbe Γ de la surface est l'intersection des deux sphères, de courbure normale et de courbure géodésique,

$$(118) \qquad w = \rho m + v, \qquad n = \nu m + \varpi,$$

que nous avons déterminées. Ces deux sphères sont orthogonales. Il resterait à trouver la *sphère osculatrice* à Γ. Nous nous bornerons à indiquer la méthode, sans développer les calculs. Cette sphère sera de la forme

$$(119) \qquad x = w\cos\xi + n\sin\xi,$$

ξ étant l'angle qu'elle fait avec la sphère de courbure normale w; et tout revient à déterminer cet angle. Il suffit d'écrire, pour cela, les relations

$$x\,m = 0, \qquad x\,dm = 0, \qquad x\,d^2m = 0$$

étant vérifiées quel que soit ξ, que l'on a, en outre,

$$x\,d^3m = 0 \qquad \text{ou} \qquad dx\,d^2m = 0.$$

Cela donne la formule

$$(120) \qquad \cos\xi\,.\,dw\,d^2m + \sin\xi\,.\,dn\,d^2m = 0,$$

sur laquelle on peut faire les remarques suivantes. On a

$$\begin{aligned} dw\,d^2m &= d\rho\,.\,m\,d^2m + \rho\,dm\,d^2m + dv\,d^2m \\ &= -d\rho\,dm^2 + \rho\frac{1}{2}d(dm^2) + dv\,d^2m, \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de la valeur $\rho = -\frac{dm\,dv}{dm^2}$,

$$dw\,d^2m = -d\rho\,dm^2 + dv\left[d^2m - \frac{1}{2}dm\frac{d(dm^2)}{dm^2}\right],$$
$$= -d\rho\,dm^2 + \sqrt{dm^2}\,d\left(\frac{dm}{\sqrt{dm^2}}\right)dv.$$

La formule (120) devient ainsi

$$(121)\quad \left[d\rho - d\left(\frac{dm}{\sqrt{dm^2}}\right)\frac{dv}{\sqrt{dm^2}}\right]\cos\xi + \left[dv - d\left(\frac{dm}{\sqrt{dm^2}}\right)\frac{d\varpi}{\sqrt{dm^2}}\right]\sin\xi = 0.$$

Elle contient les différentielles du troisième ordre par le terme dv seulement.

Les courbes dont la sphère osculatrice est tangente à la surface, ($\sin\xi = 0$), satisfont donc à l'équation invariante, du second ordre,

$$(122)\qquad d\rho = d\left(\frac{dm}{\sqrt{dm^2}}\right)\frac{dv}{\sqrt{dm^2}},\qquad \rho = -\frac{dm}{\sqrt{dm^2}}\frac{dv}{\sqrt{dm^2}}.$$

On peut, du reste, rattacher la question à la théorie euclidienne des surfaces. Si l'on introduit la courbure normale, la courbure géodésique, et la torsion géodésique

$$N = \frac{\cos\theta}{R},\qquad G = \frac{\sin\theta}{R},\qquad \Theta = \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds},$$

en désignant, suivant l'usage, par θ l'angle de la normale principale à la courbe avec la normale à la surface, par R le rayon de courbure, et T le rayon de torsion, on a, s étant l'arc de la courbe,

$$\operatorname{tang}(\theta - \xi) = -\frac{T}{R}\frac{dR}{ds};$$

et l'on en conclut l'équation, équivalente à (121),

$$(123)\qquad \left(\frac{dN}{ds} - \Theta G\right)\cos\xi + \left(\frac{dG}{ds} - \Theta N\right)\sin\xi = 0,$$

ce qui indique que le quotient

$$(124)\qquad \delta = \left(\frac{dG}{ds} - \Theta N\right) : \left(\frac{dN}{ds} - \Theta G\right)$$

est un invariant des surfaces pour le groupe conforme, relatif à une courbe tracée sur cette surface. L'équation invariante (122) est

$$\frac{dN}{ds} - \Theta G = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{T}\tang\theta + \frac{1}{R}\frac{dR}{ds} = 0,$$

ce qui est bien une équation du second ordre, tandis que l'invariant (124) est du troisième ordre.

49. L'expression différentielle $\Theta\, ds$ se présente d'elle-même, avec un caractère invariant, quand on étudie le *déplacement infinitésimal (conforme) du système des deux sphères de courbure, normale et géodésique*, que nous avons désignées par w et n. *Pour une surface quelconque, les variations angulaires infinitésimales de ces deux sphères, $\sqrt{dw^2}$, $\overline{dn^2}$, et la rotation infinitésimale de leur couple, $n\,dw$, sont trois quantités égales à $\Theta\, ds$.*

Soient, en effet, (x, y, z) un point courant d'une surface Σ; s l'arc d'une courbe qu'il décrit sur Σ; (α, β, γ) les cosinus directeurs de la tangente à la courbe; $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ceux de la direction perpendiculaire à cette tangente dans le plan tangent à la surface; (λ, μ, ν) ceux de la normale à la surface. Les coordonnées des sphères w et n sont, en posant $R_n = \frac{R}{\cos\theta}$, $R_g = \frac{R}{\sin\theta}$,

$$w_1 = -\left(\frac{x}{R_n} + \lambda\right), \quad w_2 = -\left(\frac{y}{R_n} + \mu\right), \quad w_3 = -\left(\frac{z}{R_n} + \nu\right), \quad w_4 = \frac{1 - W}{2R_n}, \quad w_5 = i\frac{1 + W}{2R_n},$$

$$n_1 = -\left(\frac{x}{R_g} + \alpha_1\right), \quad n_2 = -\left(\frac{y}{R_g} + \beta_1\right), \quad n_3 = -\left(\frac{z}{R_g} + \gamma_1\right), \quad n_4 = \frac{1 - N}{2R_g}, \quad n_5 = i\frac{1 + N}{2R_g},$$

avec

$$W = x^2 + y^2 + z^2 + 2R_n(\lambda x + \mu y + \nu z),$$
$$N = x^2 + y^2 + z^2 + 2R_g(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z).$$

En utilisant les formules [1] connues, du type

$$d\lambda = \alpha_1 \Theta\, ds - \alpha\frac{ds}{R_n}, \qquad d\alpha_1 = -\lambda\Theta\, ds - \alpha\frac{ds}{R_g},$$

---

[1] *Voir*, par exemple, pour les notations et les formules employées ici, nos *Leçons de Géométrie supérieure*, p. 28, 29.

on obtient les équations

$$dw^2 = \Theta^2\, ds^2, \qquad dn^2 = \Theta^2\, ds^2, \qquad n\, dw = \Theta\, ds,$$

qui s'expriment dans le théorème énoncé ci-dessus.

Il nous reste, dans le cas de la surface cerclée, à indiquer le calcul de $n\,dw$, qui, à cause de sa signification $\Theta\, ds$, doit donner, à un facteur près, le premier membre de l'équation (101) des lignes de courbure.

On a, avec les notations utilisées dans les calculs précédents,

$$n\, dw = (\nu m + \varpi)\, d(\rho m + v) = \varpi\, dv = \frac{1}{k^2\sqrt{dm^2}}\, \delta m\, d\bar{v}.$$

Car

$$m^2 = m\, dm = m\, dv = m\varpi = \varpi\, dm = v\, \delta m = 0.$$

Or

$$d\bar{v} = \cos\theta \sin\alpha\, dp + \sin\theta \cos\alpha\, dp' + p\, d(\cos\theta \sin\alpha) + p'\, d(\sin\theta \cos\alpha),$$
$$\delta m = \delta r - i \sin\theta\, \delta p + i \cos\theta\, \delta p' - i v_0\, \delta\theta,$$

d'où, en se servant des formules de Serret-Frenet,

$$\delta m\, d\bar{v} = i[-Z \sin\alpha \cos\alpha - P k^2\, d\sigma + \sin\theta \cos\theta\, d\alpha]\, \delta\sigma - i \sin\alpha \cos\alpha\, d\sigma\, \delta\theta.$$

Il ne reste plus qu'à introduire les valeurs

$$\delta\sigma = -Z, \qquad \delta\theta = hZ + k^2\, d\sigma$$

pour obtenir l'expression

$$\delta m\, d\bar{v} = i[\sin\alpha \cos\alpha\,.\, Z^2 + lZ\, d\sigma - \sin\alpha \cos\alpha\,.\, k^2\, d\sigma^2],$$

qui, multipliée par $\frac{1}{k^2\sqrt{dm^2}}$, donne la formule cherchée

$$n\, dw = \Theta\, ds = \frac{\sin\alpha \cos\alpha\,.\, Z^2 + lZ\, d\sigma - \sin\alpha \cos\alpha\,.\, k^2\, d\sigma^2}{k^2\sqrt{Z^2 + k^2\, d\sigma^2}},$$

où k^2, Z, l sont définis par les formules (85) et (96); et dont le numérateur est bien, au signe près, le premier membre de l'équation (101).

Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl;

PAR E. CARTAN.

1. M. H. Weyl, dans la dernière édition de son beau livre : *Raum, Zeit, Materie* (1), a développé une théorie de l'espace dans laquelle il prétend donner la raison profonde pour laquelle les propriétés métriques de l'Univers sont fournies par une forme différentielle quadratique. Cette *nécessité* d'une métrique fondée sur une forme quadratique résulte pour lui d'un théorème emprunté à la théorie des groupes : le but de cet article est de démontrer ce théorème (2). Il importe, avant de donner cette démonstration, d'indiquer le point de vue de M. H. Weyl, afin de bien montrer la portée du théorème en question.

Transport par parallélisme.

2. Étant donnée une variété numérique, ou espace, à n dimensions, M. H. Weyl définit d'abord un *transport par parallélisme* dans cet espace. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées, choisies du reste d'une manière absolument arbitraire, d'un point quelconque P de l'espace. Tout système de différentielles $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ définit un *vecteur* issu

(1) Traduit en français sous le titre : *Temps, espace, matière*, par G. Juvet et R. Leroy; Paris, Blanchard, 1922.

(2) J'ai donné une esquisse de cette démonstration dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 10 juillet 1922). M. H. Weyl en avait indiqué une (*Math. Zeitschr.*, t. XII, 1922, p. 114-146), fondée sur des considérations tout à fait différentes et qui, dit l'auteur, lui donne l'impression de danser constamment sur la corde.

de P, dont les n différentielles données peuvent être dites les *composantes*.

Prenons maintenant un point P′ *infiniment voisin* de P, de coordonnées $(x_i + dx_i)$. On peut convenir de dire que transporter parallèlement à lui-même de P en P′ le vecteur de composantes $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$, c'est considérer le vecteur d'origine P′ qui a les *mêmes* composantes $(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$. Mais une telle opération *ne reste pas invariante* si l'on fait un changement de variables arbitraire. Si en effet on pose

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

les deux vecteurs d'origine P et P′ qui ont, *avec le nouveau système de coordonnées*, les mêmes composantes $\delta \overline{x_i}$, ont, *avec l'ancien système*, des composantes différentes

$$(1) \qquad \delta x_i = \sum \frac{\partial f_i}{\partial \overline{x_k}} \delta \overline{x_k},$$

$$(2) \qquad \delta' x_i = \sum \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_h \partial \overline{x_k}} d\overline{x_h} \right) \delta \overline{x_k}.$$

Nous sommes donc conduits à admettre une infinité de transports par parallélisme possibles [un quelconque d'entre eux est défini par l'opération qui fait passer du vecteur d'origine P ayant les composantes (1), au vecteur d'origine P′ ayant les composantes (2)]. On voit immédiatement que cette opération se traduit analytiquement par des formules de la forme

$$(3) \qquad \delta' x_i = \delta x_i + \sum_{hk} \Gamma_{ihk} \, dx_h \, \delta x_k,$$

les coefficients Γ_{ihk} étant *symétriques* par rapport aux deux derniers indices h et k. Réciproquement, étant donnés un point P et un système symétrique quelconque de constantes Γ_{ihk}, les formules (3), qui font correspondre à tout vecteur de composantes δx_i d'origine P, un vecteur de composantes $\delta' x_i$ d'origine infiniment voisine P′, définissent un transport par parallélisme : il suffit, pour s'en convaincre, de faire un changement de variables tel qu'on ait, *au point* P,

$$x_i = \overline{x_i}, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial \overline{x_i}} = 1, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial \overline{x_j}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f_i}{\partial \overline{x_h} \partial \overline{x_k}} = \Gamma_{ihk}.$$

Si l'on se donne un système *symétrique* de coefficients Γ_{ihk} fonctions arbitraires de $x_1, \ldots, x_n$, les formules (3) définissent une *connexion affixe* pour l'espace. Cela ne veut pas dire que, par un changement convenable de coordonnées, les équations (3) puissent être ramenées identiquement à

$$\delta' \overline{x_i} = \delta \overline{x_i},$$

mais cela veut dire qu'elles peuvent l'être au voisinage de tout point P, au moyen d'un changement de coordonnées *valable pour ce point*.

5. On peut exprimer d'une autre manière la condition pour que les formules (3) définissent un transport par parallélisme. Ces formules peuvent en effet s'écrire symboliquement

$$d(\delta x_i) = \sum_{hk} \Gamma_{ihk}\, dx_h\, \delta x_k,$$

et définissent ainsi ce qu'il faut entendre par l'opération d appliquée aux symboles δx_i. La condition de symétrie des coefficients Γ_{ihk} exprime alors tout simplement que l'on a

$$d(\delta x_i) = \delta(dx_i),$$

autrement dit, que *les opérations d et δ sont interchangeables entre elles*.

Cette remarque va nous permettre de présenter sous une forme analytique beaucoup plus générale la notion de transport par parallélisme. Nous pouvons, en effet, définir un vecteur d'origine P, non pas par ses n composantes $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$, mais par n combinaisons linéaires arbitraires

$$\begin{aligned} \omega_1(\delta) &= a_{11}\,\delta x_1 + a_{12}\,\delta x_2 + \ldots + a_{1n}\,\delta x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_n(\delta) &= a_{n1}\,\delta x_1 + a_{n2}\,\delta x_2 + \ldots + a_{nn}\,\delta x_n, \end{aligned}$$

de $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$. On peut faire cela pour tous les points de l'espace, en prenant pour les coefficients a_{ij} des fonctions déterminées de $x_1, \ldots, x_n$. Cela posé, tout transport par parallélisme pourra se

définir par des formules telles que

$$(4) \qquad d\omega_i(\delta) = \sum_{h,k} \Gamma_{ihk}\, \omega_h(d)\, \omega_k(\delta).$$

Pour savoir à quelles conditions doivent satisfaire les nouveaux coefficients Γ_{ihk}, nous n'avons qu'à former $\delta\omega_i(d)$ et soustraire, ce qui donne

$$d\omega_i(\delta) - \delta\omega_i(d) = \sum_{h,k} \Gamma_{ihk}[\omega_h(d)\,\omega_k(\delta) - \omega_h(\delta)\,\omega_k(d)];$$

mais les opérations d et δ étant *échangeables entre elles*, le premier membre est le *covariant bilinéaire* de la forme ω_i. On a donc, symboliquement, l'identité

$$(5) \qquad \omega_i' = \sum \Gamma_{ihk}[\omega_h \omega_k];$$

les coefficients Γ_{ihk} *doivent être choisis de manière à satisfaire à cette identité.*

On retrouve la condition primitive si l'on prend $\omega_i = dx_i$, car alors le premier membre ω_i' est nul, et la condition nécessaire et suffisante pour que le second membre soit nul est

$$\Gamma_{ihk} - \Gamma_{ikh} = 0.$$

4. Posons

$$\omega_{ik} = \sum_h \Gamma_{ihk}\, \omega_h;$$

les équations (4) qui définissent le transport par parallélisme prennent la forme

$$(6) \qquad d\omega_i(\delta) = \sum_k \omega_{ik}(d)\, \omega_k(\delta);$$

les n^2 *formes de Pfaff* ω_{ik} *sont alors assujetties à satisfaire aux* n *identités* [1]

$$(7) \qquad \omega_i' = \sum_k |\omega_{ik}\, \omega_k|.$$

---

[1] Dans un Mémoire qui paraîtra prochainement dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, je développe une théorie des variétés à connexion affine.

Le groupe des rotations et la connexion métrique.

5. M. H. Weyl admet qu'en chaque point P de l'espace on puisse définir la *congruence* de deux vecteurs ou de deux systèmes de vecteurs d'origine P. Pour que cette notion satisfasse à l'axiome que deux systèmes de vecteurs congruents à un troisième sont congruents entre eux, il est nécessaire qu'elle soit définie au moyen d'un *groupe* G de substitutions linéaires par rapport aux composantes des vecteurs. Ce groupe définit la *métrique* au point P. M. H. Weyl ajoute la condition que ce groupe conserve les volumes : il lui donne le nom de *groupe des rotations* au point P.

De la métrique en un point, il passe à la *connexion métrique* : étant donnés deux points infiniment voisins quelconques P et P′, il suppose l'existence, entre les vecteurs issus de P et les vecteurs issus de P′, d'une correspondance telle que les derniers puissent être dits *congruents* aux premiers. Cela exige que le groupe des rotations en P′ soit *semblable* au groupe des rotations en P (c'est-à-dire n'en diffère que par un changement linéaire effectué sur les variables); la correspondance par congruence entre les deux points P et P′ est alors possible d'une infinité de manières : elle dépend d'autant de paramètres qu'il y en a dans le groupe G; elle définit la *connexion métrique* de l'espace.

6. Voici maintenant quels sont les deux axiomes que M. H. Weyl met à la base de sa théorie des espaces à connexion métrique et qui lui permettent *a priori* de déterminer la nature du groupe G des rotations.

Le premier axiome est le suivant :

I. *La nature de l'espace est compatible avec toute connexion métrique possible.* Voici ce que l'auteur entend par là.

Tous les groupes des rotations attachés aux différents points de

---

en admettant, pour définir le transport par parallélisme, des expressions ω_{ik} *absolument arbitraires.* La condition (7) caractérise ce que j'appelle les variétés *sans torsion.*

l'espace étant semblables entre eux, on peut en chaque point P définir les vecteurs partant de ce point au moyen de coordonnées

$$\omega_i(\delta) = a_{i1}\,\delta x_1 + a_{i2}\,\delta x_2 + \ldots + a_{in}\,\delta x_n,$$

telles que les substitutions linéaires sur les $\omega_i(\delta)$ qui définissent analytiquement le groupe G aient des coefficients *indépendants* du point P. Nous supposerons le groupe G engendré au moyen de r transformations infinitésimales indépendantes

$$(8) \qquad X_s f = \sum a_{iks}\, u_k \frac{\partial f}{\partial u_i},$$

où nous avons désigné les variables par u_i au lieu de $\omega_i(\delta)$. Les coefficients a_{iks} sont donc des *constantes* absolues données une fois pour toutes. La condition que le groupe G conserve les volumes se traduit par les relations

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{iis} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, r).$$

Cela posé, la signification du premier axiome de M. H. Weyl est la suivante. Choisissons arbitrairement en chaque point P de l'espace l'*orientation* du groupe G des rotations, c'est-à-dire les coefficients a_{ij} des formes $\omega_i(\delta)$ qui donnent les variables pour lesquelles le groupe des rotations en P a la forme analytique (8). Un tel choix étant fait, la connexion métrique de l'espace est déterminée : l'une des correspondances par congruence entre vecteurs issus de P et vecteurs issus de P′ est celle pour laquelle les deux vecteurs correspondants ont *mêmes* composantes $\omega_i(\delta)$. La correspondance *infiniment voisine* la plus générale fera correspondre au vecteur de composantes $\omega_i(\delta)$ issu de P le vecteur de composantes

$$\omega_i(\delta) + \sum_{k,s} \varepsilon_s a_{iks}\, \omega_k(\delta)$$

issu de P′, en désignant par $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ des constantes très petites.

L'énoncé de M. H. Weyl signifie que *parmi les correspondances par congruence précédentes il y en a au moins une qui définit un transport par parallélisme*, et cela quel que soit le choix des formes $\omega_i(\delta)$.

Cela revient à dire que l'on peut prendre pour les ε_s des formes différentielles linéaires $\varpi_s(d)$ telles que les formules

$$d\omega_i(\delta) = \sum_{k.s} a_{iks}\, \varpi_s(d)\, \omega_k(\delta)$$

définissent un transport par parallélisme. Les composantes ω_{ik} de ce transport sont ici

$$\omega_{ik}(d) = \sum_s a_{iks}\, \varpi_s(d).$$

Par suite, l'axiome I de M. H. Weyl peut s'énoncer de la manière suivante :

De quelque manière que l'on choisisse les n formes de Pfaff $\omega_1, \ldots, \omega_n$, *il est possible, au moins d'une manière, de trouver r formes de Pfaff* $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_r$ *de manière à satisfaire aux identités*

$$\omega'_i = \sum_{k.s} a_{iks}[\varpi_s \omega_k].$$

Le second axiome de M. H. Weyl.

7. Le second axiome de M. H. Weyl affirme que la connexion métrique étant choisie d'une manière arbitraire, *il n'y a qu'une correspondance par congruence entre les vecteurs issus de deux points infiniment voisins qui soit un transport par parallélisme.*

Le théorème de H. Weyl.

8. Le théorème qui, en partant des axiomes précédents, prouve la nécessité de la métrique pythagoricienne est alors le suivant :

Il n'y a que le groupe linéaire d'une forme quadratique non dégénérée qui satisfasse aux axiomes I et II.

Autrement dit, *si un groupe linéaire* G *conservant les volumes, défini par les r transformations infinitésimales* (8), *est tel qu'il soit possible, d'une manière et d'une seule, de trouver r formes*

linéaires $\varpi_1, \ldots, \varpi_r$ *de* $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *rendant les n formes alternées*

$$\sum_{k,s} a_{iks}[\varpi_s \omega_k] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

égales à n formes arbitrairement données, ce groupe est le groupe qui conserve une forme quadratique non dégénérée.

Nous allons démontrer un théorème plus général, où nous ne prendrons en considération que l'axiome I, et dont voici l'énoncé :

Si un groupe linéaire G *conservant les volumes, défini par les r transformations infinitésimales* (8), *est tel qu'il soit possible d'au moins une manière de trouver r formes linéaires* $\varpi_1, \ldots, \varpi_r$ *de* $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *rendant les n formes alternées*

$$\sum_{k,s} [a_{iks} \varpi_s \omega_k] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

égales à n formes arbitrairement données, ce groupe est :

Soit le groupe linéaire général à $n^2 - 1$ *paramètres;*

Soit le groupe le plus général, à $n(n-1)$ *paramètres, laissant invariant un point* (¹);

Soit (n pair) le groupe le plus général, à $\frac{n(n+1)}{2}$ *paramètres, laissant invariant un complexe linéaire non dégénéré;*

Soit le groupe le plus général, à $\frac{n(n-1)}{2}$ *paramètres, laissant invariante une quadrique non dégénérée* (²).

Nous conviendrons, dans ce qui suit, d'appeler groupe W tout groupe conservant les volumes et satisfaisant aux conditions de l'axiome I. Le théorème précédent donne donc les quatre classes de groupes W possibles.

(¹) J'emploie ici un langage géométrique, en convenant de regarder les variables $u_1, \ldots, u_n$ comme les coordonnées homogènes d'un point dans un espace à $n - 1$ dimensions.

(²) Ce théorème n'est naturellement pas énoncé par M. H. Weyl, qui base plutôt ses considérations sur les limitations introduites par l'axiome II.

Limitation de l'ordre des groupes W à n variables.

9. On a immédiatement une limite inférieure du nombre r des paramètres d'un groupe W à n variables. En effet, les coefficients des r formes ϖ_s sont en nombre rn; d'autre part, une forme quadratique extérieure à n variables contient $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients. Les rn coefficients des formes ϖ_s doivent donc satisfaire à

$$n\frac{n(n-1)}{2}$$

équations linéaires; pour que cela soit toujours possible, il faut

$$rn \geqq n\frac{n(n-1)}{2},$$

c'est-à-dire

$$r \geqq \frac{n(n-1)}{2}.$$

On a ainsi une limite inférieure de l'ordre du groupe W ([1]).

Les groupes W qui laissent invariante une multiplicité plane.

10. Procédons d'abord à la recherche des groupes W qui laissent invariante une multiplicité plane : nous allons montrer que cette multiplicité plane se réduit nécessairement à un point.

Supposons en effet, ce qui ne restreint pas la généralité, que le groupe G laisse invariante la multiplicité plane

$$u_{q+1} = u_{q+2} = \ldots = u_n = 0 \qquad (q \geqq 2).$$

Cela veut dire qu'on a les relations

$$a_{q+1,k,s} = a_{q+2,k,s} = \ldots = a_{nks} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q;\ s = 1, 2, \ldots, r).$$

([1]) Cette inégalité est due à M. H. Weyl.

Considérons alors, par exemple, la forme

$$\sum_{k,s} a_{q+1,k,s}[\varpi_s \omega_k] = \sum_{k=q+1}^{k=n} \sum_{s=1}^{s=r} a_{q+1,k,s}[\varpi_s \omega_k];$$

de quelque manière que l'on choisisse les expressions ϖ_s, on n'aura jamais dans cette forme de terme en $[\omega_1 \omega_2]$; par suite, elle ne pourra pas toujours être identifiée à une forme arbitrairement donnée.

Supposons maintenant que le groupe G laisse invariant le point

$$u_2 = u_3 = \ldots = u_n = 0,$$

et considérons les $n - 1$ formes

$$\sum_{k=2}^{k=n} \sum_{s=1}^{s=r} a_{2ks}[\varpi_s \omega_k], \ \ldots \qquad \sum_{k=2}^{k=n} \sum_{s=1}^{s=r} a_{nks}[\varpi_s \omega_k].$$

On doit pouvoir choisir $\varpi_1, \ldots, \varpi_s$ de manière que, dans ces $n - 1$ formes, les coefficients de

$$[\omega_1 \omega_2], [\omega_1 \omega_3], \ldots [\omega_1 \omega_n]$$

aient des valeurs arbitrairement données. Il en résulte que les $(n-1)^2$ expressions

$$a_{ij1}\varpi_1 + a_{ij2}\varpi_2 + \ldots + a_{ijr}\varpi_r \qquad (i, j = 2, 3, \ldots, n)$$

sont linéairement indépendantes. On a donc déjà

$$r \geqq (n-1)^2.$$

On peut dire en outre qu'il existe, dans le groupe G, $(n-1)^2$ transformations infinitésimales de la forme

$$X_{ij} f = u_j \frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{k=n} a_{1k(ij)} u_k \frac{\partial f}{\partial u_1} \qquad (i, j = 2, \ldots, n).$$

Comme du reste le groupe G conserve les volumes, on doit avoir

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{kks} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, r).$$

On peut donc poser, en distinguant le cas où $i = j$ et celui où $i \neq j$,

$$X_{ii} f = u_i \frac{\partial f}{\partial u_i} - u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \sum_{k=2}^{k=n} b_{k(ii)} u_k \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

$$X_{ij} f = u_j \frac{\partial f}{\partial u_i} \qquad + \sum_{k=2}^{k=n} b_{k(ij)} u_k \frac{\partial f}{\partial u_1}.$$

11. Cela posé, si r est supérieur à $(n-1)^2$, il existe au moins une autre transformation infinitésimale, nécessairement de la forme

$$(c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n) \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

et qu'on peut, sans restreindre la généralité, supposer ramenée à

$$u_2 \frac{\partial f}{\partial u_1}.$$

En la combinant avec les transformations précédentes on en déduit l'existence des transformations

$$u_3 \frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, u_n \frac{\partial f}{\partial u_1}.$$

On obtient alors *le groupe le plus général qui laisse invariant le point* $u_2 = \ldots = u_n = 0$; *il est à* $n(n-1)$ *paramètres.*

12. Reste le cas où $r = (n-1)^2$. Nous allons voir que ce cas ne peut se présenter. En effet, la transformation infinitésimale

$$\begin{aligned} & X_{22} f + X_{33} f + \ldots + X_{nn} f \\ & = -(n-1) u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \ldots + u_n \frac{\partial f}{\partial u_n} + \sum_{k=2}^{k=n} \beta_k u_k \frac{\partial f}{\partial u_1} \\ & = \left(u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \ldots + u_n \frac{\partial f}{\partial u_n} \right) - \left(n u_1 + \sum \beta_k u_k \right) \frac{\partial f}{\partial u_1} \end{aligned}$$

peut toujours, par un changement permis de variables, être ramenée à avoir tous ses coefficients β_k nuls : il suffit, sans changer les variables

$u_2, \ldots, u_n$, de prendre

$$u_1 + \frac{1}{n} \sum \beta_k u_k$$

pour nouvelle variable u_1 (¹).

En combinant alors cette transformation infinitésimale

$$X_{22} f + \ldots + X_{nn} f = \left(u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \ldots + u_n \frac{\partial f}{\partial u_n} \right) - n u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1}$$

avec $X_{ii} f$ et $X_{ij} f$ et exprimant que les crochets obtenus représentent encore des transformations du groupe, on constate que *tous les coefficients* $b_{k(ii)}$, $b_{k(ij)}$ *sont nuls*. Mais alors le groupe G laisse manifestement invariante la multiplicité plane $u_1 = 0$, ce qui est impossible.

13. Il y a cependant un cas d'exception, c'est celui où $n = 2$, car alors la multiplicité plane $u_1 = 0$ est un point; on a dans ce cas un groupe G à un paramètre engendré par la transformation infinitésimale

$$Xf = u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} - u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2};$$

les deux formes

$$[\varpi \omega_1], \quad -[\varpi \omega_2]$$

peuvent effectivement être identifiées à deux formes arbitrairement données

$$\alpha[\omega_1 \omega_2], \quad \beta[\omega_1 \omega_2]$$

en prenant

$$\varpi = -\alpha \omega_2 - \beta \omega_1.$$

Le groupe G ainsi obtenu est celui qui laisse invariante la forme quadratique binaire $u_1 u_2$.

14. En résumé, *tout groupe* W *qui laisse invariante une multiplicité plane est :*

Soit (n *quelconque*) *le groupe le plus général d'ordre* $n(n-1)$ *qui laisse invariant un point;*

(¹) La transformation infinitésimale $\sum u_i \frac{\partial f}{\partial u_i}$ est en effet invariante par n'importe quel changement linéaire de variables.

Soit $(n=2)$ *le groupe d'ordre* 1 *d'une forme quadratique binaire.*

Rappel des propriétés des groupes linéaires qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane.

15. J'ai démontré (¹) que tout groupe linéaire conservant les volumes et ne laissant invariante aucune multiplicité plane est simple ou semi-simple. Tous ces groupes peuvent être déterminés par des procédés réguliers (²) en partant de groupes particuliers dits *fondamentaux* et en les *multipliant* entre eux d'une certaine manière. Dans ce qui suit, nous n'aurons pas à nous servir directement de la propriété des groupes W exprimée par l'axiome I; nous allons simplement déterminer ces groupes par la condition qu'ils ne laissent invariante aucune multiplicité plane et que leur ordre r est au moins égal à $\frac{n(n-1)}{2}$, en désignant par n le nombre des variables.

Les groupes W semi-simples.

16. Examinons d'abord le cas où le groupe W est semi-simple, c'est-à-dire se décompose en un certain nombre h de sous-groupes invariants simples $g_1, g_2, \ldots, g_h$, n'ayant entre eux aucune transformation infinitésimale commune. Pour obtenir un groupe linéaire de cette structure ne laissant invariante aucune multiplicité plane, on part de h groupes linéaires simples dont chacun ne laisse invariante aucune multiplicité plane; soient

$$\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

les variables respectives transformées par ces groupes. Le groupe W est celui qui indique comment les $n_1 n_2 \ldots n_k$ produits

$$x_i y_j \ldots$$

(¹) *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXVI, 1909, p. 99.

(²) E. Cartan, *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XLI, 1913, p. 53-96).

sont transformés entre eux quand on effectue sur les x_i la transformation la plus générale du premier groupe, sur les y_j la transformation la plus générale du second groupe, et ainsi de suite.

Il résulte de là que si l'on désigne respectivement par

$$n_1, n_2, \ldots, n_h;$$
$$r_1, r_2, \ldots, r_h,$$

les nombres de variables et de paramètres des h groupes $g_1, \ldots, g_h$, on a, pour le groupe W,

$$n = n_1 n_2 \ldots n_h; \qquad r = r_1 + r_2 + \ldots + r_h.$$

Rappelons d'autre part que l'on a évidemment

$$r_1 \leqq n_1^2 - 1, \; r_2 \leqq n_2^2 - 1, \; \ldots, \; r_h \leqq n_h^2 - 1 \qquad (n_1, n_2, \ldots, n_h \geqq 2).$$

17. Cela posé, nous allons montrer que l'inégalité

$$r \geqq \frac{n(n-1)}{2}$$

n'est possible que d'une seule manière, à savoir pour

$$h = 2, \qquad n_1 = n_2 = 2, \qquad r_1 = r_2 = 3,$$

auquel cas l'inégalité se change du reste en égalité.

Il nous suffit pour cela de démontrer l'inégalité arithmétique

$$(9) \quad \frac{n_1 n_2 \ldots n_h (n_1 n_2 \ldots n_h - 1)}{2} - (n_1^2 - 1) - (n_2^2 - 1) - \ldots - (n_h^2 - 1) \geqq 0,$$

valable pour tout système d'entiers $n_1, \ldots, n_h$ au moins égaux à 2.

Soit d'abord $h = 2$, et supposons $n_1 \leqq n_2$; le premier membre de l'inégalité est un trinome du second degré en n_2; le coefficient de n_2^2 est $\frac{n_1^2}{2} - 1 > 0$; le trinome est négatif pour $n_2 = 0$; d'autre part, pour $n_2 = n_1$, il est égal à

$$\frac{n_1^2(n_1^2 - 1)}{2} - 2(n_1^2 - 1) = \frac{(n_1^2 - 4)(n_1^2 - 1)}{2} \geqq 0;$$

il est donc sûrement positif pour $n_2 > n_1$. L'inégalité ne pourrait se

réduire à une égalité que si l'on avait $n_1 = n_2 = 2$, et alors il faudrait prendre $r_1 = r_2 = 3$. Nous reviendrons tout à l'heure sur ce cas-là.

Supposons maintenant démontrée l'inégalité (9) jusqu'à une certaine valeur de h; nous allons montrer que son premier membre est sûrement positif (et non nul) pour une valeur de h supérieure d'une unité. Considérons en effet le trinome du second degré en x

$$\frac{n_1 n_2 \ldots n_h x(n_1 \ldots n_h x - 1)}{2} - (x^2 - 1) - (n_1^2 - 1) - \ldots - (n_h^2 - 1),$$

où $n_1, \ldots, n_h$ sont des entiers donnés au moins égaux à 2. Ce trinome a son coefficient de x^2 positif; il est négatif pour $x = 0$ et positif ou nul pour $x = 1$; donc il est sûrement positif pour $x > 1$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Le seul groupe W semi-simple résulte donc de la multiplication de deux groupes d'ordre 3 à 2 variables; c'est le groupe qui indique comment sont transformées les quatre quantités

$$u_1 = x_1 y_1, \qquad u_2 = x_1 y_2, \qquad u_3 = x_2 y_1, \qquad u_4 = x_2 y_2,$$

quand on effectue sur les variables x_1 et x_2 une substitution linéaire arbitraire à déterminant 1, et sur les variables y_1 et y_2 une autre substitution linéaire arbitraire à déterminant 1. On obtient ainsi un groupe à six paramètres qui laisse manifestement invariante la forme quadratique

$$u_1 u_4 - u_2 u_3.$$

Par suite, *le seul groupe* W *semi-simple est le groupe linéaire d'une forme quadratique non dégénérée à quatre variables* (¹).

Les groupes W simples du type A).

18. Il y a une infinité de structures simples du type A); leur *rang* l peut prendre toutes les valeurs de 1 à $+\infty$. Il existe, pour chaque valeur de l, exactement l groupes linéaires fondamentaux qui sont :

(¹) Ce groupe est celui de la relativité généralisée.

1° Le groupe linéaire le plus général (conservant les volumes) à $l+1$ variables x_i;

2° Le groupe qui indique comment le précédent transforme entre elles les $\frac{(l+1)l}{2}$ coordonnées plückeriennes $x_i y_j - y_i x_j$ d'une droite;

3° Le groupe qui indique comment le premier groupe transforme entre elles les $\frac{(l+1)l(l-1)}{6}$ coordonnées plückeriennes

$$\begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{vmatrix}$$

d'une multiplicité plane à deux dimensions, et ainsi de suite.

Tous ces groupes sont à $r = l(l+2)$ paramètres.

Le groupe linéaire le plus général ne laissant invariante aucune multiplicité plane est facile à obtenir. Prenons par exemple $l = 3$ et considérons la forme génératrice

$$\left(\sum a_i x_i\right)^\alpha \left[\sum (a_i b_j - b_i a_j) x_{ij}\right]^\beta \left[\sum \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} x_{ijk}\right]^\gamma,$$

où α, β, γ désignent trois exposants entiers positifs ou nuls donnés, les a_i, les b_i et les c_i étant trois systèmes de quatre *paramètres arbitraires*. Lorsqu'on développe la forme considérée suivant les puissances des paramètres a_i, b_i, c_i et qu'on réduit les termes semblables, on obtient, comme coefficients, des polynomes u par rapport aux variables, regardées comme indépendantes,

$$x_i, \quad x_{ij}, \quad x_{ijk};$$

soit n le nombre de ceux de ces polynomes qui sont linéairement indépendants. Lorsqu'on effectue la transformation projective la plus générale, les coordonnées homogènes x_i d'un point, x_{ij} d'une droite, x_{ijk} d'un plan subissent certaines substitutions linéaires : par ces substitutions linéaires, les polynomes u_i sont échangés à leur tour par une substitution linéaire, et *c'est cette dernière substitution linéaire qui engendre le groupe cherché.*

19. On pourrait partir de ce mode de génération du groupe linéaire le plus général ne laissant invariante aucune multiplicité plane pour déterminer ceux de ces groupes pour lesquels le nombre n des variables satisfait à l'inégalité

$$l(l+2) \leqq \frac{n(n-1)}{2}. \tag{10}$$

Mais il est plus commode d'utiliser la notion de *poids* [1]. On peut choisir les n variables du groupe de manière qu'à chacune d'elles soit attaché un poids déterminé, représenté symboliquement par une expression [2]

$$\varpi = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_{l+1}\omega_{l+1},$$

où les coefficients $m_1, \ldots, m_{l+1}$ sont des nombres rationnels dont la somme est nulle, les différences $m_i - m_j$ étant toutes des entiers. Si l'entier $m_i - m_j$ n'est pas nul et s'il y a une variable de poids ϖ, il y a certainement des variables pour chacun des poids formés par les termes de la progression arithmétique de raison $\omega_i - \omega_j$ dont le premier terme est ϖ et le dernier est

$$\varpi - (m_i - m_j)(\omega_i - \omega_j);$$

il résulte facilement de là que *si l'on permute dans l'expression de* ϖ, *de toutes les manières possibles, les coefficients* $m_1, m_2, \ldots, m_{l+1}$, *il existe des variables de chacun des poids ainsi obtenus.*

Cela posé, considérons dans un groupe W une certaine variable dans le poids ϖ duquel les coefficients $m_1, m_2, \ldots, m_{l+1}$ soient rangés par ordre de grandeur décroissante. Supposons qu'il y en ait h distincts, répétés le premier p_1 fois, le second p_2 fois, ..., le dernier p_h fois. Le nombre des variables qui se déduisent de la première par permutation des coefficients m_i est au moins égal à

$$\frac{(l+1)!}{p_1!\,p_2!\ldots p_h!} \qquad (p_1 + p_2 + \ldots + p_h = l+1).$$

Les deux plus petites valeurs que puisse prendre ce nombre sont $l+1$

---

(1) Voir *Bull. Soc. math. de France*, t. XLI, 1913, p. 67 (nos 13 et 14).

(2) Il n'y a pas à confondre les symboles ω_i introduits ici avec les formes de Pfaff ω_i précédemment considérées.

et $\frac{(l+1)l}{2}$, correspondant respectivement à

$$h=2; \quad p_1=1, \quad p_2=l \quad \text{ou} \quad p_1=l, \quad p_2=1;$$
$$h=2; \quad p_1=2, \quad p_2=l-1 \quad \text{ou} \quad p_1=l-1, \quad p_2=2.$$

Prenons d'abord le second cas. Il n'est possible que si l'on a

$$l(l+2) \geqq \frac{\frac{(l+1)l}{2}\left[\frac{(l+1)l}{2}-1\right]}{2} = \frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{8},$$

ou, en simplifiant, $l \leqq 3$. Il faudrait donc $l=3$, avec

$$\varpi = m_1(\omega_1+\omega_2)+m_3\omega_3 \quad \text{ou} \quad \varpi = m_1\omega_1+m_3(\omega_2+\omega_3).$$

Si $m_1 - m_3 = 1$, on obtient le second groupe fondamental, c'est-à-dire le groupe qui indique comment le groupe projectif de l'espace à trois dimensions transforme entre elles les coordonnées plückeriennes x_{ij} de la droite. Pour ce groupe, on a effectivement,

$$r=15, \qquad n=6, \qquad r=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Il laisse invariante une forme quadratique non dégénérée, à savoir la forme

$$x_{23}x_{14}+x_{31}x_{24}+x_{12}x_{34}$$

qui, égalée à zéro, indique que les x_{ij} sont les coordonnées d'une droite.

Si $m_1 - m_3 \geqq 2$, le groupe ne peut pas être un groupe W, car en même temps par exemple que la variable de poids

$$\varpi = m_1(\omega_1+\omega_2)+m_3\omega_3,$$

il existe une variable de poids

$$\varpi-(\omega_2-\omega_3) = m_1\omega_1+(m_1-1)\omega_2+(m_3+1)\omega_3$$

différente de celles qu'on obtient en permutant les coefficients m_1, m_3 de ϖ.

Passons au premier cas où l'on a

$$\varpi = m_1\omega_1+m_{l+1}(\omega_2+\ldots+\omega_{l+1}) \quad \text{ou} \quad \varpi = m_1(\omega_1+\ldots+\omega_l)+m_{l+1}\omega_{l+1}.$$

Si $m_1 - m_{l+1} = 1$, on obtient le groupe linéaire général à n variables, qui est effectivement un groupe W. Si $m_1 - m_{l+1} \geqq 2$, il existe, en même temps que la variable de poids

$$\varpi = m_1\omega_1 + m_{l+1}(\omega_2 + \ldots + \omega_{l+1}),$$

au moins une variable de poids

$$\varpi - (\omega_1 - \omega_2) = (m_1 - 1)\omega_1 + (m_{l+1} + 1)\omega_2 + m_{l+1}(\omega_3 + \ldots + \omega_{l+1}).$$

Pour qu'on retrouve, en partant de cette variable, l'un des deux cas possibles, il faut que $m_1 - 1 = m_{l+1} + 1$; mais le nombre des nouvelles variables atteignant déjà la valeur maxima compatible avec l'inégalité (10), on arrive à une impossibilité.

20. Nous avons supposé implicitement $l > 2$.

Si $l = 2$, on a $r = 8$ et n ne peut dépasser la valeur 4. Si, pour une certaine variable, les trois coefficients m_1, m_2, m_3 du poids ϖ sont distincts, il existe au moins six variables, ce qui est impossible. Il faut donc que, pour l'une au moins des variables, on ait

$$\varpi = m_1\omega_1 + m_3(\omega_2 + \omega_3) \quad \text{ou} \quad \varpi = m_1(\omega_1 + \omega_2) + m_3\omega_3.$$

Plaçons-nous par exemple dans le premier cas. Il est nécessaire que $m_1 - m_3$ ne dépasse pas 2; sinon, en effet, il y aurait une variable de poids

$$\varpi' = \varpi - (\omega_1 - \omega_2) = (m_1 - 1)\omega_1 + (m_3 + 1)\omega_2 + m_3\omega_3,$$

avec trois coefficients distincts, ce que nous avons vu être impossible. Si $m_1 - m_3 = 2$, le nouveau poids ϖ' n'étant pas homologue de ϖ, il existerait au moins six variables. Il faut donc $m_1 - m_3 = 1$ et l'on obtient le groupe linéaire le plus général à trois variables.

Si enfin $l = 1$, $r = 3$, le groupe le plus général indique comment les coefficients d'une forme binaire

$$u_1 x^m + \frac{m}{1} u_2 x^{m-1} y + \ldots + u_{m+1} y^m$$

sont transformés quand on effectue sur x et y une substitution linéaire à déterminant 1. En dehors du groupe général à deux variables, on obtient donc comme seul groupe W possible celui dont les trois

variables sont les coefficients u_1, u_2, u_3 de la forme quadratique

$$u_1 x^2 + 2 u_2 xy + u_3 y^2;$$

c'est le groupe le plus général laissant invariante la forme quadratique ternaire

$$u_2^2 - u_1 u_3.$$

21. En résumé, les seuls groupes W simples du type A) sont :

1° *Le groupe linéaire général, d'ordre* $n^2 - 1$, *à* n *variables;*

2° *Le groupe linéaire le plus général, d'ordre* 3, *qui laisse invariante une forme quadratique non dégénérée à trois variables;*

3° *Le groupe linéaire le plus général, d'ordre* 15, *qui laisse invariante une forme quadratique non dégénérée à six variables.*

Les groupes W simples du type C).

22. Les groupes du type C), de rang $l \geqq 2$, sont d'ordre

$$r = l(2l+1);$$

ils sont isomorphes au groupe projectif d'un complexe linéaire non dégénéré de l'espace à $2l - 1$ dimensions.

Pour tout groupe W du type C), on doit avoir

$$l(2l+1) \geqq \frac{n(n-1)}{2}, \qquad \text{ou} \quad n \leqq 2l+1.$$

Étant donné un groupe linéaire du type C) ne laissant invariante aucune multiplicité plane, on peut choisir les variables de manière à attribuer à chacune un poids [1]

$$\varpi = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \ldots + m_l \omega_l$$

avec des coefficients m_1, m_2, ..., m_l entiers. En même temps que le poids ϖ existent tous ceux qui font partie de la progression arithmétique de raison $2\omega_i$ et dont les termes extrêmes sont

$$\varpi \quad \text{et} \quad \varpi - 2m_i\omega_i;$$

---

[1] Voir *Bull. Soc. math.*, *loc. cit.*, p. 69-70.

existent de même tous ceux qui font partie de la progression arithmétique de raison $\omega_i \pm \omega_j$ et dont les termes extrêmes sont

$$\varpi \quad \text{et} \quad \varpi - (m_i \pm m_j)(\omega_i \pm \omega_j).$$

De là résulte en particulier l'existence, en même temps que du poids ϖ, de tous ceux qu'on en déduit en permutant les coefficients m_i de toutes les manières possibles et en changeant les signes d'un nombre quelconque d'entre eux. Si donc il existe h coefficients m_i différents de zéro et distincts en valeur absolue; si de plus ces coefficients sont répétés respectivement $p_1, p_2, \ldots, p_h$ fois, il existe au moins

$$2^{p_1+p_2+\ldots+p_h} \frac{l!}{p_1!\, p_1! \ldots p_h!\, (l-p_1-\ldots-p_h)!}$$

variables. Pour une valeur donnée q de $p_1+p_2+\ldots+p_h$, ce nombre est au moins égal à $2^q \dfrac{l!}{q!\,(l-q)!}$; ce dernier nombre ne peut être inférieur ou égal à $2l+1$ que si $q=1$ (sauf pour $l=2$, cas sur lequel nous reviendrons tout à l'heure), auquel cas il est égal à $2l$. Le poids ϖ est alors de la forme $m_1\omega_1$ et l'entier m_1 ne peut être qu'égal à ± 1, sinon il existerait le poids $(m_1-2)\omega_1$, ce qui ferait au moins $4l$ variables. Le groupe W unique ainsi obtenu est précisément le groupe d'un complexe linéaire non dégénéré à $2l$ variables.

23. Reste le cas $l=2$, pour lequel le nombre

$$2^q \frac{l!}{q!\,(l-q)!}$$

prend, pour $q=2$, la valeur 4. Dans ce cas, le poids ϖ est de la forme $m_1(\omega_1+\omega_2)$. Le coefficient m_1 ne peut être plus grand que 1, sinon il existerait au moins une variable de poids

$$(m_1-1)(\omega_1+\omega_2),$$

ce qui prouverait l'existence d'au moins huit variables. Il faut donc $m_1=1$. Tous les poids possibles sont alors

$$\pm\omega_1 \pm \omega_2 \quad \text{et} \quad 0.$$

On obtient le second groupe fondamental [1], susceptible de l'interprétation géométrique suivante. Si, dans l'espace à trois dimensions, on considère un complexe linéaire non dégénéré qu'on peut toujours supposer défini par l'équation

$$x_{12} - x_{34} = 0,$$

le groupe en question indique comment le groupe projectif qui laisse ce complexe invariant échange entre elles les cinq quantités

$$x_{12} + x_{34}, \quad x_{23}, \quad x_{31}, \quad x_{14}, \quad x_{24}$$

formées avec les coordonnées plückeriennes d'une droite. Comme la forme quadratique

$$x_{23}\,x_{14} + x_{31}\,x_{24} + x_{12}\,x_{34}$$

qui s'annule pour les coordonnées d'une droite peut s'écrire

$$x_{23}\,x_{14} + x_{31}\,x_{24} + \frac{1}{4}(x_{12} + x_{34})^2 - \frac{1}{4}(x_{12} - x_{34})^2,$$

on voit que le groupe considéré laisse invariante la forme quadratique non dégénérée à cinq variables

$$x_{23}\,x_{14} + x_{31}\,x_{24} + \frac{1}{4}(x_{12} + x_{34})^2;$$

étant donné son ordre $10 = \frac{5(5-1)}{2}$, c'est le groupe le plus général laissant cette forme invariante.

24. En résumé, les seuls groupes W simples du type C) sont :

1° *Le groupe linéaire, d'ordre* $\frac{n(n+1)}{2}$, *à un nombre pair n de variables, laissant invariant un complexe linéaire non dégénéré;*

2° *Le groupe linéaire, d'ordre* 10, *laissant invariante une forme quadratique non dégénérée à cinq variables.*

---

[1] Voir *Bull. Soc. math.*, *loc. cit.*, p. 89.

Les groupes W simples des types B) et D).

25. Les groupes du type B) et de rang $l \geqq 3$ (¹) sont isomorphes au groupe linéaire d'une forme quadratique non dégénérée à $2l+1$ variables, et les groupes du type D) de rang $l \geqq 4$ (²) sont isomorphes au groupe linéaire d'une forme quadratique non dégénérée à $2l$ variables. Pour chacun de ces groupes, on a

$$r = \frac{n(n-1)}{2}.$$

J'ai démontré dans ma Thèse (³) que tout autre groupe linéaire de même structure avait un nombre de variables supérieur.

Par suite, il n'y a qu'une classe de groupes W simples du type B) ou D), c'est *le groupe linéaire le plus général, d'ordre* $\frac{n(n-1)}{2}$, *laissant invariante une forme quadratique non dégénérée à* $n \geqq 7$ *variables.*

Les groupes W simples des types E), F) et G).

26. Il n'y a que cinq structures simples possibles en dehors des types A), B), C), D). J'ai déterminé dans ma Thèse, pour chacune d'elles, le nombre r de paramètres et le nombre minimum n de variables compatibles avec le caractère linéaire du groupe, à savoir :

Type E), $l=6$	$r=78$,	$n=27$;
Type E), $l=7$	$r=133$,	$n=56$;
Type E), $l=8$	$r=248$.	$n=248$;
Type F), $l=4$	$r=52$,	$n=26$;
Type G), $l=2$	$r=14$,	$n=7$.

(¹) Les groupes de rang $l=1$ peuvent être regardés comme du type A), et ceux de rang $l=2$ comme du type C).

(²) Les groupes de rang $l=1$ ou 2 sont semi-simples, et ceux de rang $l=3$ peuvent être regardés comme du type A).

(³) E. Cartan, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, p. 140-141; Paris, Nony, 1894.

Dans chacun de ces cas, on a

$$r \leqq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Il n'y a donc aucun groupe W *des types considérés.*

Le cas des groupes W réels.

27. Dans ce qui précède, nous avons implicitement supposé les variables et les paramètres *complexes*. Il est facile de voir que les résultats ne sont pas changés si les variables et les paramètres sont réels.

En effet, soit G un groupe W à variables et paramètres réels; si nous convenons d'attribuer aux variables et aux paramètres des valeurs complexes, nous obtenons l'un des groupes précédemment trouvés : désignons-le par $\mathcal{G}$.

Les groupes de la première classe. — Le groupe $\mathcal{G}$ étant formé de toutes les transformations linéaires (conservant les volumes) à n variables, *le groupe* G sera, comme $\mathcal{G}$, à $n^2 - 1$ paramètres et par suite *sera le groupe de toutes les transformations linéaires réelles à n variables réelles.*

Les groupes de la deuxième classe. — Le groupe $\mathcal{G}$ est le groupe le plus général qui laisse invariant un certain point. Ce point est certainement *réel*, sinon le groupe réel G laisserait invariant le point imaginaire conjugué et la droite qui joint ces deux points, ce qui n'est pas. *Le groupe* G *est donc le groupe réel le plus général laissant invariant un point réel.*

Les groupes de la troisième classe. — Le groupe $\mathcal{G}$ est le groupe le plus général laissant invariant un certain complexe linéaire non dégénéré

$$\sum_{\alpha\beta}^{1,\ldots,n} (a_{\alpha\beta} + ib_{\alpha\beta})(x_\alpha\, dx_\beta - x_\beta\, dx_\alpha) = 0 \qquad (n \text{ pair}).$$

Si ce complexe n'est pas réel, le groupe G laisse invariant le complexe imaginaire conjugué

$$\sum (a_{\alpha\beta} - ib_{\alpha\beta})(x_\alpha\, dx_\beta - x_\beta\, dx_\alpha) = 0,$$

et par suite, aussi, tous les complexes du faisceau linéaire

$$\sum (a_{\alpha\beta} + \lambda b_{\alpha\beta})(x_\alpha\, dx_\beta - x_\beta\, dx_\alpha) = 0.$$

Ces complexes ne sont pas tous dégénérés, car la condition de dégénérescence s'exprime analytiquement par un certain nombre d'équations algébriques entières en λ et ces équations ne sont pas identiquement vérifiées puisque, par hypothèse, elles ne le sont pas pour $\lambda = i$; on pourra donc trouver une infinité de valeurs réelles de λ pour lesquelles le complexe n'est pas dégénéré.

Le groupe G, laissant invariant dans tous les cas un complexe linéaire réel non dégénéré et étant d'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$, est nécessairement le groupe le plus général qui laisse ce complexe invariant.

Les groupes de la quatrième classe. — Le groupe $\mathcal{G}$ est le groupe le plus général laissant invariante une certaine forme quadratique non dégénérée

$$F = F_1 + iF_2.$$

Si cette forme n'est pas réelle, le groupe G laisse invariante chacune des formes $F_1 + iF_2$ et $F_1 - iF_2$ et, par suite, chaque forme du faisceau $F_1 + \lambda F_2$. Les formes de ce faisceau ne sont pas toutes dégénérées, car le déterminant de $F_1 + \lambda F_2$, ne s'annulant pas pour $\lambda = i$, n'est pas identiquement nul. Par suite, dans tous les cas, le groupe G laisse invariante une forme quadratique non dégénérée à coefficients réels et, comme son ordre est $\frac{n(n-1)}{2}$, c'est le groupe réel le plus général laissant cette forme invariante.

Conclusion générale.

28. Nous avons donc démontré, tant dans le domaine réel que dans le domaine complexe, l'existence de quatre classes de groupes W conservant les volumes, à savoir :

1° Le groupe linéaire le plus général à n variables ($r = n^2 - 1$);

2° Le groupe linéaire le plus général laissant un point invariant ($r = n^2 - n$);

3° Le groupe linéaire le plus général laissant invariant un complexe linéaire non dégénéré $\left(r = \frac{n(n+1)}{2},\ n \text{ pair}\right)$;

4° Le groupe linéaire le plus général laissant invariante une quadrique non dégénérée $\left(r = \frac{n(n-1)}{2}\right)$.

29. Ces conclusions ne font appel qu'à l'axiome I de M. H. Weyl. Si maintenant on tient compte de l'axiome II, c'est-à-dire si l'on veut que les $n\frac{n(n-1)}{2}$ équations linéaires à rn inconnues (n° **9**), auxquelles doivent satisfaire les coefficients des formes ϖ_s, n'admettent qu'une solution, il faut qu'on ait

$$r = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Il n'y a donc que le groupe linéaire d'une forme quadratique réelle non dégénérée qui satisfasse aux conditions posées par les axiomes I *et* II *de M. H. Weyl.* Et c'est ainsi qu'est démontrée, en partant de ces axiomes, la nécessité de la forme pythagorienne de la métrique d'Univers.

Remarques diverses sur le calcul aux différences finies;

PAR N.-E. NÖRLUND.

Réductions des sommes multiples.

1. Désignons la différence du premier ordre par le symbole

$$\underset{\omega}{\Delta} F(x) = \frac{F(x+\omega) - F(x)}{\omega}$$

et la moyenne du premier ordre par le symbole

$$\underset{\omega}{\nabla} F(x) = \frac{F(x+\omega) + F(x)}{2}.$$

Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ des nombres positifs quelconques. On détermine la différence d'ordre n par l'équation

$$\overset{n}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\Delta}} F(x) = \underset{\omega_n}{\Delta}\left[\overset{n-1}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_{n-1}}{\Delta}} F(x)\right]$$

et la moyenne d'ordre n par l'équation

$$\overset{n}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\nabla}} F(x) = \underset{\omega_n}{\nabla}\left[\overset{n-1}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_{n-1}}{\nabla}} F(x)\right].$$

Si $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = \omega$, j'écris plus brièvement

$$\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}} F(x) \quad \text{et} \quad \overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}} F(x).$$

Dans trois Mémoires [1] récents, j'ai étudié la somme de première espèce et d'ordre n

$$G_n(x) = \mathop{\mathrm{S}}\varphi(x) \overset{n}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\nabla}} x$$

et la somme de seconde espèce et d'ordre n

$$F_n(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x}\varphi(z) \overset{n}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\Delta}} z.$$

Les fonctions $G_n(x)$ et $F_n(x)$ satisfont aux équations suivantes :

$$\overset{n}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\nabla}} G_n(x) = \varphi(x),$$

$$\overset{n}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\Delta}} F_n(x) = \varphi(x).$$

J'ai considéré ces fonctions en admettant que les paramètres ω_i sont des nombres positifs quelconques. Que se passe-t-il si deux des nombres ω_i viennent coïncider dans un point? Je vais démontrer qu'en ce cas une somme d'ordre n s'exprime linéairement par deux ou trois sommes d'ordre $n-1$. Pour le voir, je commence par déduire un théorème relativement aux polynomes d'Euler $E_\nu^n(x)$. Ces polynomes figurent comme coefficients dans le développement suivant (C, p. 184) :

$$(1) \qquad \frac{2^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t}+1)(e^{\omega_2 t}+1)\ldots(e^{\omega_n t}+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} E_\nu^n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

---

[1] *Mémoire sur le calcul aux différences finies* (*Acta mathematica*, t. XLIV, 1923, p. 71-211); *Sur certaines équations aux différences finies* [*Transactions of the American Mathematical Society*, t. XXV, 1923 (sous presse)]; *Mémoire sur les polynomes de Bernoulli* (*Acta mathematica*, t. XLIII, 1920, p. 121-196). Dans les renvois qui vont suivre, je désignerai ces trois Mémoires par les lettres A, B et C. *Voir* aussi : *Sur l'état actuel de la théorie des équations aux différences finies* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XLIV, 1920, p. 174-192 et p. 200-220); *Comptes rendus du Congrès international des Mathématiciens* (Strasbourg, 22-30 septembre 1920, p. 98-119).

Dérivons par rapport à ω_1, on trouvera

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \frac{\partial}{\partial \omega_1} E_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = -\frac{2^n t\, e^{(x+\omega_1)t}}{(e^{\omega_1 t}+1)^2 (e^{\omega_2 t}+1)\ldots(e^{\omega_n t}+1)}.$$

Mais en développant le dernier membre suivant les puissances de t on obtient, en vertu de l'équation (1),

$$-\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu+1}}{\nu!} E_\nu^{(n+1)}(x+\omega_1 \mid \omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de t, on trouvera

$$\frac{\partial}{\partial \omega_1} E_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = -\frac{\nu}{2} E_{\nu-1}^{(n+1)}(x+\omega_1 \mid \omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

Cette équation peut aussi s'écrire

$$(2) \qquad \begin{aligned} &E_\nu^{(n+1)}(x \mid \omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \\ &\quad = 2 E_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) + \frac{2}{\nu+1} \frac{\partial}{\partial \omega_1} E_{\nu+1}^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n). \end{aligned}$$

Par conséquent, un polynome d'Euler d'ordre $n+1$, ayant deux paramètres égaux, s'exprime linéairement par deux polynomes d'ordre n. En posant $x = 0$, il vient

$$(3) \qquad \begin{aligned} &C_\nu^{(n+1)}[\omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n] \\ &\quad = 2 C_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n] + \frac{1}{\nu+1} \frac{\partial}{\partial \omega_1} C_{\nu+1}^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]. \end{aligned}$$

Supposons que la fonction $\varphi(x)$ admet, pour $x \geqq b$, une dérivée continue d'ordre m telle que

$$\lim_{x \to \infty} x^{n+1+\varepsilon} \varphi^{(m)}(x) = 0, \qquad \varepsilon > 0.$$

La somme de première espèce se développe en série de la manière suivante (B, § 8) :

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\mathbf{S}\, \varphi(x) \prod_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} x \\ &\quad = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{2^\nu \nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{E}_{m-1}^{n}(-t)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+t)\, dt. \end{aligned}$$

Ici $\overline{E}_\nu^{(n)}(x)$ désigne une fonction qui satisfait à l'équation

$$\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\overset{n}{\nabla}} \overline{E}_\nu^{n}(x) = 0$$

et qui est, dans l'intervalle $0 \leqq x < \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$, égale au polynome d'Euler $E_\nu^{(n)}(x)$. Cette fonction vérifie l'équation

$$(5) \quad \overline{E}_\nu^{(n+1)}(x \mid \omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$
$$= 2\overline{E}_\nu^{n}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) + \frac{2}{\nu+1} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \overline{E}_{\nu+1}^{n}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

En effet, en appliquant l'opération $\underset{\omega_2, \ldots, \omega_n}{\overset{n-1}{\nabla}}$ au second membre, on trouvera

$$(6) \qquad 2\overline{E}_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1) + \frac{2}{\nu+1} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \overline{E}_{\nu+1}^{(1)}(x \mid \omega_1).$$

Mais

$$\overline{E}_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1) = \omega_1^\nu \overline{E}_\nu^{(1)}\left(\frac{x}{\omega_1} \middle| 1\right).$$

Par conséquent, on aura

$$\omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} \overline{E}_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1) = \nu \overline{E}_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1) - \nu x \overline{E}_{\nu-1}^{(1)}(x \mid \omega_1).$$

L'expression (6) est donc égale à

$$2\overline{E}_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1) + \frac{2}{\omega_1} \overline{E}_{\nu+1}^{(1)}(x \mid \omega_1) - \frac{2x}{\omega_1} \overline{E}_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1).$$

En y appliquant l'opération $\underset{\omega_1}{\nabla}$, on trouvera

$$E_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1).$$

Par conséquent, les moyennes d'ordre n des deux membres de l'équation (5) sont égales. Comme cette équation est vraie dans l'intervalle $0 \leqq x < \omega_1 + \omega_2 \ldots + \omega_n$, elle est donc vraie pour toutes les valeurs de x. Cela posé, considérons une somme d'ordre $n+1$, ayant deux paramètres égaux, c'est-à-dire une fonction de la forme $G_{n+1}(x \mid \omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. En développant, on trouvera, en vertu

des équations (4), (3) et (5),

$$
\begin{aligned}
&G_{n+1}(x \mid \omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \\
&= \mathbf{S}\,\varphi(x) \overset{n-1}{\underset{\omega_1\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}{\nabla}} x \\
&= \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_\nu^{(n+1)}[\omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{2^\nu \nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{E}_{m-1}^{(n+1)}(-t)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt \\
&= 2\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{2^\nu \nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + 2\int_0^\infty \frac{\overline{E}_{m-1}^{(n)}(-t)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt \\
&\quad + 2\frac{\partial}{\partial\omega_1} \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_{\nu+1}^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{2^{\nu+1}(\nu+1)!} \varphi^{(\nu)}(x) + 2\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\omega_1} \frac{\overline{E}_m^{(n)}(-t)}{m!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Mais on vérifie sans peine que cette équation peut s'écrire de la manière suivante :

$$
\mathbf{S}\,\varphi(x) \overset{n+1}{\underset{\omega_1\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}{\nabla}} x = 2\,\mathbf{S}\,\varphi(x) \overset{n}{\underset{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}{\nabla}} x + 2\frac{\partial}{\partial\omega_1}\mathbf{S}\left(\int_a^x \varphi(z)\,dz\right) \overset{n}{\underset{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}{\nabla}} x.
$$

Notre somme d'ordre $n+1$ s'exprime donc linéairement par deux sommes d'ordre n. En particulier, pour $n=1$, on trouvera

$$
(7) \qquad \mathbf{S}\,\varphi(x) \overset{2}{\underset{\omega}{\nabla}} x = 2\,\mathbf{S}\,\varphi(x) \underset{\omega}{\nabla} x + 2\frac{\partial}{\partial\omega}\mathbf{S}\int_a^x \varphi(z)\,dz \underset{\omega}{\nabla} x.
$$

2. Pour les sommes de seconde espèce, on peut obtenir une relation semblable. Considérons d'abord la fonction génératrice des polynomes de Bernoulli (C, p. 183) :

$$
\frac{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n t^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t}-1)(e^{\omega_2 t}-1)\ldots(e^{\omega_n t}-1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).
$$

En dérivant par rapport à ω_1, on trouvera

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \frac{\partial}{\partial\omega_1} B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \\
&\quad = \frac{\omega_2\ldots\omega_n t^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t}-1)(e^{\omega_2 t}-1)\ldots(e^{\omega_n t}-1)} - \frac{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n t^{n+1} e^{(x+\omega_1)t}}{(e^{\omega_1 t}-1)^2(e^{\omega_2 t}-1)\ldots(e^{\omega_n t}-1)}.
\end{aligned}
$$

Mais en développant le dernier membre suivant les puissances de t, on trouvera

$$\frac{1}{\omega_1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}[B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)-B_\nu^{(n+1)}(x+\omega_1\,|\,\omega_1,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)].$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de t, on obtient

$$\omega_1\frac{\partial}{\partial\omega_1}B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$$
$$=B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)-B_\nu^{(n+1)}(x+\omega_1\,|\,\omega_1,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n).$$

Cette équation peut aussi s'écrire comme il suit :

$$(8)\qquad B_\nu^{(n+1)}(x\,|\,\omega_1,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$$
$$=B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)-\nu\omega_1B_{\nu-1}^{(n)}(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$$
$$-\omega_1\frac{\partial}{\partial\omega_1}B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n).$$

Un polynome de Bernoulli d'ordre $n+1$, ayant deux paramètres égaux, s'exprime donc linéairement par trois polynomes d'ordre n. La somme de seconde espèce de la fonction $\varphi(x)$ se développe en série de la manière suivante (B, § 16) :

$$(9)\quad \mathop{\mathrm{S}}_a^x\varphi(z)\mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n}z$$
$$=\sum_{\nu=0}^{m+n-1}\frac{B_\nu^{(n)}[\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n]}{\nu!}f_n^{(\nu)}(x)+\int_0^\infty\frac{\overline{B}_{m+n-1}^{(m)}(-t)}{(m+n-1)!}\varphi^{(m)}(x+t)\,dt,$$

où l'on a posé

$$f_n(x)=\int_a^x\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(z)\,dz.$$

Ici $\overline{B}_\nu^{(n)}(x)$ désigne une fonction qui satisfait à l'équation

$$\mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n}\overline{B}_\nu^{(n)}(x)=0$$

et qui est, dans l'intervalle $0\leqq x<\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_n$, égale au polynome de Bernoulli $B_\nu^{(n)}(x)$. Cette fonction vérifie la relation sui-

vante :

$$(10)\qquad \overline{B}_\nu^{(n+1)}(x\,|\,\omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$
$$= \overline{B}_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) - \nu\omega_1 \overline{B}_{\nu-1}^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$
$$- \omega_1 \frac{\partial}{\partial\omega_1} \overline{B}_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

En effet, nous venons de voir que cette relation est vraie dans l'intervalle $0 \leqq x < \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$. Et les deux membres admettent la même différence d'ordre n. La relation est donc vraie pour toutes les valeurs de x. Cela posé, considérons la fonction

$$F_{n+1}(x\,|\,\omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

En développant, on trouvera

$$F_{n+1}(x\,|\,\omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$
$$= \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z) \underset{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}{\overset{n+1}{\Delta}} z$$
$$= \sum_{\nu=0}^{m+n} \frac{B_\nu^{(n+1)}[\omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{\nu!} f_{n+1}^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n}^{(n+1)}(-t)}{(m+n)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt.$$

Mais en tenant compte des équations (8) et (10), on peut écrire la dernière expression comme il suit :

$$\sum_{\nu=0}^{m+n} \frac{B_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{\nu!} f_{n+1}^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n}^{(n)}(-t)}{(m+n)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt$$
$$- \omega_1 \sum_{\nu=1}^{m+n} \frac{B_{\nu-1}^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{(\nu-1)!} f_n^{(\nu-1)}(x) - \omega_1 \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n-1}^{(n)}(-t)}{(m+n-1)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt$$
$$- \omega_1 \frac{\partial}{\partial\omega_1} \sum_{\nu=0}^{m+n} \frac{B_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{\nu!} f_{n+1}^{(\nu)}(x) - \omega_1 \frac{\partial}{\partial\omega_1} \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n}^{(n)}(-t)}{(m+n)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt.$$

Nous avons ainsi établi la relation suivante :

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z) \underset{\omega_1\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}{\overset{n+1}{\Delta}} z = \mathop{\mathrm{S}}_a^x \int_a^z \varphi(z)\,dz \underset{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}{\overset{n}{\Delta}} z$$
$$- \omega_1 \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z) \underset{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}{\overset{n}{\Delta}} z - \omega_1 \frac{\partial}{\partial\omega_1} \mathop{\mathrm{S}}_a^x \int_a^z \varphi(z)\,dz \underset{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}{\overset{n}{\Delta}} z.$$

Une somme de seconde espèce et d'ordre $n+1$, ayant deux paramètres égaux, s'exprime donc linéairement par trois sommes d'ordre n. Pour $n=1$, on trouvera en particulier

$$(11)\quad \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \varphi(z) \overset{2}{\underset{\omega}{\Delta}} z$$
$$= \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \int_{a}^{z} \varphi(z)\, dz \underset{\omega}{\Delta} z - \omega \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z - \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \int_{a}^{z} \varphi(z)\, dz \underset{\omega}{\Delta} z.$$

3. Considérons en second lieu le cas où tous les nombres ω sont égaux. En ce cas, les polynomes d'Euler et les polynomes de Bernoulli satisfont aux relations suivantes (C, p. 186) :

$$(12)\qquad \omega \mathrm{E}_{\nu}^{(n+1)}(x \mid \omega) = \frac{2}{n} \mathrm{E}_{\nu+1}^{(n)}(x \mid \omega) - \frac{2}{n}(x - n\omega) \mathrm{E}_{\nu}^{n}(x \mid \omega),$$

$$(13)\qquad \mathrm{B}_{\nu}^{(n+1)}(x \mid \omega) = \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) \mathrm{B}_{\nu}^{(n)}(x \mid \omega) + \frac{\nu}{n}(x - n\omega) \mathrm{B}_{\nu-1}(x \mid \omega).$$

En raisonnant comme plus haut, on vérifie que ces deux relations subsistent si l'on remplace les polynomes $\mathrm{E}(x \mid \omega)$ et $\mathrm{B}(x \mid \omega)$ par les fonctions $\overline{\mathrm{E}}(x \mid \omega)$ et $\overline{\mathrm{B}}(x \mid \omega)$. Si l'on pose $x = 0$, on trouve en particulier

$$(14)\qquad \mathrm{C}_{\nu}^{(n+1)} = \frac{1}{n} \mathrm{C}_{\nu+1}^{(n)} + 2\mathrm{C}_{\nu}^{(n)},$$

$$(15)\qquad \mathrm{B}_{\nu}^{(n+1)} = \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) \mathrm{B}_{\nu}^{(n)} - \nu \mathrm{B}_{\nu-1}^{n}.$$

Étudions les deux sommes de la fonction $\varphi(x)$:

$$\mathrm{G}_n(x \mid \omega) = \mathop{\mathrm{S}} \varphi(x) \overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}} x,$$

$$\mathrm{F}_n(x \mid \omega) = \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \varphi(x) \overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}} x.$$

Développons, suivant les puissances de ω, la somme de première espèce et d'ordre $n+1$; en tenant compte des équations (14) et (12),

on trouvera

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}\,\varphi(x)\overset{n+1}{\underset{\omega}{\nabla}}x &= \sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{C_\nu^{(n+1)}\omega^\nu}{2^\nu\nu!}\varphi^{(\nu)}(x)+\int_0^\infty\frac{\overline{E}_{m-1}^{(n+1)}(-t\,|\,\omega)}{(m-1)!}\varphi^{(m)}(x+t)\,dt\\
&= 2\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{C_\nu^{(n)}\omega^\nu}{2^\nu\nu!}\varphi^{(\nu)}(x)\\
&\quad+\frac{2}{n\omega}\int_0^\infty\frac{(t+n\omega)\overline{E}_{m-1}^{(n)}(-t\,|\,\omega)}{(m-1)!}\varphi^{(m)}(x+t)\,dt\\
&\quad+\frac{2}{n\omega}\sum_{\nu=0}^{m}\frac{C_\nu^{(n)}\omega^\nu}{2^\nu\nu!}\nu\varphi^{(\nu-1)}(x)+\frac{2}{n\omega}\int\frac{\overline{E}_m(-t\,|\,\omega)}{(m-1)!}\varphi^{(m)}(x+t)\,dt.
\end{aligned}$$

Mais en intégrant par parties dans la dernière intégrale, on peut écrire cette équation comme il suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}\,\varphi(x)\overset{n+1}{\underset{\omega}{\nabla}}x &= 2\left(1-\frac{x}{n\omega}\right)\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{C_\nu^{(n)}\omega^\nu}{2^\nu\nu!}\varphi^{(\nu)}(x)\\
&\quad+2\left(1-\frac{x}{n\omega}\right)\int_0^\infty\frac{\overline{E}_{m-1}^{(n)}(-t\,|\,\omega)}{(m-1)!}\varphi^{(m}(x+t)\,dt\\
&\quad+\frac{2}{n\omega}\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{C_\nu^{(n)}\omega^\nu}{2^\nu\nu!}D_x^\nu[x\varphi(x)]+\frac{2}{n\omega}\int_0^\infty\frac{\overline{E}_{m-1}^{(n)}(-t\,|\,\omega)}{(m-1)!}D_x^m[(x+t)\varphi(x+t)]\,dt.
\end{aligned}$$

On aura donc

$$(16)\qquad G_{n+1}(x\,|\,\omega)=2\left(1-\frac{x}{n\omega}\right)G_n(x\,|\,\omega)+\frac{2}{n\omega}\mathbf{S}\,x\varphi(x)\overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}}x.$$

En développant la somme de seconde espèce $F_{n+1}(x\,|\,\omega)$ suivant les puissances de ω et en tenant compte des équations (13) et (15), on démontre de même que

$$(17)\qquad F_{n+1}(x\,|\,\omega)=\frac{x-n\omega}{n}F_n(x\,|\,\omega)-\frac{1}{n}\mathbf{S}_a^x\,z\varphi(x)\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}}z.$$

En particulier, pour $n=1$ on trouvera

$$\mathbf{S}\,\varphi(x)\overset{2}{\underset{\omega}{\nabla}}x=2\left(1-\frac{x}{\omega}\right)\mathbf{S}\,\varphi(x)\underset{\omega}{\nabla}x+\frac{2}{\omega}\mathbf{S}\,x\varphi(x)\underset{\omega}{\nabla}x,$$

$$\mathbf{S}_a^x\,\varphi(z)\overset{2}{\underset{\omega}{\nabla}}z=\mathbf{S}_a^x(x-z-\omega)\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta}z.$$

En rapprochant ces équations des équations (7) et (11) on obtient les expressions suivantes pour les dérivées des fonctions $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ par rapport à ω :

$$\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\mathop{\mathrm{S}}\varphi(x)\underset{\omega}{\Gamma}x=\mathop{\mathrm{S}}x\varphi'(x)\underset{\omega}{\Gamma}x-x\mathop{\mathrm{S}}\varphi'(x)\underset{\omega}{\Gamma}x.$$

$$\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x}\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta}z=\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x}(z-x)\varphi'(z)\underset{\omega}{\Delta}z+\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x}\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta}z-(x-a)\varphi(a)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x}(z-x)\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta}z+\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x}\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta}z.$$

4. Les équations (16) et (17) permettent de déterminer les sommes d'un ordre quelconque par voie récursive. Soit par exemple $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, $\omega=1$ et posons

$$g_n(x)=\mathop{\mathrm{S}}\frac{\overset{n}{\Gamma}x}{x},$$

$$\Psi_n(x)=\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{x}\frac{\overset{n}{\Delta}x}{x}.$$

On trouvera

$$g_{n+1}(x)=2\left(1-\frac{x}{n}\right)g_n(x)+\frac{2}{n},$$

$$\Psi_{n+1}(x)=\left(\frac{x}{n}-1\right)\Psi_n(x)-\frac{B_n^{(n)}(x-1)}{n.n!}.$$

On en conclut que les transcendantes $g_n(x)$ et $\Psi_n(x)$ s'expriment par les transcendantes élémentaires $g_1(x)$ et $\Psi_1(x)$ de la manière suivante :

$$g_n(x)=2^{n-1}\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n-1}\right)g_1(x)+p(x),$$

$$\Psi_n(x)=(x-1)\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{x}{n-1}-1\right)\Psi_1(x)+q(x),$$

$p(x)$ et $q(x)$ désignant des polynomes en x.

Les relations de récurrence (16) et (17) montrent qu'une somme d'ordre n de la fonction $\varphi(x)$ peut toujours s'exprimer par une somme de premier ordre étendue sur la fonction $\varphi(x)$ multipliée par un poly-

nome [1]. On peut arriver plus directement à ce résultat de la manière suivante. On a par définition

$$\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{S}}} \varphi(z) \overset{n+1}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_{n+1}}{\Delta}} z = \lim_{\eta \to 0} \left\{ \int_0^\infty \frac{\mathrm{B}_n^{(n+1)}(x-z)}{n!} \varphi(z) e^{-\eta z} dz \right.$$
$$\left. + (-1)^{n+1} \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_{n+1} \sum \varphi(x+\Omega) e^{-\eta(x+\Omega)} \right\},$$

où $\Omega = s_1\omega_1 + s_2\omega_2 \ldots + s_{n+1}\omega_{n+1}$. En faisant $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{n+1} = \omega$, on peut écrire la série à $n+1$ entrées, qui figure dans cette expression, comme une série simple. En effet, considérons la série

$$\sum_{s_1+s_2\ldots+s_{n+1}=p} \varphi(x+s_1+s_2\ldots+s_{n+1}),$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs entières non négatives de $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$ qui vérifient l'inégalité $s_1+s_2\ldots+s_{n+1} \leqq p$. On voit aisément que la somme de cette série est égale à

$$\sum_{s=0}^{s=p} \frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{1.2.3\ldots n} \varphi(x+s).$$

On aura donc, pour toute valeur positive de η,

$$\sum \varphi(x+\Omega) e^{-\eta(x+\Omega)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{1.2\ldots n} \varphi(x+s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)},$$

car dans une série absolument convergente on peut ranger les termes dans tel ordre que l'on veut. De plus on a, dans le cas actuel,

$$\mathrm{B}_n^{(n+1)}(x) = (x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-n\omega).$$

La fonction $\mathrm{F}_{n+1}(x|\omega)$ est donc égale à la limite, pour $\eta \to 0$, de

---

[1] Il va sans dire qu'en général cette réduction n'a plus lieu quand les ω sont différents l'un de l'autre.

l'expression suivante :

$$\frac{1}{n!}\int_a^\infty (x-z-\omega)(x-z-2\omega)\ldots(x-z-n\omega)\varphi(z)e^{-\eta z}dz$$
$$+(-1)^{n+1}\omega^{n+1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{n!}\varphi(x+s\omega)e^{-\eta(x+s\omega)}.$$

Mais cette limite est une somme de premier ordre. On aura donc

$$(18)\qquad \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z)\overset{n+1}{\underset{\omega}{\Delta}} z$$
$$=\frac{1}{n!}\mathop{\mathrm{S}}_a^x (x-z-\omega)(x-z-2\omega)\ldots(x-z-n\omega)\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta} z.$$

C'est la formule que j'avais en vue. De même, la somme de première espèce et d'ordre $n+1$ est par définition égale à la limite, pour $\eta\to 0$, de l'expression

$$(19)\qquad 2^{n+1}\sum(-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_{n+1}}\varphi(x+\Omega)e^{-\eta(x+\Omega)}.$$

En réduisant cette série multiple à une série à entrée simple, on trouvera

$$\mathop{\mathrm{S}}\varphi(x)\overset{n+1}{\underset{\omega}{\nabla}} x=2^{n+1}\lim_{\eta\to 0}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(s+n)!}{s!\,n!}\varphi(x+s\omega)e^{-\eta(x+s\omega)},$$

mais cette équation peut s'écrire comme il suit :

$$(20)\quad \mathop{\mathrm{S}}\varphi(x)\overset{n+1}{\underset{\omega}{\nabla}} x$$
$$=\left(\frac{2}{\omega}\right)^n\frac{1}{n!}\lim_{z\to x}\mathop{\mathrm{S}}(x-z+\omega)(x-z+2\omega)\ldots(x-z+n\omega)\varphi(x)\underset{\omega}{\nabla} x.$$

En remarquant qu'une factorielle se développe de la manière suivante :

$$(x-z+1)(x-z+2)\ldots(x-z+n)$$
$$=\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^{n-s}\binom{n}{s}(x+1)(x+2)\ldots(x+s)z(z-1)\ldots(z-n+s+1).$$

on trouvera enfin

$$\mathbf{S}\,\varphi(x)\,\overset{n+1}{\underset{\omega}{\nabla}}\,x$$
$$=\left(\frac{2}{\omega}\right)^n\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\binom{n}{s}x(x-\omega)\ldots[x-(n-s-1)\omega]\,G_{1,s}(x\mid\omega),$$

où l'on a posé

$$G_{1,s}(x\mid\omega)=\mathbf{S}\,(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+s\omega)\varphi(x)\,\underset{\omega}{\nabla}x.$$

Une somme d'ordre quelconque s'exprime donc linéairement par un nombre fini de sommes de premier ordre.

Sommation par parties.

5. On connaît le rôle que joue le procédé d'intégration par parties dans diverses questions d'analyse. Je vais montrer que, dans le calcul aux différences finies, on peut avec avantage se servir d'un procédé analogue que j'appelle *la sommation par parties*, et je vais en tirer divers développements remarquables. Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions qui sont holomorphes dans un certain demi-plan $\mathcal{R}(x)\geqq b$, et qui y restent, en valeur absolue, plus petites que

$$Ce^{(k+\varepsilon)|x|},$$

C et k étant des nombres positifs. Soit ω un nombre positif et plus petit que $\frac{\pi}{2k}$. Admettons, dans ce qui suit, que x reste dans le demi-plan susdit. On a, évidemment,

$$(21)\qquad \underset{\omega}{\nabla}[\varphi(x)\psi(x)]=\psi(x)\underset{\omega}{\nabla}\varphi(x)+\frac{\omega}{2}\varphi(x+\omega)\underset{\omega}{\Delta}\psi(x).$$

Par conséquent,

$$\underset{\omega}{\nabla}\left[\overset{n-s-1}{\underset{\omega}{\nabla}}\varphi(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)\right]$$
$$=\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)\overset{n-s}{\underset{\omega}{\nabla}}\varphi(x+s\omega)+\frac{\omega}{2}\overset{n-s-1}{\underset{\omega}{\nabla}}\varphi[x+(s+1)\omega]\overset{s+1}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x).$$

Multiplions cette égalité par $(-1)^s\left(\frac{\omega}{2}\right)^s$ et donnons à s les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$. En ajoutant les égalités ainsi obtenues, il vient

$$\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s \underset{\omega}{\Gamma}\left[\underset{\omega}{\Gamma}^{n-s-1}\varphi(x+s\omega)\underset{\omega}{\Delta}^{s}\psi(x)\right]\left(\frac{\omega}{2}\right)^s$$
$$=\psi(x)\underset{\omega}{\Gamma}^{n}\varphi(x)-(-1)^n\left(\frac{\omega}{2}\right)^n\varphi(x+n\omega)\underset{\omega}{\Delta}^{n}\psi(x).$$

Remarquons qu'on aura (A, p. 85, p. 171),

$$\mathbf{S}\left(\underset{\omega}{\Gamma}\psi(x)\right)\underset{\omega}{\Gamma}x=\varphi(x)$$

et formons la somme des deux membres de l'égalité que nous venons de trouver. On obtient

$$(22)\qquad \sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\left(\frac{\omega}{2}\right)^s\underset{\omega}{\Gamma}^{n-s-1}\varphi(x+s\omega)\underset{\omega}{\Delta}\psi(x)$$
$$=\mathbf{S}\,\psi(x)\underset{\omega}{\Gamma}^{n}\varphi(x)\underset{\omega}{\Gamma}x-(-1)^n\left(\frac{\omega}{2}\right)^n\mathbf{S}\,\varphi(x+n\omega)\underset{\omega}{\Delta}^{n}\psi(x)\underset{\omega}{\Gamma}x.$$

Le calcul de la somme

$$\mathbf{S}\left(\psi(x)\underset{\omega}{\Gamma}^{n}\varphi(x)\right)\underset{\omega}{\Gamma}x$$

est ainsi ramené au calcul de la somme

$$\mathbf{S}\left(\varphi(x+n\omega)\underset{\omega}{\Delta}^{n}\psi(x)\right)\underset{\omega}{\Gamma}x,$$

qui peut être plus facile. Soit par exemple à calculer la somme $\mathbf{S}\,\Psi(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Gamma x$, où $\Psi(x)$ désigne la dérivée logarithmique de la fonction $\Gamma(x)$. En posant $\psi(x)=\Psi(x)$, $\varphi(x)=x-1$ et $n=1$, on trouvera

$$\mathbf{S}\,\Psi(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Gamma x=(x-1)\Psi(x)-\frac{1}{2}\mathbf{S}\,\Gamma x$$
$$=(x-1)\Psi(x)-\frac{1}{2}.$$

Posons

$$G_n(x) = \mathop{\mathrm{S}}\varphi(x) \overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}} x$$

et remplaçons dans l'équation (22) la fonction $\varphi(x)$ par la fonction $G_n(x)$. Il vient

$$(23) \quad \mathop{\mathrm{S}}\varphi(x)\psi(x) \underset{\omega}{\nabla} x = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s G_{s+1}(x + s\omega) \overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}} \psi(x)$$
$$+ (-1)^n \left(\frac{\omega}{2}\right)^n \mathop{\mathrm{S}} G_n(x + n\omega) \overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}} \psi(x) \underset{\omega}{\nabla} x.$$

Cette formule s'applique en particulier quand la fonction $\psi(x)$ est un polynome, car en prenant n suffisamment grand la somme au second membre s'annule. Si l'on pose $\varphi(x) = 1$, il vient

$$(24) \quad \mathop{\mathrm{S}}\psi(x) \underset{\omega}{\nabla} x = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}} \psi(x) + \left(-\frac{\omega}{2}\right)^n \mathop{\mathrm{S}} \overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}} \psi(x) \underset{\omega}{\nabla} x.$$

Si l'on fait tendre n vers l'infini ce développement converge pourvu que ω soit suffisamment petit.

En faisant $\varphi(x) = a^x$ et $\omega = 1$, on aura

$$G_n(x) = a^x \left(\frac{2}{1+a}\right)^n.$$

Par conséquent,

$$\mathop{\mathrm{S}} a^x \psi(x) \nabla x = \frac{2a^x}{1+a} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \left(\frac{a}{1+a}\right)^s \overset{s}{\Delta} \psi(x)$$
$$+ (-1)^n \left(\frac{a}{1+a}\right)^n \mathop{\mathrm{S}} a^x \Delta^n \psi(x) \nabla x.$$

Soit par exemple $\psi(x) = \frac{1}{x}$; il vient

$$\mathop{\mathrm{S}} \frac{a^x}{x} \nabla x = 2a^{x-1} \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{a}{1+a}\right)^s \frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}.$$

Si a est positif, ce développement converge dans tout le plan des x en exceptant les points $x = 0, -1, -2, \ldots$.

6. En partant de l'identité

$$\underset{\omega}{\nabla}[\varphi(x)\psi(x)] = \psi(x+\omega)\underset{\omega}{\nabla}\varphi(x) - \frac{\omega}{2}\varphi(x)\underset{\omega}{\Delta}\psi(x)$$

on démontre de même la relation

$$(25)\qquad \mathbf{S}\varphi(x)\psi(x)\underset{\omega}{\nabla}x = \sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)^s G_{s+1}(x)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi[x-(s+1)\omega]$$
$$+\left(\frac{\omega}{2}\right)^n \mathbf{S}\, G_n(x)\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x-n\omega)\underset{\omega}{\nabla}x.$$

Cette relation se réduit à l'équation (20) si l'on fait

$$\psi(x) = (x-z+\omega)(x-z+2\omega)\ldots[x-z+(n-1)\omega]$$

et si l'on pose $z = x$. Si $\varphi(x) = 1$, il vient

$$(26)\qquad \mathbf{S}\psi(x)\underset{\omega}{\nabla}x = \sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)^s \overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi[x-(s+1)\omega] + \left(\frac{\omega}{2}\right)^n \mathbf{S}\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x-n\omega)\underset{\omega}{\nabla}x.$$

7. On peut étendre ces résultats à des sommes d'ordre quelconque. On aura par exemple le développement suivant :

$$(27)\qquad \mathbf{S}\varphi(x)\psi(x)\overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}}x$$
$$= \sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\left(\frac{\omega}{2}\right)^s\frac{n(n+1)\ldots(n+s-1)}{s!}G_{s+n}(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x) + R_m^{(n)},$$

où

$$R_m^{(n)} = (-1)^m\left(\frac{\omega}{2}\right)^m\sum_{s=0}^{n-1}\frac{m(m+1)\ldots(m+s-1)}{s!}\mathbf{S}\, G_{s+m}(x+m\omega)\overset{m}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)\overset{n-s}{\underset{\omega}{\nabla}}x.$$

En effet, pour $n = 1$, cette équation se réduit à l'équation (23), et par voie d'induction on démontre aisément qu'elle est vraie pour toute valeur entière et positive de n. De l'équation (21) on déduit de

même

$$\overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}}[\varphi(x)\psi(x)] = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-s}\overset{n-s}{\underset{\omega}{\nabla}}\varphi(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x).$$

On peut dire que l'équation (27) donne l'extension de cette équation au cas où n est un entier négatif. Et l'on peut aller plus loin et donner à n des valeurs réelles quelconques. Cette extension conduit à des résultats assez remarquables; elle est analogue à l'extension qu'ont faite Liouville et Riemann de la notion de dérivée, mais nous n'examinerons pas ce point ici.

Si l'on fait $\psi(x) = x$ dans l'équation (27), on retrouve la relation de récurrence (16). Cette relation est ainsi démontrée de nouveau, mais avec une autre hypothèse relative à la fonction $\varphi(x)$.

Remarquons enfin qu'en posant $\varphi(x) = 1$, on trouve le développement remarquable

$$(28)\quad \mathbf{S}\,\psi(x)\overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}}x = \sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\left(\frac{\omega}{2}\right)^s\frac{n(n+1)\ldots(n+s-1)}{s!}\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x) + R_m^{(n)}(x)$$

avec le reste

$$(29)\qquad R_m^{(n)}(x) = (-1)^m\left(\frac{\omega}{2}\right)^m\sum_{s=0}^{n-1}\binom{m+s-1}{s}\mathbf{S}\overset{m}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)\overset{n-s}{\underset{\omega}{\nabla}}x.$$

8. Passons aux sommes de seconde espèce et rappelons d'abord qu'on a (A, p. 85)

$$\overset{x}{\underset{a}{\mathbf{S}}}\underset{\omega}{\Delta}\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta}z = \varphi(x) - \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega}\varphi(x)\,dx.$$

La différence d'un produit peut s'écrire

$$\underset{\omega}{\Delta}[\varphi(x)\psi(x)] = \varphi(x+\omega)\underset{\omega}{\Delta}\psi(x) + \psi(x)\underset{\omega}{\Delta}\varphi(x).$$

Posons comme plus haut

$$F_n(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathbf{S}}}\varphi(z)\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}}z.$$

On aura

$$\underset{\omega}{\Delta} F_n(x) = F_{n-1}(x), \qquad \underset{\omega}{\Delta} F_1(x) = \varphi(x).$$

Par conséquent,

$$\underset{\omega}{\Delta}\left[F_{s+1}(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)\right] = F_{s+1}[x+(s+1)\omega]\overset{s+1}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)$$
$$+ F_s(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x).$$

Faisons successivement $s = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ et ajoutons. Il vient

$$\underset{\omega}{\Delta}\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s F_{s+1}(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x) = \varphi(x)\psi(x)$$
$$-(-1)^m F_m(x+m\omega)\overset{m}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x).$$

En formant la somme des deux membres de cette équation, on trouvera

$$(30)\qquad \underset{a}{\overset{x}{\mathrm{S}}}\varphi(z)\psi(z)\underset{\omega}{\Delta}z = \sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s F_{s+1}(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)$$
$$+(-1)^m\underset{a}{\overset{x}{\mathrm{S}}}F_m(z+m\omega)\overset{m}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(z)\underset{\omega}{\Delta}z - C.$$

C désignant une constante qui est égale à

$$(31)\qquad C = \frac{1}{\omega}\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\int_a^{a+\omega}F_{s+1}(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)\,dx.$$

Faisons $m = 1$, il vient [1]

$$(32)\qquad \underset{a}{\overset{x}{\mathrm{S}}}\varphi(z)\psi(z)\underset{\omega}{\Delta}z$$
$$= F_1(x)\psi(x) - \underset{a}{\overset{x}{\mathrm{S}}}F_1(z+\omega)\underset{\omega}{\Delta}\psi(z)\underset{\omega}{\Delta}z - \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega}F_1(x)\psi(x)\,dx.$$

[1] Quand ω tend vers zéro, la formule (32) se réduira à la formule d'intégration par parties.

Soit, par exemple, à calculer la somme $\mathop{\mathrm{S}}\limits_{1}^{x} \Psi(z) \frac{\Delta z}{z}$, où $\Psi(z)$ désigne la dérivée de $\log \Gamma(z)$. En faisant $\psi(z) = \Psi(z)$, $\varphi(z) = \frac{1}{z}$ et $\omega = 1$, on trouvera

$$\mathop{\mathrm{S}}\limits_{1}^{x} \Psi(z) \frac{\Delta z}{z} = [\Psi(x)]^2 - \mathop{\mathrm{S}}\limits_{1}^{x} \Psi(z+1) \frac{\Delta z}{z} - \int_1^2 [\Psi(x)]^2 \, dx.$$

Par conséquent,

$$2 \mathop{\mathrm{S}}\limits_{1}^{x} \Psi(z) \frac{\Delta z}{z} = [\Psi(x)]^2 + \Psi'(x) - 1 - \int_1^2 [\Psi(x)]^2 \, dx.$$

Dans le cas où $\psi(z)$ est un polynome dont le degré est plus petit que m, le second terme au second membre de l'équation (30) s'annule parce que $\Delta^m \psi(z) = 0$. La constante C sera aussi égale à zéro; on le vérifie aisément en tenant compte de l'équation

$$\psi(z) = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(z-x)(z-x-\omega)\ldots[z-x-(s-1)\omega]}{s!} \mathop{\Delta}\limits_{\omega}^{s} \psi(x).$$

On aura donc

$$\mathop{\mathrm{S}}\limits_{a}^{x} \varphi(z) \psi(z) \mathop{\Delta}\limits_{\omega} z = \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \mathrm{F}_{s+1}(x + s\omega) \mathop{\Delta}\limits_{\omega}^{s} \psi(x).$$

Transformation d'Euler.

9. L'équation (28) peut s'étendre au cas où les ω_i sont des nombres positifs quelconques. Admettons que

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) e^{-\varepsilon x} = 0,$$

quelque petit que soit le nombre positif ε. Euler a fait remarquer que l'on a la relation suivante :

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \rho^s \varphi(x + s\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\rho^s \omega^s}{(1+\rho)^{s+1}} \mathop{\Delta}\limits_{\omega}^{s} \varphi(x).$$

Cette équation est vraie pour toute valeur de ρ dans l'intervalle $0 < \rho < 1$. Soient maintenant $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ des nombres positifs et plus petits que 1. En appliquant n fois de suite la transformation d'Euler, on trouve

$$\sum (-1)^{s_1+s_2\ldots+s_n} \rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\ldots\rho_n^{s_n}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2\ldots+s_n\omega_n)$$
$$=\sum (-1)^{s_1+s_2\ldots+s_n} \frac{\rho_1^{s_1}\omega_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\omega_2^{s_2}\ldots\rho_n^{s_n}\omega_n^{s_n}}{(1+\rho_1)^{s_1+1}(1+\rho_2)^{s_2+1}\ldots(1+\rho_n)^{s_n+1}} \underset{\omega_1^{s_1}\omega_2^{s_2}\cdots\omega_n^{s_n}}{\overset{s_1+s_2\ldots+s_n}{\Delta}} \varphi(x),$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières non négatives de $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Posons

$$\rho_i = e^{-\eta\omega_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

et faisons tendre le nombre positif η vers zéro. Il vient

$$(33) \quad \mathfrak{S}\varphi(x) \underset{\omega_1\ldots\omega_n}{\overset{n}{\nabla}} x$$
$$=\sum (-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_n} \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{\omega_2}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{s_n} \underset{\omega_1^{s_1}\cdots\omega_n^{s_n}}{\overset{s_1+s_2+\ldots+s_n}{\Delta}} \varphi(x),$$

pourvu que la série au second membre converge. *La limite*

$$\mathfrak{S}\varphi(x)\overset{n}{\nabla} x$$

existe donc toujours quand cette série converge.

Soit en particulier $\varphi(x) = x^\nu$, ν étant un entier positif. La série se réduit à un nombre fini de termes et l'on trouve

$$E_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \sum (-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_n}\left(\frac{\omega_1}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{\omega_2}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{s_n} \underset{\omega_1^{s_1}\cdots\omega_n^{s_n}}{\overset{s_1+s_2+\ldots+s_n}{\Delta}} x^\nu,$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières non négatives de $s_1, s_2, \ldots, s_n$ qui vérifient l'inégalité $s_1+s_2+\ldots+s_n \leq \nu$.

On peut trouver une expression bien simple du terme complémentaire de la série (33). Pour abréger l'écriture, nous faisons $n=2$. Considérons donc la série

$$\sum_{s_2=0}^{\infty}\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2}\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2),$$

où $0 < \rho_1 < 1$ et $0 < \rho_2 < 1$. En multipliant et divisant cette série par $(1+\rho_1)(1+\rho_2)$, on voit qu'elle est égale à la somme des quatre expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(x)}{(1+\rho_1)(1+\rho_2)} &- \frac{\rho_1\omega_1}{1+\rho_1}\sum_{s_2=0}^{\infty}\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2}\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\underset{\omega_1}{\Delta}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2)\\
&- \frac{\rho_2\omega_2}{1+\rho_2}\sum_{s_2=0}^{\infty}\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2}\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\underset{\omega_2}{\Delta}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2)\\
&- \frac{\rho_1\omega_1\rho_2\omega_2}{(1+\rho_1)(1+\rho_2)}\sum_{s_2=0}^{\infty}\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2}\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\overset{2}{\underset{\omega_1\omega_2}{\Delta}}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2).
\end{aligned}$$

Soient p et q deux entiers positifs quelconques. En effectuant cette opération pq fois, on trouve la relation suivante :

$$\begin{aligned}
&\sum_{s_2=0}^{\infty}\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2}\rho_1^{s_2}\rho_2^{s_2}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2)\\
&=\sum_{s_2=0}^{q-1}\sum_{s_1=0}^{p-1}(-1)^{s_1+s_2}\frac{\rho_1^{s_1}\omega_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\omega_2^{s_2}}{(1+\rho_1)^{s_1+1}(1+\rho_2)^{s_2+1}}\underset{\omega_1^{s_1}\omega_2^{s_2}}{\overset{s_1+s_2}{\Delta}}\varphi(x)\\
&+(-1)^p\frac{\rho_1^p\omega_1^p}{(1+\rho_1)^p}\sum_{s_2=0}^{\infty}\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2}\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\underset{\omega_1^p}{\overset{p}{\Delta}}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2)\\
&+(-1)^q\frac{\rho_2^q\omega_2^q}{(1+\rho_2)^q}\sum_{s_2=0}^{\infty}\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2}\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\underset{\omega_2^q}{\overset{q}{\Delta}}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2)\\
&-(-1)^{p+q}\frac{\rho_1^p\omega_1^p\rho_2^q\omega_2^q}{(1+\rho_1)^p(1+\rho_2)^q}\sum_{s_2=0}^{\infty}\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2}\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\underset{\omega_1^p\omega_2^q}{\overset{p+q}{\Delta}}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2).
\end{aligned}$$

Posons maintenant

$$\rho_1 = e^{-\eta\omega_1}, \qquad \rho_2 = e^{-\eta\omega_2}$$

et faisons tendre η vers zéro. Il vient

$$\mathrm{S}\varphi(x)\overset{2}{\underset{\omega_1\omega_2}{\nabla}}x = \sum_{s_2=0}^{q-1}\sum_{s_1=0}^{p-1}(-1)^{s_1+s_2}\left(\frac{\omega_1}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{\omega_2}{2}\right)^{s_2}\underset{\omega_1^{s_1}\omega_2^{s_2}}{\overset{s_1+s_2}{\Delta}}\varphi(x) + \mathrm{S}\,\mathrm{R}_{p,q}(x)\overset{2}{\underset{\omega_1\omega_2}{\nabla}}x,$$

où

$$R_{p,q}(x) = (-1)^p \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^p \underset{\omega_1^p}{\overset{p}{\Delta}} \varphi(x)$$

$$+ (-1)^q \left(\frac{\omega_2}{2}\right)^q \underset{\omega_2^q}{\overset{q}{\Delta}} \varphi(x) - (-1)^{p+q} \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^p \left(\frac{\omega_2}{2}\right)^q \underset{\omega_1^p \omega_2^q}{\overset{p+q}{\Delta}} \varphi(x).$$

On en conclut en particulier que la limite

$$S \varphi(x) \underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\overset{n}{\nabla}} x$$

existe si la série

$$\sum (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} \overset{p}{\Delta} \varphi(x+\Omega) \tag{34}$$

converge quand la valeur de p surpasse un certain nombre.

Soit par exemple $\varphi(x) = \log x$. La série (34) converge si $p \geqq 1$ (B, § 6). L'expression

$$S \log x \underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\overset{n}{\nabla}} x$$

a donc un sens et l'on voit aisément que la série au second membre de l'équation (33) converge dans le cas actuel.

Sur les principes fondamentaux de la théorie des contacts dans l'Hypergéométrie réelle ou imaginaire et sur les familles complètes de figures intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre ;

Par Ch. RIQUIER,

Professeur à l'Université de Caen.

INTRODUCTION.

Le présent Travail, dont un bref résumé a été communiqué à l'Académie des Sciences [1], a pour objet la généralisation des notions classiques relatives aux intégrales complètes de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$. Il est divisé en deux parties ayant respectivement pour titres :

Première Partie. — *Principes fondamentaux de la Théorie hypergéométrique des contacts; figures enveloppes.* (Voir ci-dessous les alinéas I, II et III.)

Deuxième Partie. — *Systèmes complètement intégrables d'équations aux dérivées partielles du premier ordre; figures intégrales; familles complètes de figures intégrales; réduction des systèmes quelconques.* (Voir ci-dessous les alinéas IV, V, VI et VII.)

I. Dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$, nous nommerons *figure* un ensemble

[1] Voir les *Comptes rendus* des 27 juin et 2 novembre 1921.

de *points* défini par un système d'équations reliant les n *coordonnées*, réelles ou imaginaires, x, y, ...; point *ordinaire* d'une figure un point tel, que, dans un voisinage suffisamment rapproché du point, la figure puisse être définie à l'aide d'un système réduit d'équations normalement résolubles. Nous bornant à la considération exclusive de ce voisinage, et supposant tour à tour que le système réduit comprenne 1, 2, 3, ... équations, nous dirons, suivant le cas, que la figure est à $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... *dimensions*.

Deux systèmes réduits numériquement équivalents, et, par suite, nécessairement composés d'un même nombre d'équations, définissent deux figures identiques.

Si, désignant par p et p' deux entiers différents, on suppose que deux systèmes réduits, S et S', comprennent respectivement p et p' équations, et que le premier, S, soit une conséquence numérique du second, S', on a nécessairement $p < p'$, d'où $n-p > n-p'$, et la figure à $n-p'$ dimensions que définit S' sera dite *située sur* la figure à $n-p$ dimensions que définit S; inversement, la figure S sera dite *contenir* la figure S'.

Une figure à $n-p$ dimensions, définie par un système réduit de p équations, peut encore se représenter à l'aide d'un groupe de n formules égalant les n coordonnées x, y, ... à n fonctions analytiques et régulières de $n-p$ arbitraires, de telle façon que $n-p$ de ces formules, convenablement choisies, soient résolubles par rapport aux arbitraires : de ces deux modes de représentation, le premier sera qualifié de *réduit*, le second de *paramétrique*.

II. Considérons deux figures ayant un point commun, ordinaire pour chacune d'elles; désignons par $n-p$, $n-r$ leurs nombres respectifs de dimensions, et supposons $n-p > n-r$. Les deux figures étant, dans le voisinage de ce point initial, représentées, la première (celle à $n-p$ dimensions), suivant le mode réduit, par le système des p équations

$$f_1(x, y, \ldots) = 0, \qquad f_2(x, y, \ldots) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_p(x, y, \ldots) = 0,$$

la seconde (celle à $n-r$ dimensions), suivant le mode paramétrique,

à l'aide des n formules

$$x = \xi(s, t, \ldots), \qquad y = \eta(s, t, \ldots), \qquad \ldots,$$

les p fonctions composées

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_1[\xi(s, t, \ldots), \eta(s, t, \ldots), \ldots], \\ f_2[\xi(s, t, \ldots), \eta(s, t, \ldots), \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p[\xi(s, t, \ldots), \eta(s, t, \ldots), \ldots] \end{array} \right.$$

ont évidemment des valeurs initiales nulles. Cela posé, et en désignant par g un entier positif ou nul, si les fonctions (1) et toutes leurs dérivées (relatives aux $n - r$ paramètres $s, t, \ldots$) jusqu'à l'ordre g inclusivement ont des valeurs initiales nulles, sans que toutes celles d'ordre $g + 1$ jouissent à la fois de cette propriété, les deux figures seront dites avoir au point considéré un contact d'ordre g [1].

III. Soient $x, y, \ldots$ et $u, v, \ldots$ deux groupes de variables, en contenant respectivement h et k : si, dans l'espace à $h + k$ dimensions

$$[[x, y, \ldots, u, v, \ldots]],$$

deux figures à h dimensions contiennent l'une et l'autre une même figure à $h - q$ dimensions ($0 \leqq q \leqq h$), et si, en tout point de cette dernière, elles ont l'une avec l'autre un contact proprement dit (c'est-à-dire d'ordre supérieur à zéro), elles seront dites avoir l'une avec l'autre, suivant cette dernière, un *raccordement de genre* $h - q$.

Supposons actuellement qu'une famille, $\mathfrak{F}_h$, de figures à h dimen-

---

[1] Les deux figures peuvent, d'une infinité de manières, être représentées, la première suivant le mode réduit, la deuxième suivant le mode paramétrique; on peut d'ailleurs, dans l'hypothèse $p = r$, permuter leurs rôles respectifs, et supposer tour à tour que la première figure, puis la deuxième, soit celle que l'on représente suivant le mode réduit : or, le caractère formulé dans la définition est indépendant de ces diverses circonstances variables. Il l'est, en outre, de toute transformation ponctuelle opérée sur les coordonnées $x, y, \ldots$.

sions, dépendant des q paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_q$, soit définie à l'aide d'un système de k équations entre $x, y, \ldots, u, v, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q$ (et que ce système soit, comme de raison, résoluble par rapport à quelque groupe de k coordonnées, $u, v, \ldots$ par exemple). On peut se proposer de rechercher s'il existe quelque figure fixe à h dimensions avec laquelle chacune des figures $\mathfrak{F}_h$ présente un raccordement de genre $h - q$: ce problème, qui dépend d'un système de $k(q+1)$ équations finies à $k+q$ fonctions inconnues, n'est pas toujours possible; en supposant qu'il le soit, la figure fixe obtenue se nommera l'*enveloppe* des figures $\mathfrak{F}_h$.

IV. Supposons qu'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, impliquant les k fonctions inconnues $u, v, \ldots$ des h variables indépendantes $x, y, \ldots$, soit résolu par rapport à un groupe de dérivées (premières) de $u, v, \ldots$. Pour disposer nettement les équations d'un système de cette espèce, on peut les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables $x, y, \ldots$ et les colonnes aux inconnues $u, v, \ldots$, en mettant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x) : on obtient ainsi une sorte de damier où les cases pleines et vides peuvent offrir des dispositions relatives variées. Si, pour fixer les idées, on considère un système du premier ordre, S, impliquant les deux fonctions inconnues u, v des quatre variables indépendantes x, y, z, s, et résolu par rapport aux trois dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}$, le damier dont il s'agit contiendra trois cases pleines, correspondant à ces trois dérivées, et cinq cases vides, correspondant aux dérivées restantes $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial s}$; quant aux seconds membres du système, ils seront fonctions de ces dernières et de x, y, z, s, u, v.

	(u)	(v)
(x)	$\frac{\partial u}{\partial x} = \ldots$	
(y)	$\frac{\partial u}{\partial y} = \ldots$	
(z)		$\frac{\partial v}{\partial z} = \ldots$
(s)		

Cela posé, nous dirons qu'une figure à 4 dimensions, définie, dans l'espace à $4 + 2$ dimensions $[[x, y, z, s, u, v]]$, par un groupe réduit de deux équations finies, est une *figure intégrale* du système S, si ce groupe réduit est résoluble par rapport aux deux coordonnées u, v, et que, après résolution, il fournisse un groupe d'intégrales particulières de S. La figure intégrale sera dite *ordinaire*, si l'on peut assigner à (x, y, z, s) quelque domaine de variation tel, que non seulement les intégrales dont il s'agit y soient analytiques et régulières, mais que, de plus, leurs valeurs, prises conjointement avec celles de leurs dérivées premières et des variables x, y, z, s, restent toujours intérieures à quelque domaine où tous les seconds membres du système S soient eux-mêmes des fonctions analytiques et régulières.

Une figure intégrale non ordinaire sera dite *singulière*.

V. Supposons désormais que le système S soit *complètement intégrable;* que, d'ailleurs, il ne cesse pas de l'être lorsqu'on y considère les fonctions inconnues u, v comme dépendant, non seulement de x, y, z, s, mais encore d'autres variables, en nombre quelconque, qui ne figurent dans les équations du système, ni par elles-mêmes, ni par l'intermédiaire d'aucun symbole de dérivation. (C'est ce qui a lieu, par exemple, pour un système orthonome passif.) Ajoutons alors au

nombre des cases vides de son damier, figuré ci-dessus, celui des fonctions inconnues que le système implique, ce qui donne le total 7; puis, en même temps que le système S, considérons les deux relations

$$(2)\qquad \begin{cases} F(x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) = 0, \\ H(x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) = 0, \end{cases}$$

où figurent, avec x, y, z, s, u, v, les sept constantes arbitraires α, β, γ, δ, θ, λ, μ. Les relations (2) étant supposées résolubles par rapport à u, v, exécutons sur elles les diverses différentiations premières relatives à x, y, z, s, en traitant u, v comme des fonctions de x, y, z, s, α, β, γ, δ, θ, λ, μ; il vient ainsi

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial x} + \dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial y} + \dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial z} + \dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial s} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial s} = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial s} + \dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial s} = 0. \end{cases}$$

Cela étant, les relations (2) seront dites définir une famille *complète* de figures intégrales ordinaires du système S, si les deux conditions suivantes se trouvent à la fois satisfaites :

1° *En même temps que les relations* (2) *sont résolubles par rapport aux inconnues* u, v, *le système formé par les dix équations* (2) *et* (3) *est résoluble par rapport aux dix quantités* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, α, β, γ, δ, θ, λ, μ (c'est-à-dire par rapport aux sept constantes arbitraires et aux trois dérivées premières qui correspondent respectivement aux trois cases pleines du damier).

2° *Par l'attribution à* α, β, γ, δ, θ, λ, μ *de toutes valeurs numériques, les relations* (2) *donnent des figures intégrales ordinaires de* S.

VI. Soit S un système *complètement intégrable* (V) du *premier ordre*, où se trouvent engagées des fonctions inconnues en nombre k,

des variables indépendantes en nombre h, et dont le damier (IV) contient des cases vides, en nombre l, disposées d'une façon quelconque : toute famille complète (V) de figures intégrales ordinaires du système S dépend alors de $k+l$ constantes arbitraires ou paramètres. Soient p le plus petit des deux entiers h, l (d'où résulte $k+l-p \geqq k$), et j un entier auquel on attribuera tour à tour les $p+1$ valeurs vérifiant la double relation

$$k+l-p \leqq j \leqq k+l.$$

Cela posé, et *une famille complète de figures intégrales ordinaires du système* S *étant supposée connue, il suffit, pour avoir sans aucune figure étrangère toutes les figures intégrales ordinaires de ce système, d'effectuer de toutes les manières possibles l'opération consistant à remplacer, dans les relations qui définissent la famille, j des $k+l$ paramètres qui y figurent par autant de fonctions arbitraires des $k+l-j$ paramètres restants, et à prendre, lorsqu'elles existent, les enveloppes des sous-familles ainsi obtenues.*

L'entier j recevant tour à tour $p+1$ valeurs, on peut partager en $p+1$ groupes correspondants les figures intégrales ordinaires de S; *ces groupes n'ont deux à deux aucune figure commune.*

VII. Ce résultat une fois acquis, il était intéressant d'examiner si un système différentiel (non impossible) *de forme et d'ordre quelconques* est toujours réductible à un système complètement intégrable d'ordre 1 (les mots « complètement intégrable » étant pris dans le sens élargi que nous avons indiqué au début de l'alinéa V). De nos recherches antérieures il résultait déjà qu'on peut le ramener à une forme orthonome passive [1], laquelle est généralement d'ordre supérieur à 1 : or, on peut rigoureusement établir que celle-ci se ramène, à son tour, à une forme complètement intégrable d'ordre 1, où se trouvent engagées, en même temps que les inconnues du système primitif, quelques-unes de leurs dérivées à titre d'inconnues adjointes.

---

[1] *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Chap. XIV.

En conséquence, *la théorie des familles complètes de figures intégrales d'un système complètement intégrable du premier ordre trouve son application dans l'étude la plus générale des systèmes différentiels quelconques.*

PREMIÈRE PARTIE.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE HYPERGÉOMÉTRIQUE DES CONTACTS; FIGURES ENVELOPPES.

Théorème général des fonctions implicites et propositions s'y rattachant.

1. *Soient*

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ f_2(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0 \end{cases}$$

m équations simultanées entre les diverses variables

$$u, v, \ldots,$$
$$x, y, \ldots,$$

dont les premières, $u, v, \ldots$, sont en nombre m comme les équations. Supposons que les premiers membres $f_1, f_2, \ldots, f_m$ soient, à partir des valeurs particulières

$$(2)\qquad u_0, v_0, \ldots, x_0, y_0, \ldots$$

de $u, v, \ldots, x, y, \ldots$, tous développables en séries entières par rapport aux différences $u - u_0, v - v_0, \ldots, x - x_0, y - y_0, \ldots$, et qu'ils s'annulent pour les valeurs (2); supposons en outre que le déterminant différentiel des premiers membres par rapport aux m variables $u, v, \ldots$, ne s'annule pas pour ces mêmes valeurs.

Cela étant :

1° *Le système des m équations proposées (1) est identiquement vérifié par la substitution à $u, v, \ldots$ d'un certain groupe de fonc-*

tions de $x, y, \ldots$,

$$(3) \qquad \begin{cases} u = \upsilon(x, y, \ldots), \\ v = \varphi(x, y; \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

développables, à partir des valeurs $x_0, y_0, \ldots$, de $x, y, \ldots$, en séries entières par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$, et satisfaisant aux relations numériques

$$\begin{aligned} u_0 &= \upsilon(x_0, y_0, \ldots), \\ v_0 &= \varphi(x_0, y_0, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

2° *Le système* (1), *considéré dans un voisinage suffisamment rapproché des valeurs* (2), c'est-à-dire à l'intérieur d'un domaine ayant pour centre le point

$$(u_0, v_0, \ldots, \quad x_0, y_0, \ldots)$$

avec des rayons suffisamment petits [1], *équivaut numériquement au système* (3).

On trouvera la démonstration de ce principe aux numéros 118, 119 et 120 de l'Ouvrage intitulé *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*.

Lorsque le système (1) satisfait à l'ensemble des conditions qui y sont énoncées, nous dirons qu'il est résoluble par rapport aux variables $u, v, \ldots$ à partir des valeurs numériques (2), que nous qualifierons de *fondamentales*.

De la démonstration à laquelle nous renvoyons le lecteur il résulte que les dérivées de tous ordres des fonctions de $x, y, \ldots$ obtenues par cette résolution peuvent, par l'application répétée de l'algorithme de Cramer, s'exprimer à l'aide de $x, y, \ldots$ et des fonctions elles-mêmes.

2. *Désignant par μ un entier moindre que n, supposons :*

---

[1] Riquier, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 30.

1° *Que les* $\mu + 1$ *fonctions*

$$(4)\qquad \begin{cases} F_1(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ F_2(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_\mu(t_1, t_2, \ldots, t_n) \end{cases}$$

et

$$(5)\qquad F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

soient toutes développables (dans le sens indiqué au numéro précédent) *à partir de certaines valeurs numériques, considérées comme initiales, des n variables* $t_1, t_2, \ldots, t_n$;

2° *Que l'un au moins des déterminants différentiels des* μ *fonctions* (4) *ait une valeur initiale différente de zéro;*

3° *Que les déterminants différentiels des* $\mu + 1$ *fonctions* (4) *et* (5) *soient tous identiquement nuls.*

Cela étant, la fonction (5) *est composée des* μ *fonctions* (4) [1].

3. L'énoncé précédent suppose $\mu < n$; dans le cas où $\mu = n$, il doit être remplacé par le suivant :

Si n fonctions de n variables sont développables à partir de certaines valeurs numériques, considérées comme initiales, des variables dont il s'agit, et que leur déterminant différentiel ait une valeur initiale différente de zéro, toute autre fonction développable à partir des mêmes valeurs initiales est composée des n premières [2].

Systèmes réduits d'équations finies olotropes.

4. Dans l'exposé du principe général, formulé plus haut (n° **1**), des fonctions implicites, on fait, comme nous l'avons vu, figurer au nombre des hypothèses l'existence d'une solution numérique à partir de laquelle les premiers membres du système étudié (les seconds

---

[1] *Loc. cit.*, n° **124**.

[2] *Ibid.*, n° **125**.

membres étant nuls) soient développables en séries entières par rapport aux accroissements de leurs variables, et les conclusions de l'énoncé ne se trouvent établies que dans un voisinage suffisamment rapproché de cette solution numérique fondamentale. Une observation de ce genre sera, dans ce qui suit, constamment applicable; toutes les fois, par exemple, qu'il s'agira d'équivalence numérique entre deux systèmes d'équations finies olotropes, il faudra entendre que cette propriété, soit qu'on en pose l'existence à titre d'hypothèse, soit qu'il s'agisse, au contraire, de l'établir à titre de conclusion, a lieu dans le voisinage d'une solution numérique commune à partir de laquelle les premiers membres des équations considérées sont tous développables de la manière qui vient d'être indiquée.

Cette observation générale étant faite une fois pour toutes, considérons, entre des indéterminées, u, v, ..., en nombre quelconque, un système d'équations dont les premiers membres soient développables à partir des valeurs particulières u_0, v_0, ... de ces indéterminées : nous dirons que le système, considéré dans le voisinage des valeurs en question, est *réduit*, si l'on peut, conformément au principe général des fonctions implicites, le résoudre à partir de u_0, v_0, ... par rapport à un groupe d'indéterminées en nombre égal à celui des équations du système.

Cette définition implique d'elle-même : 1° que $(u_0, v_0, \ldots)$ est une solution numérique du système (celle que nous qualifions de *fondamentale*); 2° que le nombre total des indéterminées est au moins égal à celui des équations du système; 3° que l'un au moins des déterminants différentiels du système a une valeur fondamentale différente de zéro.

Les systèmes réduits jouissent d'intéressantes propriétés, dont nous rappelons ci-après les principales.

5. *Tout système réduit*, S′, *conséquence numérique d'un système réduit*, S, *se compose d'équations en nombre inférieur ou au plus égal* (¹).

(¹) *Loc. cit.*, n° 129.

6. *Lorsque deux systèmes réduits sont numériquement équivalents :*

1° *Ils comprennent un même nombre, m, d'équations* (1);

2° *Ils sont résolubles par rapport aux mêmes groupes de m variables* (2);

3° *Si on les résout par rapport à un même groupe de m variables, les formules de résolution obtenues de part et d'autre ont leurs seconds membres respectivement identiques* (3).

7. *Étant donné un système réduit composé des m équations*

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_m = 0,$$

l'expression générale des systèmes réduits équivalents est

$$\begin{aligned} &L_{1,1}\, F_1 + L_{1,2}\, F_2 + \ldots + L_{1,m}\, F_m = 0, \\ &L_{2,1}\, F_1 + L_{2,2}\, F_2 + \ldots + L_{2,m}\, F_m = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &L_{m,1}\, F_1 + L_{m,2}\, F_2 + \ldots + L_{m,m}\, F_m = 0, \end{aligned}$$

où les fonctions L, *développables à partir des valeurs fondamentales des variables, sont arbitrairement choisies sous la seule restriction de former un déterminant à valeur fondamentale non nulle* (4).

8. *Si deux systèmes réduits comprennent le même nombre d'équations, et que le second soit conséquence numérique du premier, inversement, le premier est conséquence numérique du second, et les deux systèmes sont numériquement équivalents* (5).

9. *Étant donné un système réduit, S, composé des m équations*

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_m = 0,$$

---

(1) *Loc. cit.*, n° 130.

(2) *Ibid.*, n° 133.

(3) Cette dernière partie de l'énoncé est évidente.

(4) *Loc. cit.*, n° 132.

(5) *Ibid.*, n° 131.

les systèmes réduits de $m-p$ équations qui jouissent de la propriété d'être conséquences numériques de S (n° 5) *ont pour expression générale*

$$\begin{array}{l} L_{1,1}\quad F_1 + L_{1,2}\quad F_2 + \ldots + L_{1,m}\quad F_m = 0, \\ L_{2,1}\quad F_1 + L_{2,2}\quad F_2 + \ldots + L_{2,m}\quad F_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_{m-p,1} F_1 + L_{m-p,2} F_2 + \ldots + L_{m-p,m} F_m = 0, \end{array}$$

où les fonctions L, *développables à partir des valeurs fondamentales des variables, sont arbitrairement choisies sous la seule restriction que les déterminants d'ordre $m-p$ extraits de leur Tableau n'aient pas tous des valeurs fondamentales nulles* (1).

10. *Étant donné un système réduit composé de $m-p$ équations, et où se trouvent engagées m variables au moins, considérons :*

D'une part, les divers systèmes réduits de m équations qui ont pour conséquence numérique le proposé;

D'autre part, les divers systèmes réduits de m équations qu'il est possible d'obtenir par l'adjonction de p équations convenablement choisies aux $m-p$ équations du proposé (2).

Cela étant, tout système du second groupe figure aussi dans le premier; inversement, tout système du premier groupe possède dans le second quelque équivalent numérique (3).

11. *Considérons deux systèmes réduits,* S *et* S′, *composés respectivement de m et de $m-p$ équations, et dont le second soit conséquence numérique du premier* (n° 5).

---

(1) *Loc. cit.*, n° 134.

(2) Si l'on désigne par $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, ..., $F_{m-p} = 0$ les $m-p$ équations du système proposé, et par $F_{m-p+1} = 0$, ..., $F_m = 0$ les p équations à leur adjoindre, ces dernières peuvent être choisies sous les seules conditions : 1° que leurs premiers membres, F_{m-p+1}, ..., F_m, développables à partir des valeurs fondamentales des variables, aient des valeurs fondamentales nulles; 2° que les divers déterminants différentiels des m fonctions F_1, F_2, ..., F_{m-p}, F_{m-p+1}, ..., F_m n'aient pas tous des valeurs fondamentales nulles.

(3) *Loc. cit.*, n° 136.

Si le système S *est résoluble par rapport à un groupe déterminé de* m *variables, le système* S′ *l'est nécessairement par rapport à quelque groupe de* $m - p$ *variables extrait du précédent* (¹).

Inversement, si le système S′ *est résoluble par rapport à un groupe déterminé de* $m - p$ *variables, il existe dans le système* S *quelque groupe de* $m - p$ *équations résoluble par rapport aux variables dont il s'agit, et l'on peut, par l'adjonction à ces* $m - p$ *variables de* p *autres convenablement choisies, former un groupe de* m *variables par rapport auquel le système* S *soit résoluble* (²).

12. *Supposons qu'un système réduit de* $h + k$ *équations,*

$$(1) \qquad F_1 = 0, \quad \ldots, \quad F_h = 0, \quad F_{h+1} = 0, \quad \ldots, \quad F_{h+k} = 0,$$

soit résoluble par rapport à un groupe déterminé de $h + k$ *variables,*

$$(2) \qquad u_1, \quad \ldots, \quad u_h, \quad u_{h+1}, \quad \ldots, \quad u_{h+k};$$

supposons en même temps qu'un groupe déterminé de h équations extrait de (1) soit résoluble par rapport à un groupe déterminé de h variables extrait de (2), par exemple, *que le groupe des* h *premières équations* (1),

$$(3) \qquad F_1 = 0, \quad \ldots, \quad F_h = 0,$$

soit résoluble par rapport aux h *premières variables* (2),

$$u_1, \quad \ldots, \quad u_h.$$

Cela étant : 1° *Si des* h *premières équations* (1) *on tire les valeurs de* $u_1, \ldots, u_h$ *et qu'on les porte dans les* k *dernières,*

$$F_{h+1} = 0, \quad \ldots, \quad F_{h+k} = 0,$$

le système des k *équations résultantes est nécessairement résoluble par rapport aux* k *variables*

$$u_{h+1}, \quad \ldots, \quad u_{h+k}.$$

(¹) *Loc. cit.*, n° 135.

(²) *Ibid.*, n° 137.

2° *Pour obtenir les formules de résolution correspondantes, il suffit de résoudre le système* (1) *par rapport aux* $h+k$ *variables* (2), *et de retenir les* k *dernières des* $h+k$ *formules de résolution* [1].

---

[1] Résolvons, comme le dit l'énoncé ci-dessus, les h équations (3) par rapport à $u_1, \ldots, u_h$, et soient

$$(4)\qquad \begin{cases} u_1 = v_1(u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_h = v_h(u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}, \ldots) \end{cases}$$

les h formules de résolution : la substitution à $u_1, \ldots, u_h$ des fonctions $v_1, \ldots, v_h$ dans les k dernières équations (1) transforme celles-ci en un groupe de k équations,

$$(5)\qquad \begin{cases} \Phi_{h+1}(u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_{h+k}(u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}, \ldots) = 0, \end{cases}$$

numériquement vérifiées pour les valeurs fondamentales des variables qui y figurent, et ayant leurs premiers membres développables à partir de ces valeurs. Il s'agit de prouver tout d'abord que le système (5) possède, par rapport aux k variables $u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}$, un déterminant à valeur fondamentale non nulle.

Or, si, ayant égard au sens des notations $\Phi_{h+1}, \ldots, \Phi_{h+k}$, ci-dessus définies, on se reporte, dans l'Ouvrage déjà cité, à l'alinéa II du n° **120**, on a les identités

$$\begin{aligned} F_{h+1} &= (u_1 - v_1)\lambda_{h+1,1} + \ldots + (u_h - v_h)\lambda_{h+1,h} + \Phi_{h+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{h+k} &= (u_1 - v_1)\lambda_{h+k,1} + \ldots + (u_h - v_h)\lambda_{h+k,h} + \Phi_{h+k}, \end{aligned}$$

où les fonctions λ sont développables à partir des valeurs fondamentales des variables u. On a, d'autre part, à cause de l'équivalence des systèmes réduits (3) et (4) (n° **1**),

$$\begin{aligned} u_1 - v_1 &= \mu_{1,1} F_1 + \ldots + \mu_{1,h} F_h, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_h - v_h &= \mu_{h,1} F_1 + \ldots + \mu_{h,h} F_h, \end{aligned}$$

où les μ jouissent de la même propriété que les λ (n° **7**). Il en résulte, évidemment,

$$\begin{aligned} \Phi_{h+1} &= \omega_{h+1,1} F_1 + \ldots + \omega_{h+1,h} F_h + F_{h+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_{h+k} &= \omega_{h+k,1} F_1 + \ldots + \omega_{h+k,h} F_h + F_{h+k}, \end{aligned}$$

où les ω jouissent de la même propriété que les λ et les μ. Par ces dernières identités, on voit que le système des $h+k$ équations (3) et (5) se déduit du

13. *L'élimination d'un groupe de variables entre les équations d'un système réduit donne un système également réduit* ([1]).

---

système (1) à l'aide de multiplicateurs dont le déterminant a pour valeur l'unité : il est donc en même temps que réduit, numériquement équivalent à (1) [n° **7**], et peut, par suite, être résolu, comme (1), par rapport au groupe des $h+k$ variables (2) (n° **6**). Il a dès lors, par rapport aux variables (2), un déterminant différentiel à valeur fondamentale non nulle, d'où résulte que le système (5), indépendant de $u_1, \ldots, u_h$, a lui-même par rapport à $u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}$, comme nous l'avions annoncé, un déterminant différentiel à valeur fondamentale non nulle.

Ainsi se trouve établie la première partie (1°) de notre énoncé.

Passons à la deuxième partie (2°).

Je dis que, pour opérer la résolution du système (1) par rapport aux variables (2), on peut procéder de la manière suivante : tirer des h premières équations (1) les valeurs de $u_1, \ldots, u_h$, les porter dans les k dernières, résoudre les k équations résultantes (5) par rapport aux k variables $u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}$, et substituer, finalement, les k expressions ainsi obtenues dans celles qui l'ont été précédemment pour $u_1, \ldots, u_h$.

Considérons en effet le système des $h+k$ formules

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \psi_1, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ u_h = \psi_h, \end{array} \right.$$

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_{h+1} = \psi_{h+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{h+k} = \psi_{h+k}, \end{array} \right.$$

auquel on parvient ainsi, et qui exprime les $h+k$ variables (2) à l'aide des variables suivantes : il est manifeste que ce système est réduit et qu'il est une conséquence numérique du système formé par les $h+k$ équations (1) : il lui équivaut donc numériquement (n° **8**), et dès lors il est identique (n° **6**) au système des $h+k$ formules que fournirait la résolution de (1), effectuée par rapport à ces mêmes variables (2).

Ainsi, le système [(6), (7)], obtenu par le mécanisme décrit plus haut, est bien celui des $h+k$ formules de résolution du système (1) par rapport aux variables (2) : les formules (7), provenant de la résolution du système (5) par rapport à $u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}$, peuvent donc s'obtenir en résolvant le système (1) par rapport aux variables (2) et retenant les k dernières des formules de résolution.

([1]) Si l'on considère un système réduit, (1), de $h+k$ équations, il résulte immédiatement de la théorie générale des déterminants que tout groupe de

14. *Étant donnés deux systèmes réduits numériquement équivalents, si, dans l'un de ces systèmes, on peut effectuer l'élimination d'un groupe déterminé de variables, on le peut également dans l'autre, et les deux systèmes réduits* (n° **13**) *obtenus de part et d'autre sont numériquement équivalents* (¹).

---

h équations extrait de (1) forme un système également réduit; considérons, par exemple, le groupe des h premières, et supposons, pour fixer les idées, qu'il soit résoluble par rapport à $u_1, \ldots, u_h$: je dis qu'en tirant de ces h équations les valeurs de $u_1, \ldots, u_h$ et les portant dans les k dernières, le système des k équations résultantes eet nécessairement réduit.

Effectivement, il résulte de la propriété formulée au n° **11** que l'on peut, par l'adjonction à $u_1, \ldots, u_h$ de k autres variables convenablement choisies, former un groupe de $h+k$ variables par rapport auquel le système (1) soit résoluble; puis, de la propriété formulée au n° **12**, que le système des k équations provenant de l'opération ci-dessus spécifiée est nécessairement réduit.

On en déduit la remarque suivante, constamment utilisée :

Étant donné un système réduit composé de $h+k$ équations, on peut, pour ainsi dire, en fragmenter la résolution. Si l'on prend en effet h quelconques des $h+k$ équations, et qu'on choisisse convenablement h variables, on pourra de ces h équations tirer les h variables dont il s'agit en fonctions des autres, puis porter les expressions ainsi obtenues dans les k équations restantes. La résolution de ces dernières, ainsi transformées, fournira alors k des variables restantes, dont il ne restera plus qu'à substituer les valeurs dans les expressions obtenues pour les h premières.

(¹) Soient S et S′ les deux systèmes réduits donnés, numériquement équivalents, et m le nombre d'équations dont ils se composent l'un et l'autre (n° **6**). Supposons que du système S on puisse éliminer un groupe déterminé, $\mathcal{G}_{m-p}$, de $m-p$ variables : on pourra alors (n° **11**), par l'adjonction à ces dernières de p autres convenablement choisies, dont nous désignerons le groupe par $\mathcal{G}_p$, former un groupe de m variables, $(\mathcal{G}_{m-p}, \mathcal{G}_p)$, par rapport auquel le système S soit résoluble. Par rapport à ce groupe $(\mathcal{G}_{m-p}, \mathcal{G}_p)$, le système S′, numériquement équivalent à S, sera, lui aussi, résoluble (n° **6**), et contiendra dès lors nécessairement quelque groupe de $m-p$ équations résoluble par rapport à $\mathcal{G}_{m-p}$: l'élimination des variables $\mathcal{G}_{m-p}$ est donc possible dans le système S′.

Je dis maintenant que si l'on effectue l'élimination des variables $\mathcal{G}_{m-p}$ tour à tour dans le système S et dans le système S′, les deux systèmes réduits (n° **13**) qui en résultent ne peuvent manquer d'être numériquement équivalents.

Effectivement, partageons le système S en deux groupes, s_{m-p}, s, dont le premier soit résoluble par rapport à $\mathcal{G}_{m-p}$; puis, de même, le système S′ en deux groupes, s'_{m-p}, s', dont le premier soit résoluble par rapport à $\mathcal{G}_{m-p}$; et

En particulier *si, dans un système réduit, on effectue de deux manières différentes l'élimination d'un même groupe déterminé de variables, les deux systèmes réduits obtenus de part et d'autre sont numériquement équivalents.*

15. *Dans un système réduit de m équations,*

$$(8) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0,$$

---

soient σ, σ' les deux systèmes auxquels conduit de part et d'autre l'élimination des variables $\mathcal{G}_{m-p}$: ces deux systèmes ne contiennent l'un et l'autre que les variables restantes. En vertu de notre hypothèse, les deux systèmes (s_{m-p}, s) et (s'_{m-p}, s') sont équivalents entre eux; ils sont d'ailleurs, comme nous allons l'établir, respectivement équivalents aux deux systèmes (s_{m-p}, σ) et (s'_{m-p}, σ'). Considérons, par exemple, le système (s_{m-p}, s) : il a manifestement pour conséquence numérique le système (s_{m-p}, σ); ces deux systèmes, composés d'un même nombre d'équations, sont d'ailleurs réduits, le premier par hypothèse, le second parce que s_{m-p} est résoluble par rapport aux variables $\mathcal{G}_{m-p}$, et que σ, où ne figurent que les variables restantes, est, en vertu du n° **13**, un système réduit; cela étant, il résulte du n° **8** que, inversement, (s_{m-p}, σ) a pour conséquence numérique (s_{m-p}, s), et que, dès lors, les deux systèmes sont numériquement équivalents. Semblablement, il y a équivalence numérique entre les deux systèmes (s'_{m-p}, s') et (s'_{m-p}, σ').

En résumé donc, si l'on considère les quatre systèmes

$$(s_{m-p}, s), \quad (s'_{m-p}, s'),$$
$$(s_{m-p}, \sigma), \quad (s'_{m-p}, \sigma'),$$

que nous représenterons, pour simplifier l'écriture, par

$$A, A',$$
$$B, B',$$

l'équivalence numérique existe : 1° entre A et A'; 2° entre A et B; 3° entre A' et B'. Elle existe donc aussi entre B et B'. Il est facile d'en déduire l'équivalence à démontrer, savoir celle entre σ et σ'.

Effectivement, toute solution numérique du système σ fournira, si on la complète à l'aide de s_{m-p}, une solution numérique du système (s_{m-p}, σ), et, par suite, du système équivalent (s'_{m-p}, σ'); la solution numérique considérée de σ vérifie donc σ' : on en conclut que σ' est une conséquence numérique de σ. Semblablement, σ est une conséquence numérique de σ'. Les deux systèmes sont donc numériquement équivalents.

aux $m+q$ variables

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{m+q},$$

la solution générale peut s'obtenir à l'aide d'un système de $m+q$ formules exprimant les variables dont il s'agit en fonctions olotropes de q arbitraires, et telles que q de ces formules (convenablement choisies) soient résolubles par rapport aux arbitraires.

De plus, si, le système réduit (8) *étant donné, on en suppose la solution générale exprimée à l'aide d'un système de $m+q$ formules satisfaisant à cette condition,*

$$(9) \qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 \quad = f_1(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m \quad = f_m(t_1, \ldots, t_q), \\ u_{m+1} = f_{m+1}(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+q} = f_{m+q}(t_1, \ldots, t_q), \end{array}\right.$$

il faut et il suffit, pour que le système (8) *soit résoluble par rapport à m variables u déterminées, les m premières par exemple, que les q dernières formules* (9) *soient résolubles par rapport aux q arbitraires t.*

Pour obtenir un système de $m+q$ formules remplissant la condition énoncée, on peut d'ailleurs procéder comme il suit :

En supposant, pour fixer les idées, que le système (8) soit résoluble par rapport à $u_1, \ldots, u_m$, on posera

$$(10) \qquad \left\{\begin{array}{l} u_{m+1} = f_{m+1}(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+q} = f_{m+q}(t_1, \ldots, t_q), \end{array}\right.$$

les seconds membres des q formules (10) étant arbitrairement choisis sous les seules conditions d'être développables à partir de certaines valeurs initiales des arbitraires $t_1, \ldots, t_q$, d'avoir pour valeurs initiales celles que possèdent, dans le système (8), les variables $u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}$, et enfin d'avoir un déterminant différentiel dont la valeur initiale ne soit pas nulle, de telle façon que le système (10) soit résoluble par rap-

port à $t_1, \ldots, t_q$. Les formules (10) étant posées, on résoudra le système (8) par rapport à $u_1, \ldots, u_m$.

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 = \upsilon_1(u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = \upsilon_m(u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}). \end{array}\right.$$

et, dans les seconds membres des formules de résolution (11), on remplacera $u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}$ par leurs valeurs tirées de (10), ce qui donnera

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 = \upsilon_1(f_{m+1}, \ldots, f_{m+q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = \upsilon_m(f_{m+1}, \ldots, f_{m+q}). \end{array}\right.$$

Finalement, on groupera en un seul système les $m+q$ relations (10) et (12) [1].

La proposition formulée au début du présent n° **15** doit être complétée par une double remarque :

1° *Si, le système réduit* (8) *étant donné, on en suppose la solution générale exprimée à l'aide des* $m+q$ *formules* (9), *dont* q *sont résolubles par rapport aux* q *arbitraires* $t_1, \ldots, t_q$, *et si, dans ces* $m+q$ *formules, on effectue un changement des arbitraires, les* $m+q$ *formules résultantes, dont* q *sont résolubles par rapport aux* q *nouvelles arbitraires, expriment encore la solution générale du système* (8) [2].

2° Réciproquement, *si, le système réduit* (8) *étant donné, on en suppose la solution générale exprimée, de deux manières différentes, à l'aide d'un système de* $m+q$ *formules dont* q *soient résolubles par*

---

[1] *Loc. cit.*, n° 138.

[2] Il faut, naturellement, supposer que les q formules définissant la transformation sont résolubles, conformément au principe général des fonctions implicites (n° **1**), tant par rapport aux q arbitraires anciennes que par rapport aux q nouvelles : en opérant leur résolution par rapport aux anciennes et transformant les $m+q$ formules (9), on déduit sans peine de la règle de multiplication des déterminants que si un groupe de q formules extrait de (9) est résoluble par rapport aux anciennes arbitraires, le groupe correspondant qui s'en déduit par

rapport aux q arbitraires qui y figurent, on peut toujours, par une transformation convenable des arbitraires, passer de l'un de ces deux groupes de formules à l'autre (¹).

---

la transformation le sera nécessairement par rapport aux nouvelles. D'ailleurs, pour les valeurs correspondantes des anciennes arbitraires et des nouvelles, les $m+q$ formules (9), d'une part, et leurs transformées, d'autre part, fournissent les mêmes valeurs des $m+q$ variables u : les formules transformées expriment donc la solution générale de (8), puisque, par hypothèse, les formules (9) jouissent elles-mêmes de cette propriété.

(¹) Supposons, pour fixer les idées, que le système (8) soit résoluble par rapport aux m premières des $m+q$ variables u qui s'y trouvent engagées, et soient

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 \quad = f_1(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m \quad = f_m(t_1, \ldots, t_q), \\ u_{m+1} = f_{m+1}(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+q} = f_{m+q}(t_1, \ldots, t_q); \end{array}\right.$$

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 \quad = g_1(s_1, \ldots, s_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m \quad = g_m(s_1, \ldots, s_q), \\ u_{m+1} = g_{m+1}(s_1, \ldots, s_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+q} = g_{m+q}(s_1, \ldots, s_q) \end{array}\right.$$

les deux groupes de formules dont il s'agit : en vertu de la proposition énoncée au début du n° **15**, les q dernières formules du groupe (13) sont résolubles par rapport à $t_1, \ldots, t_q$, et les q dernières du groupe (14) le sont par rapport à $s_1, \ldots, s_q$. Or, puisque les groupes (13) et (14) expriment l'un et l'autre la solution générale de (8), à un même système de valeurs de $u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}$ doit correspondre de part et d'autre un même système de valeurs de $u_1, \ldots, u_m$: si donc on pose

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_{m+1}(t_1, \ldots, t_q) = g_{m+1}(s_1, \ldots, s_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{m+q}(t_1, \ldots, t_q) = g_{m+q}(s_1, \ldots, s_q), \end{array}\right.$$

qu'on résolve le système (15) par rapport à $t_1, \ldots, t_q$ conformément au principe

16. Inversement, *considérons un système de $m+q$ formules égalant les $m+q$ variables $u_1, \ldots, u_{m+q}$ à autant de fonctions olotropes de q arbitraires, de telle façon que q d'entre ces formules soient résolubles par rapport aux arbitraires.* Cela étant, *l'élimination des q arbitraires entre les $m+q$ formules fournit un système réduit de m équations aux $m+q$ variables $u_1, \ldots, u_{m+q}$, dont la solution générale se trouve exprimée par les $m+q$ formules données* (¹).

17. Enfin, *si les $m+q$ formules* (9), *dont q sont supposées résolubles par rapport aux arbitraires $t_1, \ldots, t_q$, vérifient constamment le système réduit des m équations* (8), *aux $m+q$ variables $u_1, \ldots, u_{m+q}$, elles ne peuvent manquer d'en fournir la solution générale* (²).

18. *Toute transformation effectuée sur un système réduit donne un système également reduit* (³).

---

général des fonctions implicites (n° **1**), et qu'on porte les valeurs obtenues dans les m premières formules (13), il est manifeste qu'on tombera identiquement sur les m premières formules (14).

Ainsi, les formules (14) se déduisent de (13) par la simple substitution à $t_1, \ldots, t_q$ de leurs valeurs tirées des équations (15). Pareillement, les formules (13) se déduisent de (14) par la simple substitution à $s_1, \ldots, s_q$ de leurs valeurs tirées des mêmes équations.

(¹) *Ibid.*, n° 139.

(²) *Ibid.*, n° 140.

(³) Dans un système réduit de m équations,

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ \ldots,\ F_m = 0, \tag{16}$$

aux $m+q$ variables $u_1, u_2, \ldots, u_{m+q}$, effectuons la transformation

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = \psi_1(v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}), \\ u_2 = \psi_2(v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{m+q} = \psi_{m+q}(v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}), \end{array}\right. \tag{17}$$

et supposons, comme de raison, qu'à partir des valeurs initiales de $u_1, u_2, \ldots, u_{m+q}$, prises conjointement avec certaines valeurs initiales des nouvelles

19. *Considérons un groupe de $m+q$ formules exprimant*, conformément aux énoncés des n^{os} **15** et **16**, *la solution générale d'un système réduit de m équations à $m+q$ variables $u_1, u_2, \ldots, u_{m+q}$, et supposons que dans ce dernier on introduise, aux lieu et place des variables dont il s'agit, les $m+q$ variables nouvelles $v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}$.* Cela étant, *il suffit, pour exprimer semblablement la solution générale du système résultant, d'effectuer la même transformation sur les premiers membres des $m+q$ formules données, et de résoudre le groupe ainsi transformé par rapport à $v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}$* (¹).

Points ordinaires d'une figure.

20. Nous plaçant, indifféremment, soit dans le monde des quantités *réelles*, soit dans le monde des quantités *imaginaires*, nous nommerons *point* de l'*espace* $[[x, y, \ldots]]$ l'association de n valeurs numériques respectivement attribuées aux n *coordonnées* $x, y, \ldots$;

---

variables $v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}$, le système (17) soit résoluble par rapport à ces dernières conformément au principe général des fonctions implicites. Le système (16) étant indépendant des variables v, il résulte immédiatement de nos hypothèses que le système des $2m+q$ équations (16) et (17), où se trouvent engagées les $2m+2q$ variables u et v, possède par rapport aux $m+q$ variables v et à m convenablement choisies d'entre les variables u, un déterminant à valeur fondamentale non nulle : il est dès lors réduit. Si d nc on remplace, dans (16), les variables u par leurs valeurs tirées de (17), ou, en d'autres termes, si l'on effectue entre les équations (16) et (17) l'élimination des variables u, le système résultant est également réduit (n^{e} **13**).

(¹) Soit, en effet.

$$(18)\qquad \begin{cases} u_1 = v_1(t_1, \ldots, t_q), \\ u_2 = v_2(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+q} = v_{m+q}(t_1, \ldots, t_q), \end{cases}$$

un groupe de $m+q$ formules exprimant la solution genérale du système réduit (16), et telles que q d'entre elles soient résolubles par rapport aux arbitraires $t_1, \ldots, t_q$. Si l'on applique au système (16) la transformation (17), il est clair que, pour avoir un groupe de $m+q$ formules exprimant la solution générale du système résultant, il suffit d'effectuer d'abord la même transformation

figure un ensemble de points défini par un système d'équations reliant ces coordonnées; point *ordinaire* d'une figure un point tel que, dans un voisinage suffisamment rapproché du point [c'est-à-dire à l'intérieur d'un domaine ayant ce point pour centre avec des rayons suffisamment petits (¹)], la figure puisse être définie à l'aide d'un système *réduit* (n° **4**). *Nous nous bornerons systématiquement à la considération exclusive d'un pareil voisinage.* Il va sans dire d'ailleurs que tout point d'une figure suffisamment voisin d'un point ordinaire de cette figure en est lui-même un point ordinaire.

Supposant tour à tour que le système réduit à l'aide duquel est définie la figure comprenne 1, 2, 3, ... équations, nous dirons, suivant le cas, que la figure est à $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... *dimensions* (²).

---

sur les formules (18), ce qui donne

$$(19)\quad \begin{cases} \psi_1(v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}) = \upsilon_1(t_1, \ldots, t_q), \\ \psi_2(v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}) = \upsilon_2(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_{m+q}(v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}) = \upsilon_{m+q}(t_1, \ldots, t_q), \end{cases}$$

puis de résoudre le système (19) par rapport à $v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}$. Soient

$$(20)\quad \begin{cases} v_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_q), \\ v_2 = \varphi_2(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_{m+q} = \varphi_{m+q}(t_1, \ldots, t_q) \end{cases}$$

les formules de résolution : il reste à établir que q d'entre ces dernières sont résolubles par rapport à $t_1, \ldots, t_q$.

Or, le système (19) contient, comme (18), q formules résolubles par rapport à $t_1, \ldots, t_q$; il est d'ailleurs réduit, puisqu'il est résoluble par rapport aux variables v, et, comme il a évidemment pour conséquence numérique le groupe (réduit) des q formules dont nous venons de parler, il est (n° **11**) nécessairement résoluble par rapport à $t_1, \ldots, t_q$ et à m convenablement choisies des variables v. Le système (20), numériquement équivalent à (19), sera donc résoluble par rapport à ce groupe de $m+q$ variables (n° **6**), ce qui exige manifestement que q des équations (20) soient résolubles par rapport à $t_1, \ldots, t_q$.

(¹) *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 30.

(²) Si, comme cas extrême, le système réduit comprend n équations, la figure est à zéro dimension et se compose d'un point unique.

Deux systèmes réduits numériquement équivalents, et par suite nécessairement composés d'un même nombre d'équations (n° **6**), définissent deux figures *identiques*.

Si, désignant par p et p' deux entiers *inégaux*, on suppose que deux systèmes réduits, S et S', aux indéterminées $x, y, \ldots$, comprennent respectivement p et p' équations, et que le premier, S, soit une conséquence numérique du second, S', on a nécessairement $p < p'$ (n° **5**), d'où $n - p > n - p'$, et la figure à $n - p'$ dimensions que définit S' sera dite *située sur* la figure à $n - p$ dimensions que définit S ; inversement, la figure S sera dite *contenir* la figure S'.

Dans ce dernier cas, comme aussi dans celui de l'identité, ci-dessus défini, les deux figures considérées seront dites être *en symptose*.

De la propriété formulée au n° **7** il résulte que, *dans le voisinage d'un de ses points ordinaires, une figure à $n - p$ dimensions est représentable d'une infinité de manières à l'aide d'un système réduit de p équations reliant les n coordonnées $x, y, \ldots$.* Ce mode de représentation sera qualifié de *réduit*, par opposition à un autre dont nous parlerons plus loin (n° **22**).

Il importe d'observer que *le caractère spécifié dans la définition d'un point ordinaire d'une figure est indépendant de toute transformation ponctuelle opérée sur les coordonnées $x, y, \ldots$.*

Effectivement, soient F une figure contenant le point $(x_0, y_0, \ldots)$, et

$$\begin{aligned} x &= \alpha(x', y', \ldots), \\ y &= \beta(x', y', \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

les formules de transformation qui relient les anciennes coordonnées $x, y, \ldots$ aux nouvelles $x', y', \ldots$: on suppose que les valeurs $x_0, y_0, \ldots$ de $x, y, \ldots$, prises conjointement avec certaines valeurs, $x'_0, y'_0, \ldots$, de $x', y', \ldots$, vérifient numériquement les formules de transformation, et que, à partir de la solution numérique

$$(x_0, y_0, \ldots, x'_0, y'_0, \ldots),$$

ces dernières, résolues, en fait, par rapport à $x, y, \ldots$, sont, de plus, résolubles par rapport à $x', y', \ldots$ conformément au principe général des fonctions implicites.

Cela étant, il résulte de la proposition formulée au n° **18** qu'une pareille transformation, opérée sur un système réduit, donne un système également réduit, et que, dès lors, si le point $(x_0, y_0, \ldots)$ est ordinaire pour la figure F, le point correspondant $(x'_0, y'_0, \ldots)$ l'est aussi pour la figure, F′, que fournit la transformation.

Réciproquement, à cause de la réversibilité des formules de transformation, si le point $(x'_0, y'_0, \ldots)$ est ordinaire pour la figure F′, le point $(x_0, y_0, \ldots)$ l'est pour la figure F [1].

Il va sans dire, enfin, que *la relation de symptose entre deux figures est indépendante, elle aussi, de toute transformation ponctuelle opérée sur les coordonnées x, y, ...*

---

[1] Dans l'espace à trois dimensions réelles ou imaginaires $[[x, y, z]]$, on peut citer, comme figures ne contenant que des points ordinaires :

1° La figure définie par l'équation linéaire $Ax + By + Cz + D = 0$, où les constantes numériques A, B, C, D sont quelconques, sous la seule restriction que les trois premières, A, B, C, ne soient pas nulles à la fois.

2° La figure définie par le couple linéaire

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$

où les constantes numériques A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 sont quelconques, sous la seule restriction que les déterminants du second ordre extraits du tableau

$$\begin{matrix} A_1, & B_1, & C_1, \\ A_2, & B_2, & C_2 \end{matrix}$$

ne soient pas tous nuls.

3° La figure définie par l'équation

$$(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1)^2$$
$$+ (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2)^2 + (A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3)^2 + H = 0,$$

où les constantes numériques A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3, H sont quelconques, sous les seules restrictions que

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad H$$

soient différents de zéro.

Opérons en effet sur cette figure la transformation (toujours permise, d'après

21. Soient F_1, F_2, ... des figures, en nombre (limité) quelconque, qui toutes admettent un point ordinaire commun ; $n - p_1$, $n - p_2$, ... les nombres de dimensions respectifs de ces figures. Cela étant, *on peut, moyennant une simple transformation linéaire des n coordonnées x, y, ..., faire en sorte que les équations transformées de F_1 soient indifféremment résolubles par rapport à tout groupe de p_1 coordonnées; qu'en même temps les équations transformées de F_2 le soient, indifféremment, par rapport à tout groupe de p_2 coordonnées; et ainsi de suite.*

I. Sur les équations définissant l'une des figures données, F, à $n - p$ dimensions, opérons la transformation linéaire (et homo-

---

ce qui a été vu)

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= x', \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= y', \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 &= z'. \end{aligned}$$

Pour qu'un point de la figure ainsi obtenue ne fût pas ordinaire, il faudrait qu'il vérifiât, en même temps que l'équation $x'^2 + y'^2 + z'^2 + H = 0$, les trois équations dérivées par rapport à x', y', z' respectivement, c'est-à-dire $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$; il en résulterait, contrairement à l'hypothèse, $H = 0$.

4° La figure définie par le couple d'équations

$$\begin{aligned} &(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1)^2 \\ &+ (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2)^2 + (A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3)^2 + H = 0, \\ &\lambda_1 (A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) \\ &+ \lambda_2 (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) + \lambda_3 (A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3) = 0, \end{aligned}$$

où A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3, H ont les mêmes significations respectives que dans l'exemple précédent, et où, de plus, les constantes numériques λ_1, λ_2, λ_3 vérifient l'inégalité $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0$.

Les équations de la figure deviennent en effet, par la même transformation que ci-dessus,

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 + H &= 0, \\ \lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z' &= 0. \end{aligned}$$

Pour qu'un point de la figure ainsi obtenue ne fût pas ordinaire, il faudrait qu'il vérifiât, en même temps que les équations de la figure, celles qu'on obtient

gène)

$$\begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + \ldots, \\ y = b_1 x' + b_2 y' + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où $x, y, \ldots$ désignent les anciennes coordonnées, $x', y', \ldots$ les nouvelles, et les lettres $a, b, \ldots$ affectées d'indices des coefficients provisoirement indéterminés dont nous désignerons le déterminant par D ; ce déterminant est une certaine fonction entière, non identiquement nulle, de ses divers éléments, assimilés à autant de variables indépendantes.

Cela étant, *si l'on considère les équations transformées de la figure* F, *la valeur prise, au point ordinaire commun dont parle l'énoncé, par le déterminant différentiel de leurs premiers membres relatif à p quelconques des coordonnées nouvelles est un polynome*

---

en égalant à zéro les trois déterminants du second ordre extraits du tableau

$$\begin{matrix} x', & y', & z', \\ \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, \end{matrix}$$

c'est-à-dire

$$\lambda_3 y' = \lambda_2 z', \qquad \lambda_1 z' = \lambda_3 x', \qquad \lambda_2 x' = \lambda_1 y'.$$

Les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ne pouvant être nulles à la fois à cause de

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0,$$

supposons, pour fixer les idées, $\lambda_1 \neq 0$: des deux dernières relations on tire

$$y' = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x', \qquad z' = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} x',$$

puis, par combinaison avec l'équation $\lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z' = 0$,

$$x'\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_3^2}{\lambda_1}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad x'(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) = 0;$$

on a donc, de toute nécessité, $x' = 0$, par suite $y' = 0$, $z' = 0$, et finalement, en portant dans l'équation $x'^2 + y'^2 + z'^2 + \mathrm{H} = 0$,

$$\mathrm{H} = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

entier par rapport aux éléments de D *et dont les coefficients numériques ne sont pas tous nuls.*

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq coordonnées, et qu'il s'agisse d'une figure à trois dimensions définie par le système réduit

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, s, t) = 0, \\ f_2(x, y, z, s, t) = 0. \end{cases}$$

Si l'on opère sur ce dernier la transformation

$$\begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' + a_4 s' + a_5 t', \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' + b_4 s' + b_5 t', \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' + c_4 s' + c_5 t', \\ s = d_1 x' + d_2 y' + d_3 z' + d_4 s' + d_5 t', \\ t = e_1 x' + e_2 y' + e_3 z' + e_4 s' + e_5 t', \end{cases}$$

le déterminant différentiel du système transformé par rapport à deux quelconques des coordonnées nouvelles, par exemple x' et y', a pour valeur

$$\begin{vmatrix} a_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + c_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + d_1 \frac{\partial f_1}{\partial s} + e_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} & a_2 \frac{\partial f_1}{\partial x} + b_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} + c_2 \frac{\partial f_1}{\partial z} + d_2 \frac{\partial f_1}{\partial s} + e_2 \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ a_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} + b_1 \frac{\partial f_2}{\partial y} + c_1 \frac{\partial f_2}{\partial z} + d_1 \frac{\partial f_2}{\partial s} + e_1 \frac{\partial f_2}{\partial t} & a_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + c_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + d_2 \frac{\partial f_2}{\partial s} + e_2 \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix};$$

d'après la règle de multiplication des déterminants généralisée (¹)

(¹) Considérons les deux tableaux rectangulaires

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & \ldots, & l_1, \\ a_2, & b_2, & \ldots, & l_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_q, & b_q, & \ldots, & l_q, \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} \alpha_1, & \beta_1, & \ldots, & \lambda_1, \\ \alpha_2, & \beta_2, & \ldots, & \lambda_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \alpha_q, & \beta_q, & \ldots, & \lambda_q, \end{matrix}$$

qui contiennent chacun q lignes et $q + r$ colonnes ($q > 0$, $r \geqq 0$). Si l'on pose

$$R_{i,j} = a_i \alpha_j + b_i \beta_j + \ldots + l_i \lambda_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, q \text{ et } j = 1, 2, \ldots, q),$$

appliquée aux deux tableaux

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1, & e_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, & e_2, \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}, & \frac{\partial f_1}{\partial y}, & \frac{\partial f_1}{\partial z}, & \frac{\partial f_1}{\partial s}, & \frac{\partial f_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}, & \frac{\partial f_2}{\partial y}, & \frac{\partial f_2}{\partial z}, & \frac{\partial f_2}{\partial s}, & \frac{\partial f_2}{\partial t}, \end{matrix}$$

il a donc pour valeur

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} \\
+ &\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial s} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial s} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & e_1 \\ a_2 & e_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix} \\
+ &\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial s} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial s} \end{vmatrix} \\
+ &\begin{vmatrix} b_1 & e_1 \\ b_2 & e_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial s} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial s} \end{vmatrix} \\
+ &\begin{vmatrix} c_1 & e_1 \\ c_2 & e_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ d_2 & e_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Or, lorsqu'il s'agit du point ordinaire commun dont parle l'énoncé,

---

le déterminant d'ordre q

$$\begin{vmatrix} R_{1,1} & R_{2,1} & \dots & R_{q,1} \\ R_{1,2} & R_{2,2} & \dots & R_{q,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{1,q} & R_{2,q} & \dots & R_{q,q} \end{vmatrix}$$

est égal à la somme des produits que l'on obtient en multipliant les déterminants d'ordre q extraits du premier tableau par les déterminants homologues extraits du second.

les divers déterminants différentiels de f_1 et f_2 qui figurent dans cette dernière expression doivent être remplacés par des valeurs numériques non à la fois nulles.

II. Revenons aux conditions imposées par notre énoncé général. Pour qu'elles se trouvent satisfaites, il faut et il suffit :

Que, dans les équations transformées de E_1, les divers déterminants différentiels (d'ordre p_1) relatifs aux coordonnées nouvelles soient tous différents de zéro au point considéré;

Que, dans les équations transformées de F_2, les divers déterminants différentiels (d'ordre p_2) relatifs aux coordonnées nouvelles jouissent de cette même propriété;

Etc.;

Et enfin, que le déterminant D de la transformation soit lui-même différent de zéro.

Il est donc nécessaire et suffisant, si l'on se reporte à l'alinéa I, que certains polynomes, entiers par rapport aux coefficients indéterminés de la transformation, et dont aucun n'est identiquement nul, puissent prendre des valeurs numériques à la fois différentes de zéro : or, il est toujours possible de disposer des coefficients indéterminés de la transformation de manière que cette condition soit satisfaite.

Représentations diverses d'une figure dans le voisinage d'un point ordinaire.

22. Nous avons déjà eu l'occasion de constater, comme conséquence de la propriété formulée au n° **7**, que, dans le voisinage d'un de ses points ordinaires, une figure peut, d'une infinité de manières, être représentée dans le mode *réduit*, c'est-à-dire à l'aide d'un système réduit d'équations reliant les n coordonnées. En vertu de cette propriété, si une figure à $n-p$ dimensions, admettant comme point ordinaire le point $(x_0, y_0, \ldots)$, est définie, dans le voisinage de ce point, à l'aide du système réduit

$$f_1(x, y, \ldots) = 0, \qquad f_2(x, y, \ldots) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_p(x, y, \ldots) = 0,$$

l'expression générale de tous les systèmes réduits pouvant représenter

cette même figure dans le voisinage de ce même point est

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_{1,1} f_1 + \lambda_{1,2} f_2 + \ldots + \lambda_{1,p} f_p = 0, \\ \lambda_{2,1} f_1 + \lambda_{2,2} f_2 + \ldots + \lambda_{2,p} f_p = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_{p,1} f_1 + \lambda_{p,2} f_2 + \ldots + \lambda_{p,p} f_p = 0, \end{array}\right.$$

où les fonctions λ, développables à partir des valeurs x_0, y_0, ..., sont arbitrairement choisies sous la seule restriction de former un déterminant à valeur initiale non nulle.

Si, sur l'expression générale des systèmes réduits représentant une figure donnée, F, on opère une transformation ponctuelle des n coordonnées x, y, ..., on tombe sur l'expression générale des systèmes réduits représentant une nouvelle figure, F′ (¹). Cette dernière sera dite *transformée de* F.

Les propriétés formulées aux n^os **15**, **16** et **19** entraînent, d'autre part, les conséquences suivantes :

1° *Dans le voisinage d'un de ses points ordinaires, une figure à $n - p$ dimensions peut, d'une infinité de manières, se représenter à l'aide d'un groupe de n formules exprimant les n coordonnées x, y, ... en fonctions olotropes de $n - p$ arbitraires, et telles que $n - p$ de ces formules, convenablement choisies, soient résolubles par rapport aux arbitraires.*

Réciproquement, *un pareil groupe de n formules étant donné, le système réduit en x, y, ... que fournit l'élimination des $n - p$ arbitraires définit une figure à $n - p$ dimensions, représentable à l'aide des n formules données.*

Ce nouveau mode de représentation sera qualifié de *paramétrique*.

2° Considérons, sur une figure donnée à $n - p$ dimensions, le voisinage d'un point ordinaire donné. *Pour qu'un groupe déterminé de p coordonnées, celui des p premières par exemple, soit exprimable en fonctions olotropes des $n - p$ coordonnées restantes, il faut et il suffit qu'en représentant la figure suivant le mode paramétrique à l'aide de $n - p$ arbitraires, le groupe des $n - p$ dernières formules de cette représentation soit résoluble par rapport aux arbitraires.*

(¹) On le voit sans peine, en se reportant, notamment, au n° **18**.

3° *Si, dans une représentation paramétrique d'une figure à $n-p$ dimensions, on opère une transformation des $n-p$ arbitraires, on obtient une nouvelle représentation paramétrique de la figure.*

Inversement, *deux représentations paramétriques d'une même figure peuvent toujours se déduire l'une de l'autre par une transformation convenable des arbitraires.*

4° Considérons, en même temps qu'une figure, F, la figure, F′, qui s'en déduit par une transformation opérée sur les n coordonnées $x, y, \ldots$. *Si, sur une représentation paramétrique de* F, *on opère la transformation dont il s'agit, les n formules résultantes, nécessairement résolubles par rapport aux coordonnées nouvelles $x', y', \ldots$, fournissent une représentation paramétrique de* F′.

23. D'une propriété formulée au n° **6** il résulte que les divers systèmes réduits à l'aide desquels on peut représenter une même figure à $n-p$ dimensions fournissent tous, si on les résout par rapport à un même groupe de p coordonnées, un même système de formules de résolution. Ce dernier système fournit un mode de représentation éminemment simple, que nous qualifierons d'*explicite*, et qui, aux avantages du mode réduit, auquel il appartient, joint ceux du mode paramétrique, auquel on le ramène immédiatement : si l'on désigne en effet par $x, \ldots$ un groupe de p coordonnées, et par $y, \ldots$ le groupe des $n-p$ coordonnées restantes, le système des p équations

$$\left\{\begin{array}{l} x = X(y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

peut se remplacer par l'ensemble des n formules

$$\left\{\begin{array}{l} x = X(\eta, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y = \eta, \\ \ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où $\eta, \ldots$ désignent $n-p$ variables arbitraires [1].

---

[1] Une figure à zéro dimension, formée, comme nous l'avons observé, d'un point unique, $(x_0, y_0, \ldots)$, se trouve représentée, avec le maximum de simplicité, à l'aide des n formules $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$, qui constituent un cas extrême du mode paramétrique et du mode explicite.

Contacts d'ordres divers entre deux figures.

24. Pour définir un contact d'ordre quelconque entre deux figures, il convient de distinguer deux cas, suivant que ces figures ont ou non le même nombre de dimensions.

Considérons d'abord, dans l'espace à n dimensions $[[x, y, \ldots]]$, deux figures à un même nombre, $n-p$, de dimensions, ayant un point commun, $(x_0, y_0, \ldots)$, *ordinaire* (n° **20**) pour chacune d'elles : les deux figures étant, dans le voisinage de ce point initial, représentées, l'une, suivant le mode réduit, par le système des p équations

$$(1) \qquad f_1(x, y, \ldots) = 0, \quad f_2(x, y, \ldots) = 0, \quad \ldots, \quad f_p(x, y, \ldots) = 0,$$

l'autre, suivant le mode paramétrique, à l'aide des n formules

$$(2) \qquad x = \xi(u, v, \ldots), \quad y = \eta(u, v, \ldots), \quad \ldots,$$

les p fonctions composées

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_1[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots], \\ f_2[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_p[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots] \end{array} \right.$$

ont évidemment des valeurs initiales nulles. Cela posé, et en désignant par k un entier positif ou nul, si les fonctions (3) et toutes leurs dérivées (relatives aux $n-p$ paramètres $u, v, \ldots$) jusqu'à l'ordre k inclusivement ont des valeurs initiales nulles, sans que toutes celles d'ordre $k+1$ jouissent à la fois de cette propriété, les deux figures seront dites avoir au point considéré un *contact d'ordre* (exactement) *égal à* k.

Cette définition nécessite diverses observations dont l'importance est essentielle. Effectivement, les deux figures données peuvent, de bien des manières, être représentées, la première suivant le mode réduit, la deuxième suivant le mode paramétrique; comme elles ont, d'autre part, le même nombre de dimensions, une permutation de leurs rôles respectifs est à envisager où l'on supposera, à l'inverse de ce qui précède, que la deuxième figure est représentée suivant le mode

réduit, la première suivant le mode paramétrique : or, nous allons établir que *la propriété spécifiée dans la définition est indépendante de ces circonstances variables.* Nous établirons, de plus, qu'*elle l'est de toute transformation ponctuelle opérée sur les coordonnées x, y....*

I. *Supposons que les deux systèmes*

$$(4)\qquad f_1(x, y, \ldots) = 0, \quad f_2(x, y, \ldots) = 0, \quad \ldots, \quad f_p(x, y, \ldots) = 0$$

et

$$(5)\qquad g_1(x, y, \ldots) = 0, \quad g_2(x, y, \ldots) = 0, \quad \ldots, \quad g_p(x, y, \ldots) = 0$$

constituent, dans le voisinage du point considéré, $(x_0, y_0, \ldots)$, *deux représentations de la première figure suivant le mode réduit, et les formules* (2) *une représentation de la deuxième figure suivant le mode paramétrique;* en appliquant le mécanisme indiqué dans la définition ci-dessus, d'abord à (4) et (2), puis à (5) et (2), on forme successivement le groupe des fonctions composées (3), puis le groupe des fonctions composées

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} g_1[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots], \\ g_2[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g_p[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots]. \end{array}\right.$$

Cela étant, *si les fonctions composées* (3), *avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement, s'annulent au point considéré, sans que toutes leurs dérivées d'ordre $k+1$ s'y annulent à la fois, les fonctions composées* (6) *jouissent de la même propriété.*

A. Les fonctions composées (6) et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'annulent au point considéré.

Effectivement, les systèmes réduits (4) et (5) représentant la même figure, leurs premiers membres (n° **22**) satisfont, quels que soient

$x, y, \ldots$, à des identités de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} g_1 = \lambda_{1,1} f_1 + \lambda_{1,2} f_2 + \ldots + \lambda_{1,p} f_p, \\ g_2 = \lambda_{2,1} f_1 + \lambda_{2,2} f_2 + \ldots + \lambda_{2,p} f_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g_p = \lambda_{p,1} f_1 + \lambda_{p,2} f_2 + \ldots + \lambda_{p,p} f_p, \end{array}\right.$$

où les fonctions λ, développables à partir des valeurs $x_0, y_0, \ldots$, forment un déterminant à valeur initiale non nulle. Si donc on désigne à l'aide des notations f', g', λ' ce que deviennent les fonctions f, g, λ lorsqu'on y remplace $x, y, \ldots$ par leurs valeurs en $u, v, \ldots$ tirées des formules (2), on aura, quels que soient $u, v, \ldots$,

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} g'_1 = \lambda'_{1,1} f'_1 + \lambda'_{1,2} f'_2 + \ldots + \lambda'_{1,p} f'_p, \\ g'_2 = \lambda'_{2,1} f'_1 + \lambda'_{2,2} f'_2 + \ldots + \lambda'_{2,p} f'_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g'_p = \lambda'_{p,1} f'_1 + \lambda'_{p,2} f'_2 + \ldots + \lambda'_{p,p} f'_p, \end{array}\right.$$

en sorte que, pour avoir les dérivées successives (relatives à $u, v, \ldots$) des fonctions composées (6), il suffit de prendre les dérivées successives des divers produits de deux facteurs figurant dans les seconds membres de (7). Considérons, par exemple, une dérivée d'ordre h du produit $\lambda'_{1,1} f'_1$: il résulte immédiatement des règles élémentaires de la dérivation que cette dérivée est une somme de termes dont chacun contient en facteur quelque dérivée des ordres $0, 1, 2, \ldots, h$ de f'_1, c'est-à-dire de la première des fonctions (3). Cette simple remarque, rapprochée de nos hypothèses sur les fonctions (3), prouve que le produit $\lambda'_{1,1} f'_1$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'annulent au point considéré. Il en est de même pour les divers produits de deux facteurs figurant dans les seconds membres de (7), par suite aussi pour les premiers membres, c'est-à-dire pour les fonctions composées (6).

B. Les dérivées d'ordre $k+1$ des fonctions composées (6) ne s'annulent pas toutes au point considéré.

Effectivement, si la nullité initiale établie pour les fonctions (6) et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'étendait à toutes leurs dérivées de l'ordre $k+1$, elle s'étendrait, par le même raisonnement

fait en sens inverse, à toutes les dérivées d'ordre $k+1$ des fonctions (3), ce qui est contraire à l'hypothèse.

II. *Supposons que les formules*

$$x = \xi(u, v, \ldots), \qquad y = \eta(u, v, \ldots), \qquad \ldots \tag{8}$$

et les formules

$$x = \varpi(U, V, \ldots), \qquad y = \rho(U, V, \ldots), \qquad \ldots \tag{9}$$

constituent (dans le voisinage du point considéré) *deux représentations de la deuxième figure suivant le mode paramétrique, et le système* (1) *une représentation de la première figure suivant le mode réduit;* en appliquant le mécanisme indiqué dans la définition, d'abord à (1) et (8), puis à (1) et (9), on forme successivement le groupe des fonctions composées (3), puis le groupe des fonctions composées

$$\left\{\begin{array}{l} f_1[\varpi(U, V, \ldots), \rho(U, V, \ldots), \ldots], \\ f_2[\varpi(U, V, \ldots), \rho(U, V, \ldots), \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p[\varpi(U, V, \ldots), \rho(U, V, \ldots), \ldots]. \end{array}\right. \tag{10}$$

Cela étant, *si les fonctions composées* (3), *avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement, s'annulent au point considéré, sans que toutes leurs dérivées d'ordre $k+1$ s'y annulent à la fois, les fonctions composées* (10) *jouissent de la même propriété.*

A. Les fonctions composées (10) et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'annulent au point considéré.

Désignons en effet les fonctions (3) et (10) respectivement par les notations abrégées

$$\varphi_1(u, v, \ldots), \quad \varphi_2(u, v, \ldots), \quad \ldots, \quad \varphi_p(u, v, \ldots) \tag{11}$$

et

$$\Phi_1(U, V, \ldots), \quad \Phi_2(U, V, \ldots), \quad \ldots, \quad \Phi_p(U, V, \ldots). \tag{12}$$

En vertu d'une propriété énoncée au n° **22** (3°), il suffit, pour passer des formules (8) aux formules (9), d'effectuer dans les formules (8), sur les $n-p$ arbitraires $u, v, \ldots$, une certaine transformation : cette

même transformation permettra donc, évidemment, de passer des fonctions (3) aux fonctions (10), c'est-à-dire des fonctions (11) aux fonctions (12). Nous pouvons dès lors, pour calculer les dérivées successives de ces dernières, (12), opérer sur les premières, (11), à condition d'y considérer u, v, ... comme fonctions de U, V, ... Or, il résulte de la règle des fonctions composées qu'une dérivée d'ordre h de $\Phi_1(U, V, \ldots)$, ainsi calculée, est une somme de termes dont chacun contient en facteur quelque dérivée des ordres 0, 1, 2, ..., h de la composante $\varphi_1(u, v, \ldots)$. Cette simple remarque, rapprochée de nos hypothèses sur les fonctions (3), c'est-à-dire sur les fonctions (11), prouve que $\Phi_1(U, V, \ldots)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'annulent au point considéré. Il en est de même pour

$$\Phi_2(U, V, \ldots), \quad \ldots, \quad \Phi_p(U, V, \ldots).$$

Ainsi, les fonctions (12), c'est-à-dire les fonctions (10), ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement, s'annulent bien au point considéré.

B. Les dérivées d'ordre $k+1$ des fonctions composées (10) ne s'annulent pas toutes au point considéré.

Effectivement, si la nullité initiale établie pour les fonctions (10) et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'étendait à toutes leurs dérivées de l'ordre $k+1$, elle s'étendrait, par le même raisonnement fait en sens inverse, à toutes les dérivées d'ordre $k+1$ des fonctions (3), ce qui est contraire à l'hypothèse.

III. Il nous faut, avant de poursuivre, établir un lemme.

Considérons, comme dans notre énoncé général, deux figures à $n-p$ dimensions admettant le point commun $(x_0, y_0, \ldots)$, ordinaire pour chacune d'elles, et représentées, l'une, suivant le mode réduit, par le système (1), l'autre, suivant le mode paramétrique, par les formules (2); supposons, en outre, *que les dérivées premières des fonctions composées* (3) *s'annulent*, comme ces fonctions, *au point considéré*. Cela étant, *si, pour la figure* (1), *un certain groupe de p coordonnées est exprimable par des fonctions holotropes des $n-p$ coordonnées restantes, ce même groupe l'est aussi pour la figure* (2), *et réciproquement*.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq coordonnées, x, y, z, s, t, que les figures considérées soient à trois dimensions, et soient

$$f_1(x, y, z, s, t) = 0, \qquad f_2(x, y, z, s, t) = 0 \tag{13}$$

le système réduit qui définit la première,

$$\left\{\begin{aligned} x &= \xi(u, v, w), \\ y &= \eta(u, v, w), \\ z &= \zeta(u, v, w), \\ s &= \sigma(u, v, w), \\ t &= \tau(u, v, w) \end{aligned}\right. \tag{14}$$

les formules paramétriques qui définissent la seconde. Supposons, en outre, que les deux fonctions composées

$$\left\{\begin{aligned} &f_1[\xi(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w), \sigma(u, v, w), \tau(u, v, w)], \\ &f_2[\xi(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w), \sigma(u, v, w), \tau(u, v, w)], \end{aligned}\right. \tag{15}$$

ainsi que leurs diverses dérivées premières, s'annulent au point considéré. Cela étant, il s'agit de prouver que si le couple de coordonnées (x, y), par exemple, est exprimable, pour la première figure, par des fonctions olotropes de z, s, t, il l'est aussi pour la seconde figure, et réciproquement; ou, en d'autres termes, que les deux déterminants différentiels

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}, \tag{16}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} & \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} & \dfrac{\partial \sigma}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \tau}{\partial u} & \dfrac{\partial \tau}{\partial v} & \dfrac{\partial \tau}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{17}$$

ont leurs valeurs initiales respectives à la fois nulles ou à la fois différentes de zéro.

Effectivement, supposons que le déterminant (16) ait une valeur initiale différente de zéro. En vertu de notre hypothèse sur les fonc-

tions (15), on a, au point considéré,

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial u} = 0; \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial v} = 0; \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial w} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial w} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial w} + \dfrac{\partial f_1}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial w} + \dfrac{\partial f_1}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial w} = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial w} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial w} + \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial w} + \dfrac{\partial f_2}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial w} + \dfrac{\partial f_2}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial w} = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = A'\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} + B'\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} + C'\dfrac{\partial \tau}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} = A''\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} + B''\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} + C''\dfrac{\partial \tau}{\partial u}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = A'\dfrac{\partial \zeta}{\partial v} + B'\dfrac{\partial \sigma}{\partial v} + C'\dfrac{\partial \tau}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} = A''\dfrac{\partial \zeta}{\partial v} + B''\dfrac{\partial \sigma}{\partial v} + C''\dfrac{\partial \tau}{\partial v}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial w} = A'\dfrac{\partial \zeta}{\partial w} + B'\dfrac{\partial \sigma}{\partial w} + C'\dfrac{\partial \tau}{\partial w}, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial w} = A''\dfrac{\partial \zeta}{\partial w} + B''\dfrac{\partial \sigma}{\partial w} + C''\dfrac{\partial \tau}{\partial w}. \end{cases}$$

Si donc le déterminant (17) avait une valeur initiale nulle, les divers déterminants du troisième ordre extraits du tableau

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial \xi}{\partial u}, & \dfrac{\partial \xi}{\partial v}, & \dfrac{\partial \xi}{\partial w}, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u}, & \dfrac{\partial \eta}{\partial v}, & \dfrac{\partial \eta}{\partial w}, \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial u}, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial v}, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial w}, \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial u}, & \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}, & \dfrac{\partial \sigma}{\partial w}, \\ \dfrac{\partial \tau}{\partial u}, & \dfrac{\partial \tau}{\partial v}, & \dfrac{\partial \tau}{\partial w}. \end{array}$$

auraient tous aussi des valeurs initiales nulles, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Inversement, supposons que le déterminant (17) ait une valeur initiale différente de zéro. Des formules (18), (19) et (20), groupées comme il suit,

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial u}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial u}+\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial u}+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial u}=0,\\
&\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial v}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial v}+\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial v}+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial v}=0,\\
&\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial w}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial w}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial w}+\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial w}+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial w}=0;
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial u}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial u}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial u}+\frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial u}=0,\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial v}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial v}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial v}+\frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial v}=0,\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial w}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial w}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial w}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial w}+\frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial w}=0,
\end{aligned}\right.$$

on tire

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial z}=\mathrm{M}'\frac{\partial f_1}{\partial x}+\mathrm{N}'\frac{\partial f_1}{\partial y},\\
&\frac{\partial f_1}{\partial s}=\mathrm{M}''\frac{\partial f_1}{\partial x}+\mathrm{N}''\frac{\partial f_1}{\partial y},\\
&\frac{\partial f_1}{\partial t}=\mathrm{M}'''\frac{\partial f_1}{\partial x}+\mathrm{N}'''\frac{\partial f_1}{\partial y};
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f_2}{\partial z}=\mathrm{M}'\frac{\partial f_2}{\partial x}+\mathrm{N}'\frac{\partial f_2}{\partial y},\\
&\frac{\partial f_2}{\partial s}=\mathrm{M}''\frac{\partial f_2}{\partial x}+\mathrm{N}''\frac{\partial f_2}{\partial y},\\
&\frac{\partial f_2}{\partial t}=\mathrm{M}'''\frac{\partial f_2}{\partial x}+\mathrm{N}'''\frac{\partial f_2}{\partial y}.
\end{aligned}\right.$$

Si donc le déterminant (16) avait une valeur initiale nulle, les divers déterminants du second ordre extraits du tableau

$$\begin{matrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x}, & \frac{\partial f_1}{\partial y}, & \frac{\partial f_1}{\partial z}, & \frac{\partial f_1}{\partial s}, & \frac{\partial f_1}{\partial t},\\
\frac{\partial f_2}{\partial x}, & \frac{\partial f_2}{\partial y}, & \frac{\partial f_2}{\partial z}, & \frac{\partial f_2}{\partial s}, & \frac{\partial f_2}{\partial t}
\end{matrix}$$

auraient tous aussi des valeurs initiales nulles, ce qui est contraire à l'hypothèse.

IV. *Supposons que*, dans le voisinage du point considéré, *le système*

$$(21)\qquad f_1(x, y, \ldots) = 0, \qquad f_2(x, y, \ldots) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_p(x, y, \ldots) = 0$$

et les formules

$$(22)\qquad x = \Xi(U, V, \ldots), \qquad y = H(U, V, \ldots), \qquad \ldots$$

constituent deux représentations de la première figure, l'une suivant le mode réduit, l'autre suivant le mode paramétrique; supposons, pareillement, *que le système*

$$(23)\qquad F_1(x, y, \ldots) = 0, \qquad F_2(x, y, \ldots), \qquad \ldots, \qquad F_p(x, y, \ldots) = 0$$

et les formules

$$(24)\qquad x = \xi(u, v, \ldots), \qquad y = \eta(u, v, \ldots), \qquad \ldots$$

constituent deux représentations de la deuxième figure, l'une suivant le mode réduit, l'autre suivant le mode paramétrique. En appliquant le mécanisme indiqué dans la définition, d'abord à (21) et (24), puis à (22) et (23), on forme successivement les fonctions composées (3), puis les fonctions composées

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{l} F_1[\Xi(U, V, \ldots), H(U, V, \ldots), \ldots], \\ F_2[\Xi(U, V, \ldots), H(U, V, \ldots), \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_p[\Xi(U, V, \ldots), H(U, V, \ldots), \ldots]. \end{array}\right.$$

Cela étant, *si les fonctions composées* (3), *avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement, s'annulent au point considéré, sans que toutes leurs dérivées d'ordre $k+1$ s'y annulent à la fois, les fonctions composées* (25) *jouissent de la même propriété.*

Supposons ici encore, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq coordonnées, x, y, z, s, t, et que les figures considérées, admettant le point ordinaire commun $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, soient à trois dimensions : les formules (21), (22), (23), (24), (3), (25) deviennent respecti-

vement

$$(21\,bis)\qquad f_1(x, y, z, s, t) = 0, \qquad f_2(x, y, z, s, t) = 0;$$

$$(22\,bis)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \Xi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}),\\ y &= \mathrm{H}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}),\\ z &= \mathrm{Z}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}),\\ s &= \Sigma(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}),\\ t &= \mathrm{T}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W});\end{aligned}\right.$$

$$(23\,bis)\qquad \mathrm{F}_1(x, y, z, s, t) = 0, \qquad \mathrm{F}_2(x, y, z, s, t) = 0;$$

$$(24\,bis)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \xi(u, v, w),\\ y &= \eta(u, v, w),\\ z &= \zeta(u, v, w),\\ s &= \sigma(u, v, w),\\ t &= \tau(u, v, w);\end{aligned}\right.$$

$$(3\,bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &f_1[\xi(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w), \sigma(u, v, w), \tau(u, v, w)],\\ &f_2[\xi(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w), \sigma(u, v, w), \tau(u, v, w)];\end{aligned}\right.$$

$$(25\,bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}_1[\Xi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \mathrm{H}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \mathrm{Z}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \Sigma(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \mathrm{T}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})],\\ &\mathrm{F}_2[\Xi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \mathrm{H}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \mathrm{Z}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \Sigma(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \mathrm{T}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})].\end{aligned}\right.$$

Il s'agit de prouver que, si les fonctions composées (3 *bis*), avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement, s'annulent au point considéré, sans que toutes leurs dérivées d'ordre $k+1$ s'y annulent à la fois, les fonctions composées (25 *bis*) jouissent de la même propriété.

A. Les fonctions composées (25 *bis*) et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'annulent au point considéré.

Si l'entier k est nul, le point $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$ étant, par hypothèse, commun aux deux figures, les fonctions composées (25 *bis*) ont, comme les fonctions composées (3 *bis*), des valeurs initiales nulles.

Supposons maintenant que l'entier k soit supérieur à zéro, par suite au moins égal à 1. En rapprochant de l'alinéa précédent III nos hypothèses sur les fonctions composées (3 *bis*), on voit que, pour les deux figures considérées, les mêmes couples de coordonnées sont exprimables en fonctions olotropes des trois coordonnées restantes, et que dès lors les deux figures seront représentables, suivant le mode explicite (n° **23**), par des couples de formules ayant respectivement

les mêmes premiers membres, par exemple

$$x = g_1(z, s, t), \qquad y = g_2(z, s, t)$$

pour la première figure,

$$x = G_1(z, s, t), \qquad y = G_2(z, s, t)$$

pour la deuxième figure. Cela étant, nous allons, dans ce qui suit, associer de diverses manières une représentation, réduite ou paramétrique, de la première figure, avec une représentation, paramétrique ou réduite, de la deuxième.

Première association :

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, s, t) = 0, \\ f_2(x, y, z, s, t) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \xi(u, v, w), \\ y = \eta(u, v, w), \\ z = \zeta(u, v, w), \\ s = \sigma(u, v, w), \\ t = \tau(u, v, w); \end{cases}$$

Deuxième association :

$$\begin{cases} x - g_1(z, s, t) = 0, \\ y - g_2(z, s, t) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \xi(u, v, w), \\ y = \eta(u, v, w), \\ z = \zeta(u, v, w), \\ s = \sigma(u, v, w), \\ t = \tau(u, v, w); \end{cases}$$

Troisième association :

$$\begin{cases} x - g_1(z, s, t) = 0, \\ y - g_2(z, s, t) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = G_1(z', s', t'), \\ y = G_2(z', s', t'), \\ z = z', \\ s = s', \\ t = t'; \end{cases}$$

Quatrième association :

$$\begin{cases} x = g_1(z', s', t'), \\ y = g_2(z', s', t'), \\ z = z', \\ s = s', \\ t = t', \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - G_1(z, s, t) = 0, \\ y - G_2(z, s, t) = 0; \end{cases}$$

Cinquième association :

$$\begin{cases} x = \Xi(U, V, W), \\ y = H(U, V, W), \\ z = Z(U, V, W), \\ s = \Sigma(U, V, W), \\ t = T(U, V, W), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - G_1(z, s, t) = 0, \\ y - G_2(z, s, t) = 0; \end{cases}$$

Sixième association :

$$\begin{cases} x = \Xi(U, V, W), \\ y = H(U, V, W), \\ z = Z(U, V, W), \\ s = \Sigma(U, V, W), \\ t = T(U, V, W), \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, s, t) = 0, \\ F_2(x, y, z, s, t) = 0. \end{cases}$$

A ces six associations correspondent respectivement, par l'application du mécanisme indiqué dans la définition du contact, six couples de fonctions composées, savoir :

$$(26) \quad \begin{cases} f_1[\xi(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w), \sigma(u, v, w), \tau(u, v, w)], \\ f_2[\xi(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w), \sigma(u, v, w), \tau(u, v, w)]; \end{cases}$$

$$(27) \quad \begin{cases} \xi(u, v, w) - g_1[\zeta(u, v, w), \sigma(u, v, w), \tau(u, v, w)], \\ \eta(u, v, w) - g_2[\zeta(u, v, w), \sigma(u, v, w), \tau(u, v, w)]; \end{cases}$$

$$(28) \quad \begin{cases} G_1(z', s', t') - g_1(z', s', t'), \\ G_2(z', s', t') - g_2(z', s', t'); \end{cases}$$

et

$$(29)\quad \begin{cases} g_1(z', s', t') = G_1(z', s', t'), \\ g_2(z', s', t') = G_2(z', s', t'); \end{cases}$$

$$(30)\quad \begin{cases} \Xi(U, V, W) = G_1[Z(U, V, W), \Sigma(U, V, W), T(U, V, W)], \\ H(U, V, W) = G_2[Z(U, V, W), \Sigma(U, V, W), T(U, V, W)]; \end{cases}$$

$$(31)\quad \begin{cases} F_1[\Xi(U, V, W), H(U, V, W), Z(U, V, W), \Sigma(U, V, W), T(U, V, W)], \\ F_2[\Xi(U, V, W), H(U, V, W), Z(U, V, W), \Sigma(U, V, W), T(U, V, W)]. \end{cases}$$

De ces six couples de fonctions composées, le premier, (26), est identique à (3 *bis*), et le dernier, (31), identique à (25 *bis*).

Or, la propriété que possèdent, par hypothèse, les fonctions (3 *bis*), ou (26), d'avoir des valeurs initiales nulles ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement, s'étend tout d'abord de (26) à (27), en vertu de l'alinéa I; puis de (27) à (28), en vertu de l'alinéa II; puis, évidemment, de (28) à (29), qui se compose de fonctions respectivement identiques au signe près; puis de (29) à (30), en vertu de l'alinéa II; puis enfin de (30) à (31), c'est-à-dire à (25 *bis*), en vertu de l'alinéa I.

B. Les dérivées d'ordre $k+1$ des fonctions composées (25 *bis*) ne s'annulent pas toutes au point considéré.

Effectivement, si la nullité initiale établie pour les fonctions (25 *bis*) et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'étendait à toutes leurs dérivées de l'ordre $k+1$, elle s'étendrait, par le même raisonnement fait en sens inverse, à toutes les dérivées d'ordre $k+1$ des fonctions (3 *bis*), ce qui est contraire à l'hypothèse.

V. De l'exposé qui précède (alinéas I, II et IV) il résulte que la propriété spécifiée dans notre définition du contact d'ordre k est indépendante des diverses circonstances variables mentionnées au début du présent n° **24** : établissons maintenant qu'*elle est indépendante de toute transformation ponctuelle opérée sur les coordonnées* $x, y, \ldots$.

Soient donc

$$(32)\quad \begin{cases} x = \alpha(x', y', \ldots), \\ y = \beta(x', y', \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

les formules de transformation qui lient les anciennes coordonnées $x, y, \ldots$ aux nouvelles $x', y', \ldots$: les anciennes coordonnées, $x_0, y_0, \ldots$, du point ordinaire commun aux deux figures, prises conjointement avec ses coordonnées nouvelles, $x'_0, y'_0, \ldots$, vérifient numériquement les formules (32), et, à partir de la solution numérique

$$(x_0, y_0, \ldots, x'_0, y'_0, \ldots),$$

les formules dont il s'agit, résolues, en fait, par rapport à $x, y, \ldots$, sont, de plus, résolubles par rapport à $x', y', \ldots$ conformément au principe général des fonctions implicites.

Par cette transformation, le système (1) et les formules (2) deviennent respectivement

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} f_1[\alpha(x', y', \ldots), \beta(x', y', \ldots), \ldots] = 0, \\ f_2[\alpha(x', y', \ldots), \beta(x', y', \ldots), \ldots] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p[\alpha(x', y', \ldots), \beta(x', y', \ldots), \ldots] = 0 \end{array}\right.$$

et

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha(x', y', \ldots) = \xi(u, v, \ldots), \\ \beta(x', y', \ldots) = \eta(u, v, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Le système (33) fournit d'ailleurs une représentation, dans le mode réduit, de la première figure transformée (n° **18**), et les formules déduites de (34) à l'aide d'une résolution par rapport à $x', y', \ldots$ une représentation, dans le mode paramétrique, de la deuxième figure transformée (n° **22**). Or, si l'on porte dans les premiers membres de (33) les valeurs de $x', y', \ldots$ obtenues par cette résolution, les fonctions composées qui en résultent sont respectivement identiques à (3).

Ainsi se trouve établi le point que nous avions en vue.

23. Définissons maintenant un contact d'ordre quelconque entre deux figures dont les nombres respectifs de dimensions, $n-p$, $n-r$, soient inégaux, et supposons $n-p > n-r$. Les deux figures étant, dans le voisinage d'un point ordinaire commun, représentées, la première (celle à $n-p$ dimensions), suivant le mode réduit, par le

système des p équations

$$(35)\quad f_1(x, y, \ldots) = 0, \qquad f_2(x, y, \ldots) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_p(x, y, \ldots) = 0,$$

la seconde (celle à $n - r$ dimensions), suivant le mode paramétrique, à l'aide des n formules

$$(36)\qquad x = \xi(u, v, \ldots), \qquad y = \eta(u, v, \ldots), \qquad \ldots,$$

les p fonctions composées

$$(37)\qquad \begin{cases} f_1[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots], \\ f_2[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots] \end{cases}$$

ont évidemment des valeurs initiales nulles. Cela posé, et en désignant par k un entier positif ou nul, si les fonctions (37) et toutes leurs dérivées (relatives aux $n - r$ paramètres $u, v, \ldots$) jusqu'à l'ordre k inclusivement ont des valeurs initiales nulles, sans que toutes celles d'ordre $k + 1$ jouissent à la fois de cette propriété, les deux figures seront dites avoir, au point considéré, un *contact d'ordre* (exactement) *égal à k*.

Cette définition, comme celle du numéro précédent, nécessite diverses observations essentielles. On n'a pas, il est vrai, dans le cas actuel où les deux figures n'ont pas le même nombre de dimensions, à envisager une permutation entre leurs rôles respectifs; mais, ici encore, elles peuvent, de bien des manières, être représentées, la première suivant le mode réduit, la deuxième suivant le mode paramétrique : or, la propriété spécifiée dans la définition est indépendante de ces circonstances variables. Elle l'est, en outre, de toute transformation ponctuelle opérée sur les coordonnées $x, y, \ldots$. C'est ce que mettent en évidence des raisonnements tout semblables à ceux que nous venons d'exposer dans les alinéas I, II et V du numéro précédent.

26. Il convient, enfin, de dire un mot du contact d'ordre infini entre deux figures.

Deux figures à $n - p$ dimensions, ayant un point commun, ordinaire pour chacune d'elles, seront dites avoir en ce point un *contact d'ordre infini*, si, l'une d'elles étant représentée dans le mode réduit par le

système des p équations (1), et l'autre dans le mode paramétrique à l'aide des n formules (2), les p fonctions composées (3) et leurs dérivées de tous ordres ont des valeurs initiales nulles.

Considérons maintenant deux figures dont les nombres respectifs de dimensions, $n-p$, $n-r$, soient inégaux, et supposons $n-p>n-r$: en un point commun, ordinaire pour chacune d'elles, ces figures seront dites avoir un *contact d'ordre infini*, si, la première (celle à $n-p$ dimensions) étant représentée dans le mode réduit par le système des p équations (35), et la seconde (celle à $n-r$ dimensions) étant représentée dans le mode paramétrique à l'aide des n formules (36), les p fonctions composées (37) et leurs dérivées de tous ordres ont des valeurs initiales nulles.

De l'exposé qui précède il résulte que les caractères pris pour bases respectives de ces deux définitions sont indépendants des diverses circonstances mentionnées au début des n^{os} **24** et **25**.

Pour que deux figures, ayant, ou non, le même nombre de dimensions, et admettant le point commun $(x_0, y_0, \ldots)$, *ordinaire pour chacune d'elles, soient en symptose* (n° **20**), *il faut et il suffit qu'elles aient en ce point un contact d'ordre infini.*

Effectivement, si les deux figures sont en symptose, les p fonctions composées que donne l'application du mécanisme indiqué ci-dessus ne peuvent manquer d'être identiquement nulles; elles s'annulent donc numériquement avec leurs dérivées de tous ordres au point $(x_0, y_0, \ldots)$ (1), c'est-à-dire que les deux figures ont en ce point un contact d'ordre infini.

Réciproquement, si les deux figures ont au point $(x_0, y_0, \ldots)$ un contact d'ordre infini, les p fonctions composées dont il s'agit s'annulent numériquement en ce point avec leurs dérivées de tous ordres; elles sont donc identiquement nulles (2), d'où résulte que les deux figures sont en symptose.

27. *Si deux figures à $n-p$ dimensions,* $F^{(n-p)}$, $G^{(n-p)}$, *ont entre elles un contact d'ordre au moins égal à k, toute figure à $n-q$ di-*

(1) *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 56.

(2) *Ibid.*, n° 57.

mensions, $J^{(n-q)}$, *ayant avec la première*, $F^{(n-p)}$, *un contact d'ordre au moins égal à* k, *a aussi avec la seconde*, $G^{(n-p)}$, *un contact d'ordre au moins égal à* k.

(On suppose, indifféremmenl, $n-p$ supérieur, égal ou inférieur à $n-q$.)

I. Considérons d'abord les deux figures à $n-p$ dimensions, $L^{(n-p)}$, $M^{(n-p)}$, définies par les systèmes respectifs

$$\left\{\begin{array}{l} x = X_L(z, s, \ldots), \\ y = Y_L(z, s, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = X_M(z, s, \ldots), \\ y = Y_M(z, s, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

qui, pour l'une et pour l'autre, expriment un même groupe, $(x, y, \ldots)$, de p coordonnées en fonctions olotropes des $n-p$ coordonnées restantes $z, s, \ldots$: pour que, en un point ordinaire,

$$(x_0, y_0, \ldots, z_0, s_0, \ldots),$$

commun à ces deux figures, il y ait entre celles-ci un contact d'ordre g, il faut et il suffit que les développements de $x, y, \ldots$, construits, pour l'une et pour l'autre, à partir de $z_0, s_0, \ldots$, et qui sont entiers par rapport aux différences $z - z_0, s - s_0, \ldots$, soient respectivement identiques de part et d'autre jusqu'aux termes de degré g inclusivement, sans que l'identité dont il s'agit s'étende à l'ensemble des termes de degré $g+1$.

Pour s'en convaincre, on mettra les équations de la première figure sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} X_L(z, s, \ldots) - x = 0, \\ Y_L(z, s, \ldots) - y = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

on représentera la deuxième, suivant le mode paramétrique, à l'aide des formules

$$\left\{\begin{array}{l} x = X_M(\zeta, \sigma, \ldots), \\ y = Y_M(\zeta, \sigma, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z = \zeta, \\ s = \sigma, \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$$

(n° **23**), et l'on appliquera notre définition du n° **24**.

II. Revenons à notre énoncé.

La définition d'un contact d'ordre quelconque entre deux figures étant, comme nous l'avons vu, indépendante de toute transformation ponctuelle opérée sur les coordonnées, il est toujours permis, si l'on y trouve quelque avantage, de recourir à une pareille transformation. Or, en vertu d'une remarque exposée au n° **21**, on peut, au besoin, opérer sur les coordonnées une transformation linéaire telle, qu'un même groupe de p coordonnées devienne, pour les deux figures $F^{(n-p)}$, $G^{(n-p)}$, exprimable en fonctions olotropes des $n-p$ coordonnées restantes. Supposant, dès lors, les équations de ces deux figures mises respectivement sous les formes

$$\begin{cases} x = X_F(z, s, \ldots), \\ y = Y_F(z, s, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = X_G(z, s, \ldots), \\ y = Y_G(z, s, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

nous distinguerons dans la démonstration deux cas, suivant que l'on a

$$n - p \geqq n - q \qquad \text{ou} \qquad n - p < n - q.$$

Premier cas. — On suppose $n - p \geqq n - q$.

La figure $J^{(n-q)}$ étant représentée, suivant le mode paramétrique, à l'aide des n formules

$$\begin{cases} x = \Xi(u, v, \ldots), \\ y = H(u, v, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z = Z(u, v, \ldots), \\ s = \Sigma(u, v, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

on formera les deux groupes de fonctions composées

$$(38) \qquad \begin{cases} X_F[Z(u, v, \ldots), \Sigma(u, v, \ldots), \ldots] - \Xi(u, v, \ldots), \\ Y_F[Z(u, v, \ldots), \Sigma(u, v, \ldots), \ldots] - H(u, v, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et

$$(39) \qquad \begin{cases} X_G[Z(u, v, \ldots), \Sigma(u, v, \ldots), \ldots] - \Xi(u, v, \ldots), \\ Y_G[Z(u, v, \ldots), \Sigma(u, v, \ldots), \ldots] - H(u, v, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Du contact supposé entre $F^{(n-p)}$ et $J^{(n-q)}$ il résulte que les fonctions composées (38) ont des valeurs initiales nulles, ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement. Si l'on compare alors (38) à (39), il résulte du contact supposé entre $F^{(n-p)}$ et $G^{(n-p)}$ et de l'alinéa I, combinés avec la règle des fonctions composées, que les fonctions composées (39) jouissent de cette même propriété : les figures $G^{(n-p)}$, $J^{(n-q)}$ présentent donc, elles aussi, un contact d'ordre au moins égal à k.

Deuxième cas. — On suppose $n-p < n-q$.

La figure $J^{(n-q)}$ étant représentée, suivant le mode réduit, par le système des q équations

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x, y, \ldots, z, s, \ldots) = 0, \\ f_2(x, y, \ldots, z, s, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_q(x, y, \ldots, z, s, \ldots) = 0, \end{array}\right.$$

on formera les deux groupes de fonctions composées

$$(40)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_1[X_F(z, s, \ldots), Y_F(z, s, \ldots), \ldots, z, s, \ldots], \\ f_2[X_F(z, s, \ldots) \; Y_F(z, s, \ldots), \ldots, z, s, \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_q[X_F(z, s, \ldots), Y_F(z, s, \ldots), \ldots, z, s, \ldots] \end{array}\right.$$

et

$$(41)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_1[X_G(z, s, \ldots), Y_G(z, s, \ldots), \ldots, z, s, \ldots], \\ f_2[X_G(z, s, \ldots), Y_G(z, s, \ldots), \ldots, z, s, \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_q[X_G(z, s, \ldots), Y_G(z, s, \ldots), \ldots, z, s, \ldots]. \end{array}\right.$$

Du contact supposé entre $F^{(n-p)}$ et $J^{(n-q)}$ il résulte que les fonctions composées (40) ont des valeurs initiales nulles, ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement. Si l'on compare alors (40) à (41), il résulte du contact supposé entre $F^{(n-p)}$ et $G^{(n-p)}$ et de l'alinéa I, combinés avec la règle des fonctions composées, que les fonctions composées (41) jouissent de cette même propriété : les figures $G^{(n-p)}$, $J^{(n-q)}$ présentent donc, elles aussi, un contact d'ordre au moins égal à k.

28. Considérons les quatre figures

$$F^{(n-p)}, \quad G^{(n-p)},$$
$$F^{(n-q)}, \quad G^{(n-q)},$$

dont les deux premières sont à $n-p$ dimensions, les deux dernières à $n-q$ dimensions. (On suppose, indifféremment, $n-p$ supérieur, égal, ou inférieur à $n-q$.)

Cela étant, *s'il existe un contact d'ordre au moins égal à k :*

1° *entre* $F^{(n-p)}$ *et* $G^{(n-p)}$,
2° *entre* $F^{(n-q)}$ *et* $G^{(n-q)}$,
3° *entre* $F^{(n-p)}$ *et* $F^{(n-q)}$,

il y a certainement aussi un contact d'ordre au moins égal à k entre $G^{(n-p)}$ *et* $G^{(n-q)}$.

Il résulte en effet du théorème précédent (n° **27**) que le contact supposé de $F^{(n-p)}$ avec $G^{(n-p)}$ et avec $F^{(n-q)}$ entraîne, entre $G^{(n-p)}$ et $F^{(n-q)}$, un contact d'ordre au moins égal à k; puis, que le contact ainsi établi de $F^{(n-q)}$ avec $G^{(n-p)}$ et son contact supposé avec $G^{(n-q)}$ entraînent, entre $G^{(n-p)}$ et $G^{(n-q)}$, un contact d'ordre au moins égal à k.

29. Lorsqu'il existe entre deux figures un *contact proprement dit*, c'est-à-dire d'ordre supérieur à zéro, une dernière remarque est à noter : nous distinguerons, dans l'énoncé, deux cas, suivant que les figures offrent ou non le même nombre de dimensions.

I. *Si deux figures à $n-p$ dimensions ont entre elles un contact proprement dit, et si, pour l'une d'elles, un certain groupe de p coordonnées est, dans le voisinage du point de contact, exprimable par p fonctions olotropes des $n-p$ coordonnées restantes, ce même groupe l'est aussi pour l'autre figure.*

Supposons, par exemple, qu'il y ait cinq coordonnées, x, y, z, s, t, que les figures considérées, dont le contact est d'ordre supérieur à zéro, soient à trois dimensions, et que, pour l'une d'elles, le couple (x, y) soit exprimable par des fonctions olotropes de z, s, t : je dis que ce même couple (x, y) ne pourra manquer de l'être aussi pour l'autre figure.

Pour l'établir, il suffit de supposer la première figure définie par le

système (13), la deuxième par les formules (14), d'observer que les fonctions composées (15), ainsi que leurs diverses dérivées premières, s'annulent au point considéré, et de raisonner comme nous l'avons fait à l'alinéa III du n° **24**.

II. Considérons maintenant deux figures, $F^{(n-p)}$, $F^{(n-r)}$, dont les nombres respectifs de dimensions, $n-p$, $n-r$, soient inégaux, tels que l'on ait, par exemple, $n-p > n-r$, d'où $p < r$, et *supposons que ces deux figures aient entre elles un contact proprement dit.* Cela étant :

1° *Si, pour la figure* $F^{(n-p)}$, *un certain groupe,* $\mathcal{G}_p$, *de* p *coordonnées est, dans le voisinage du point de contact, exprimable par* p *fonctions olotropes des* $n-p$ *restantes, l'un au moins des divers groupes de* r *coordonnées obtenus par l'adjonction à* $\mathcal{G}_p$ *de* $r-p$ *coordonnées est, pour la figure* $F^{(n-r)}$, *exprimable par* r *fonctions olotropes des* $n-r$ *restantes.*

2° *Inversement, si, pour la figure* $F^{(n-r)}$, *un certain groupe,* $\mathcal{G}_r$, *de* r *coordonnées est exprimable par* r *fonctions olotropes des* $n-r$ *restantes, l'un au moins des divers groupes de* p *coordonnées extraits de* $\mathcal{G}_r$ *est, pour la figure* $F^{(n-p)}$, *exprimable par* p *fonctions olotropes des* $n-p$ *restantes.*

Supposons, par exemple, qu'il y ait cinq coordonnées, x, y, z, s, t; que les deux figures considérées soient, l'une à trois dimensions, l'autre à deux dimensions; et que ces deux figures soient respectivement définies, la première, F''', suivant le mode réduit, par le système

$$f_1(x, y, z, s, t) = 0, \qquad f_2(x, y, z, s, t) = 0.$$

la deuxième, F'', suivant le mode paramétrique, à l'aide des formules

$$\left\{\begin{aligned} x &= \xi(u, v), \\ y &= \eta(u, v), \\ z &= \zeta(u, v), \\ s &= \sigma(u, v), \\ t &= \tau(u, v). \end{aligned}\right.$$

Leur contact étant, par hypothèse, d'ordre supérieur à zéro, les deux

fonctions composées

$$(42)\qquad \begin{cases} f_1[\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v), \sigma(u, v), \tau(u, v), \\ f_2[\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v), \sigma(u, v), \tau(u, v) \end{cases}$$

ont des valeurs initiales nulles, ainsi que leurs diverses dérivées premières. Cela étant :

1° Si, pour la figure F‴, le groupe (x, y) est exprimable en fonctions olotropes des trois coordonnées restantes, l'un au moins des divers groupes (x, y, z), (x, y, s), (x, y, t) sera, pour la figure F″, exprimable en fonctions olotropes des deux coordonnées restantes. En d'autres termes, si le déterminant

$$(43)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

a une valeur initiale différente de zéro, l'un au moins des trois déterminants du second ordre extraits du tableau

$$(44)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \zeta}{\partial u}, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial u}, & \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial \tau}{\partial u}, & \dfrac{\partial \tau}{\partial v} \end{cases}$$

aura une valeur initiale différente de zéro.

2° Inversement, si, pour la figure F″, le groupe (x, y, z) est exprimable en fonctions olotropes des deux coordonnées restantes, l'un au moins des divers groupes (x, y), (x, z), (y, z) sera, pour la figure F‴, exprimable en fonctions olotropes des trois coordonnées restantes. En d'autres termes, si le déterminant

$$(45)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} & \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \tau}{\partial u} & \dfrac{\partial \tau}{\partial v} \end{vmatrix}$$

a une valeur initiale différente de zéro, l'un au moins des trois déterminants du second ordre extraits du tableau

$$(46)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{cases}$$

aura une valeur initiale différente de zéro.

Effectivement :

1° Supposons que le déterminant différentiel (43) ait une valeur initiale différente de zéro. En vertu de l'observation faite plus haut sur les fonctions (42), on a, au point de contact,

$$(47)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial u} = 0; \end{cases}$$

$$(48)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = A'\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} + B'\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} + C'\dfrac{\partial \tau}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} = A''\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} + B''\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} + C''\dfrac{\partial \tau}{\partial u}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = A'\dfrac{\partial \zeta}{\partial v} + B'\dfrac{\partial \sigma}{\partial v} + C'\dfrac{\partial \tau}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} = A''\dfrac{\partial \zeta}{\partial v} + B''\dfrac{\partial \sigma}{\partial v} + C''\dfrac{\partial \tau}{\partial v}. \end{cases}$$

Si donc les déterminants du second ordre extraits de (44) avaient tous des valeurs initiales nulles, les divers déterminants du second ordre

extraits du tableau

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\xi}{\partial u}, & \dfrac{\partial\xi}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial u}, & \dfrac{\partial\eta}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial u}, & \dfrac{\partial\zeta}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial u}, & \dfrac{\partial\sigma}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial\tau}{\partial u}, & \dfrac{\partial\tau}{\partial v} \end{array}\right.$$

auraient tous aussi des valeurs initiales nulles, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° Supposons que le déterminant différentiel (45) ait une valeur initiale différente de zéro. Des formules (47) et (48), groupées comme il suit,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial\xi}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial\zeta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial s}\dfrac{\partial\sigma}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial t}\dfrac{\partial\tau}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial\xi}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial\zeta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial s}\dfrac{\partial\sigma}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial t}\dfrac{\partial\tau}{\partial v} = 0; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial\xi}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{\partial\zeta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial s}\dfrac{\partial\sigma}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial t}\dfrac{\partial\tau}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial\xi}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{\partial\zeta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial s}\dfrac{\partial\sigma}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial t}\dfrac{\partial\tau}{\partial v} = 0, \end{array}\right.$$

on tire

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial s} = M'\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + N'\dfrac{\partial f_1}{\partial y} + P'\dfrac{\partial f_1}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial t} = M''\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + N''\dfrac{\partial f_1}{\partial y} + P''\dfrac{\partial f_1}{\partial z}; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_2}{\partial s} = M'\dfrac{\partial f_2}{\partial x} + N'\dfrac{\partial f_2}{\partial y} + P'\dfrac{\partial f_2}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial t} = M''\dfrac{\partial f_2}{\partial x} + N''\dfrac{\partial f_2}{\partial y} + P''\dfrac{\partial f_2}{\partial z}. \end{array}\right.$$

Si donc les déterminants du second ordre extraits de (46) avaient tous des valeurs initiales nulles, les divers déterminants du second

ordre extraits du tableau

$$\left\{\begin{array}{lllll} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial s}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial t} \end{array}\right.$$

auraient tous aussi des valeurs initiales nulles, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Figures enveloppes.

30. Désignons actuellement par

$$\begin{array}{lll} x, & y, & \ldots, \\ u, & v, & \ldots \end{array}$$

deux groupes d'indéterminées, en contenant respectivement h et k, et plaçons-nous dans l'espace

$$[[x, y, \ldots, u, v, \ldots]],$$

dont les $h+k$ dimensions sont supposées, indifféremment, soit réelles, soit imaginaires. Si, dans cet espace, deux figures à h dimensions sont l'une et l'autre en symptose (n° **20**) avec une même figure à $h-q$ dimensions ($0 \leqq q \leqq h$), et si, en tout point de cette dernière, elles ont l'une avec l'autre un contact proprement dit (n° **29**), elles seront dites avoir l'une avec l'autre, suivant cette dernière, un *raccordement de genre* $h-q$.

Les deux cas extrêmes d'un raccordement ainsi défini correspondent respectivement aux deux hypothèses $q=h$, $q=0$. Dans le premier, fourni par l'hypothèse $q=h$, la figure de raccordement est à zéro dimension et se réduit à un simple point : on a alors un raccordement de genre zéro. L'autre cas extrême, fourni par l'hypothèse $q=0$, est celui d'une figure à h dimensions, que l'on peut considérer comme étant en symptose avec elle-même; en vertu d'une proposition formulée au n° **26**, elle présente avec elle-même en chacun de ses points un contact d'ordre infini, et se raccorde avec elle-même dans toute son étendue : on a alors un raccordement de genre h.

Cela posé, considérons une famille, $\mathcal{F}_h$, de figures à h dimensions dépendant des q paramètres arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_q$, et définie à l'aide d'un système de k équations entre les $h+k$ coordonnées $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ et les q paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_q$; ce système,

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(u, v, \ldots, x, y, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_k(u, v, \ldots, x, y, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q) = 0, \end{cases}$$

est, comme de raison, supposé *résoluble par rapport à quelque groupe de k coordonnées*, $u, v, \ldots$ *par exemple*. On peut se proposer de rechercher s'il existe quelque figure fixe à h dimensions avec laquelle chacune des figures de la famille $\mathcal{F}_h$ présente un raccordement de genre $h-q$: une pareille figure, si elle existe, se nommera l'*enveloppe* des figures de la famille $\mathcal{F}_h$, chacune de ces dernières se nommera elle-même une *enveloppée*, et la figure de raccordement de l'enveloppe avec une enveloppée se nommera la *caractéristique* de cette enveloppée.

Dans le cas très particulier où l'on suppose $q = 0$, la figure (1), définie par un système d'équations où ne figurent que $u, v, \ldots, x, y, \ldots$ à l'exclusion de tout paramètre, est une figure fixe; l'enveloppe cherchée existe manifestement et se confond avec cette figure fixe, ainsi que les enveloppées et les caractéristiques.

Dans le cas général $q > 0$, nous raisonnerons comme il suit.

A chaque figure particulière de la famille $\mathcal{F}_h$, c'est-à-dire à chaque système de valeurs particulières des paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_q$, faisons correspondre, suivant une loi provisoirement indéterminée, une figure à $h-q$ dimensions, f_{h-q}, que nous représenterons, dans le mode paramétrique, à l'aide des formules

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{U} = \lambda(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ \mathrm{V} = \mu(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{X} = \psi(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ \mathrm{Y} = \omega(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

puis, cherchons à déterminer cette loi, c'est-à-dire les fonctions

$\lambda, \mu, \ldots, \psi, \omega, \ldots$, ou $U, V, \ldots, X, Y, \ldots$, de telle sorte que le lieu de f_{h-q} soit une figure à h dimensions se raccordant suivant f_{h-q} avec la détermination particulière correspondante de la figure (1).

Observons à cet effet que la figure cherchée, si elle existe, est représentée par les formules (2), où les a et les t sont variables; et que, d'autre part, une détermination particulière de la figure variable $\mathfrak{F}_h$ s'obtient en attribuant aux a, dans les relations (1), des valeurs constantes. Il faudra donc, pour exprimer le contact que l'on a en vue, former (n° **24**) les fonctions composées

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(U, V, \ldots, X, Y, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(U, V, \ldots, X, Y, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q), \end{array}\right.$$

y considérer comme des constantes les a qui y figurent explicitement en dehors de $U, V, \ldots, X, Y, \ldots$, comme des variables les a et les t qui y figurent implicitement par l'intermédiaire de $U, V, \ldots, X, Y, \ldots$, puis écrire que, dans cette hypothèse, les fonctions dont il s'agit et leurs dérivées premières sont nulles. Les relations résultantes,

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_i(U, V, \ldots, X, Y, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q) = 0 \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, k); \end{array}\right.$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_i}{\partial U}\dfrac{\partial U}{\partial a_1} + \dfrac{\partial f_i}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial a_1} + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial a_1} + \dfrac{\partial f_i}{\partial Y}\dfrac{\partial Y}{\partial a_1} + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial U}\dfrac{\partial U}{\partial a_2} + \dfrac{\partial f_i}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial a_2} + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial a_2} + \dfrac{\partial f_i}{\partial Y}\dfrac{\partial Y}{\partial a_2} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial U}\dfrac{\partial U}{\partial a_q} + \dfrac{\partial f_i}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial a_q} + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial a_q} + \dfrac{\partial f_i}{\partial Y}\dfrac{\partial Y}{\partial a_q} + \ldots = 0 \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, k); \end{array}\right.$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_i}{\partial U}\dfrac{\partial U}{\partial t_1} + \dfrac{\partial f_i}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial t_1} + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial t_1} + \dfrac{\partial f_i}{\partial Y}\dfrac{\partial Y}{\partial t_1} + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial U}\dfrac{\partial U}{\partial t_2} + \dfrac{\partial f_i}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial t_2} + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial t_2} + \dfrac{\partial f_i}{\partial Y}\dfrac{\partial Y}{\partial t_2} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial U}\dfrac{\partial U}{\partial t_{h-q}} + \dfrac{\partial f_i}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial t_{h-q}} + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial t_{h-q}} + \dfrac{\partial f_i}{\partial Y}\dfrac{\partial Y}{\partial t_{h-q}} + \ldots = 0 \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \end{array}\right.$$

devront être vérifiées quels que soient les a et les t. Au système [(3), (4), (5)] ainsi obtenu on peut d'ailleurs en substituer un plus simple, qui lui équivaut au point de vue de la recherche des $k+h$ fonctions U, V, ..., X, Y, ... : car, les relations dont il se compose devant être vérifiées quels que soient les a et les t, on tire de (3), par différentiation,

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial f_i}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial a_1}+\frac{\partial f_i}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial a_1}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial a_1}+\frac{\partial f_i}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial a_1}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial a_1}=0,\\
\frac{\partial f_i}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial a_2}+\frac{\partial f_i}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial a_2}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial a_2}+\frac{\partial f_i}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial a_2}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial a_2}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial f_i}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial a_q}+\frac{\partial f_i}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial a_q}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial a_q}+\frac{\partial f_i}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial a_q}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial a_q}=0
\end{array}\right.$$

$$(i=1, 2, \ldots, k)$$

et

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial f_i}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial t_1}+\frac{\partial f_i}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t_1}+\frac{\partial f_i}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial t_1}+\ldots=0,\\
\frac{\partial f_i}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial t_2}+\frac{\partial f_i}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial t_2}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t_2}+\frac{\partial f_i}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial t_2}+\ldots=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial f_i}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial t_{h-q}}+\frac{\partial f_i}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial t_{h-q}}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t_{h-q}}+\frac{\partial f_i}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial t_{h-q}}+\ldots=0
\end{array}\right.$$

$$(i=1, 2, \ldots, k).$$

Au point de vue de la recherche des $k+h$ fonctions U, V, ..., X, Y, ..., les équations (5) sont donc de simples conséquences des équations (3), et les équations (4) peuvent être remplacées par

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_1}=0, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial a_2}=0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial a_q}=0$$

$$(i=1, 2, \ldots, k).$$

L'application de notre théorie des contacts nous donne donc comme conditions les $k(q+1)$ équations finies

$$\left\{\begin{array}{l}
f_i(U, V, \ldots, X, Y, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q)=0,\\
\frac{\partial f_i}{\partial a_1}=0, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial a_2}=0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial a_q}=0
\end{array}\right.$$

$$(i=1, 2, \ldots, k);$$

ou, en remplaçant les notations majuscules U, V, ..., X, Y, ..., introduites pour la commodité du raisonnement, par les notations minuscules $u, v, \ldots, x, y, \ldots$,

$$(6)\qquad \begin{cases} f_i(u, v, \ldots, x, y, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q) = 0, \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial a_1} = 0, \quad \dfrac{\partial f_i}{\partial a_2} = 0, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial f_i}{\partial a_q} = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \end{cases}$$

31. Le nombre q des paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_q$ étant supérieur à zéro, et les k équations (1) étant résolubles par rapport aux k coordonnées $u, v, \ldots$, ainsi que nous l'avons supposé dans ce qui précède, si, dans le système (6), on considère $u, v, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q$ comme des fonctions inconnues des h variables $x, y, \ldots$, on peut formuler l'énoncé suivant :

La recherche d'une enveloppe des figures de la famille $\mathfrak{F}_h$ se ramène à celle d'un groupe de $k+q$ fonctions des h variables $x, y, \ldots$,

$$(7)\qquad \begin{cases} u = \upsilon(x, y, \ldots), \\ v = \varphi(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} a_1 = \alpha_1(x, y, \ldots), \\ a_2 = \alpha_2(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_q = \alpha_q(x, y, \ldots), \end{cases}$$

assujetties à la double condition : 1° que les q fonctions (8) aient, par rapport à quelque groupe de q variables extrait du groupe $(x, y, \ldots)$, un déterminant différentiel non identiquement nul; 2° que les $k+q$ fonctions (7) et (8), prises conjointement, vérifient identiquement les $k(q+1)$ équations (6).

De la démonstration ci-après il résultera d'ailleurs que, *lorsqu'un pareil groupe de fonctions existe, l'enveloppe et la caractéristique*, représentées, dans le mode réduit, l'une par le système (7), l'autre par le système [(7), (8)], *peuvent* également *se représenter, la première par le système* (1), *où $a_1, a_2, \ldots, a_q$ ont été remplacés par les*

valeurs (8), *la seconde par le système* [(1), (8)] (où $a_1, a_2, \ldots, a_q$ sont considérés comme des constantes).

I. *A toute enveloppe des figures* $\mathfrak{F}_h$ *correspond un groupe de* $k+q$ *fonctions*, (7), (8), *remplissant la double condition énoncée.*

Si l'on se reporte en effet à notre raisonnement du n° **30**, l'enveloppe d'existence supposée et la caractéristique se trouveront définies à l'aide d'un seul et même système de $k+h$ équations,

$$(9)\qquad \begin{cases} u = \lambda(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ v = \mu(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} x = \psi(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ y = \omega(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

pour avoir la caractéristique, il suffira, dans les relations (9) et (10), de considérer les a comme des constantes en laissant les t variables; pour avoir l'enveloppe, on laissera variables à la fois les a et les t. Comme l'enveloppe se raccorde avec chacune des enveloppées, et que, pour chacune des enveloppées, les k coordonnées $u, v, \ldots$ sont exprimables en fonctions olotropes de $x, y, \ldots$, la même chose aura lieu pour l'enveloppe (n° **29**, I), et il en résulte (n° **15**) que les formules (10) sont résolubles par rapport aux h quantités

$$(11)\qquad \begin{cases} a_1, & a_2, & \ldots, & a_q, \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_{h-q}; \end{cases}$$

après cette résolution, les h quantités (11) se trouveront exprimées à l'aide des h variables $x, y, \ldots$, et elles auront, par rapport à celles-ci, un déterminant différentiel non identiquement nul : on en déduit, par l'application des propriétés générales des déterminants, que les q premières, $a_1, a_2, \ldots, a_q$, auront elles-mêmes, par rapport à quelque groupe de q variables extrait de $(x, y, \ldots)$, un déterminant différentiel non identiquement nul.

Observons maintenant que les $k+h$ fonctions (9) et (10) vérifient identiquement les équations (6), quels que soient les a et les t : si donc

on opère sur (6) la transformation définie par (10), ce qui change les h quantités (11), et, du même coup, les k quantités u, v, ... définies par (9), en autant de fonctions x, y, ..., savoir

$$(7')\quad \begin{cases} u = \upsilon\ (x, y, \ldots), \\ v = \varphi\ (x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(8')\quad \begin{cases} a_1 = \alpha_1(x, y, \ldots), \\ a_2 = \alpha_2(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_q = \alpha_q(x, y, \ldots), \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} t_1 = \tau_1\ (x, y, \ldots), \\ t_2 = \tau_2\ (x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t_{h-q} = \tau_{h-q}(x, y, \ldots), \end{cases}$$

les relations résultantes sont identiquement vérifiées, quels que soient x, y, ... Les $k+h$ fonctions (7'), (8'), (12) vérifient donc identiquement les équations (6), et, comme ces dernières ne contiennent pas les t, on peut dire que les $k+q$ fonctions (7'), (8') les vérifient identiquement.

Finalement, observons que les k équations (1), étant, d'après cela, des conséquences numériques du système [(7'), (8')], peuvent se mettre sous la forme

$$(12\ bis)\quad \begin{cases} \lambda_{1,1}(u-\upsilon) + \lambda_{1,2}(v-\varphi) + \ldots + \mu_{1,1}(a_1-\alpha_1) + \mu_{1,2}(a_2-\alpha_2) + \ldots + \mu_{1,q}(a_q-\alpha_q) = 0, \\ \lambda_{2,1}(u-\upsilon) + \lambda_{2,2}(v-\varphi) + \ldots + \mu_{2,1}(a_1-\alpha_1) + \mu_{2,2}(a_2-\alpha_2) + \ldots + \mu_{2,q}(a_q-\alpha_q) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_{k,1}(u-\upsilon) + \lambda_{k,2}(v-\varphi) + \ldots + \mu_{k,1}(a_1-\alpha_1) + \mu_{k,2}(a_2-\alpha_2) + \ldots + \mu_{k,q}(a_q-\alpha_q) = 0, \end{cases}$$

où les λ et les μ désignent des fonctions convenalement choisies de

$$u,\quad v,\quad \ldots,\quad x,\quad y,\quad \ldots,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_q;$$

observons en outre que les λ, en nombre k^2, forment certainement un déterminant différent de zéro, puisque les k équations (1) sont supposées résolubles par rapport aux k quantités u, v, ... Cela posé, l'enveloppe, représentée, dans le mode paramétrique, par le système [(9), (10)], où les a et les t sont variables, le sera tout aussi bien par

le système numériquement équivalent [(7′), (8′), (12)] (après résolution convenable de celui-ci) : elle le sera donc, dans le mode réduit, par les k formules (7′), ou, ce qui revient au même en vertu de l'observation précédente, par les k formules (1), où l'on aura tenu compte de (8′). De même, la caractéristique, représentée, dans le mode paramétrique, par le système [(9), (10)], où les a sont considérés comme des constantes et les t comme des variables, le sera tout aussi bien par le système [(7′), (8′), (12)] : elle le sera donc, dans le mode réduit, par les $k+q$ formules (7′) et (8′), ou, ce qui revient au même, par les $k+q$ formules (1) et (8′).

II. *Réciproquement, à tout groupe de $k+q$ fonctions*, (7), (8), *remplissant la double condition énoncée, correspond une enveloppe des figures $\mathfrak{F}_h$.*

Supposons en effet que les $k+q$ fonctions (7) et (8), prises conjointement, vérifient identiquement le système (6), quels que soient $x, y, \ldots$, et que les q fonctions (8) aient, par rapport à quelque groupe de q variables extrait de $(x, y, \ldots)$, un déterminant différentiel non identiquement nul.

Les k équations (1), qui font partie du système (6), étant identiquement vérifiées par les fonctions (7) et (8), peuvent, en vertu du raisonnement fait plus haut, se mettre sous la forme (12 *bis*), où les λ forment un déterminant différent de zéro, et, dès lors, le système [(1), (8)] équivaut numériquement au système [(7), (8)].

Les équations (8) étant, d'autre part, supposées résolubles par rapport à quelque groupe de q variables extrait de $(x, y, \ldots)$, considérons les $h-q$ variables restantes du groupe $(x, y, \ldots)$, et aux q équations (8) adjoignons les $h-q$ formules

$$(13) \qquad t_1 = \ldots, \qquad t_2 = \ldots, \qquad \ldots, \qquad t_{h-q} = \ldots,$$

égalant aux $h-q$ variables dont il s'agit autant de nouvelles indéterminées, $t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}$: du système (13) on peut alors tirer ces $h-q$ variables en fonctions des t, et, du système [(8), (13)], les h variables $x, y, \ldots$ en fonctions des a et des t; les h formules de résolution de ce dernier système ont d'ailleurs, par rapport aux a et aux t, un déterminant différentiel non identiquement nul.

En conséquence, si, dans les $k+h$ formules (7), (8), (13), on attribue aux a des valeurs particulières déterminées en laissant les t variables, on aura, après résolution par rapport à u, v, ..., x, y, ..., une représentation, dans le mode paramétrique, d'une certaine figure à $h-q$ dimensions, laquelle se trouvera représentée, dans le mode réduit, par les $k+q$ équations (7), (8) (telles qu'elles sont écrites), ou, ce qui revient au même, par les $k+q$ équations (1), (8).

Et si, dans ces mêmes formules (7), (8), (13), on laisse variables à la fois les a et les t, on aura, après résolution par rapport à u, v, ..., x, y, ..., une représentation, dans le mode paramétrique, d'une certaine figure à h dimensions, laquelle se trouvera représentée, dans le mode réduit, par les k équations (7) (telles qu'elles sont écrites), ou, ce qui revient au même, par les k équations (1), où l'on aura remplacé a_1, a_2, ..., a_q par les valeurs (8).

Cela posé, il résulte de notre hypothèse que les équations (6), où ne figurent pas les t, sont identiquement vérifiées, quels que soient x, y, ..., par les $k+h$ fonctions (7), (8), (13) : si donc on opère sur ces équations la transformation définie par [(8), (13)], qui change les h quantités x, y, ..., et, du même coup, les k quantités u, v, ... définies par (7), en autant de fonctions des a et des t, les relations résultantes sont identiquement vérifiées quels que soient les a et les t. Cette conséquence, rapprochée des remarques précédentes et du raisonnement exposé au n° **30**, achève notre démonstration.

32. Il convient de noter que, *lorsqu'on suppose $k=1$, le nombre des fonctions* (7), (8) *est précisément égal au nombre des équations du système* (6), car tous deux ont pour valeur $1+q$: la possibilité du problème de l'enveloppe est alors le cas général, et son impossibilité le cas exceptionnel. C'est le contraire qui a lieu lorsqu'on suppose $k>1$.

(*A suivre.*)

A New Simple Theory of Hypercomplex Integers;

By L.-E. DICKSON.

1. *Introduction.* — Since this Memoir presents ideas of more general interest than its title would indicate, it has been so written that it may be read by those having no previous acquaintance with hypercomplex numbers. It opens up a broad subject which is destined to furnish a wide generalization of the theory of algebraic numbers.

A clear idea of the nature of our conclusions is furnished by §§ 4-6. These and the earlier sections are strictly elementary and self-contained, and make use only of facts proved here.

The immediate purpose of the Memoir is to present a new conception of hypercomplex integers which is entirely free from the fatal objections valid against the earlier conceptions of Hurwitz and Du Pasquier (§ 4). If their definitions are taken literally, there do not exist hypercomplex integers in the majority of algebras of hypercomplex numbers. If we discard a certain one of their assumptions, we obtain integers but are faced with the insurmountable difficulty that factorization into primes is not only not unique, but cannot be made unique by the introduction of ideals of any kind, a fact proved in this Memoir. These essential difficulties all disappear under the new definition proposed here.

In his various papers cited below, Du Pasquier merely determined the integers in each algebra in the classic lists, without investigating the properties of the integers. This investigation is made here for the algebras in 2 and 3 units, to obtain material for an adequate comparison of the old and new definitions, and such a comparison is always

decidedly in favor of the new. Incidentally, the new definition tells us automatically just what enlargement we need to make of a Du Pasquier system of integers in order to obtain a system having unique factorization into primes.

The new definition has been tested by all the classic algebras in 2, 3 and 4 units, and found in every case to give wholly satisfactory results, as well as to explain serious difficulties arising under the earlier definitions. Moreover, the new theory is far simpler to apply than the old, and more readily lends itself to the proof of general theorems, which are wholly lacking in the writings based on the old definitions.

2. *Hypercomplex numbers.* — The oldest example is that of ordinary complex numbers $a+bi$, where a and b are real and i denotes $\sqrt{-1}$. Next we have algebraic numbers, like

$$x = a + b\sqrt{-3}, \qquad y = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4},$$

where now a, b, c are rational numbers (integers or fractions). These are examples of hypercomplex numbers

$$x = a + b\,e\,(e = \sqrt{-3}), \qquad y = a + b\,e_1 + c\,e_2\,(e_1 = \sqrt[3]{2},\ e_2 = \sqrt[3]{4}),$$

the first having two *basals units*, $e_0 = 1$, e, and the second three basal units $e_0 = 1$, e_1, e_2. The numbers a, b or a, b, c, which are multiplied into the units, are called *coordinates*. The units satisfy the relations

$$e^2 = -3; \qquad e_1^2 = e_2, \qquad e_1 e_2 = e_2 e_1 = 2, \qquad e_2^2 = 2e_1.$$

We may and shall ignore the values of the units as radicals, and employ these relations to express any product (or square) of the units as a linear function of the units. The same is therefore true as to the product of any two numbers x or any two numbers y. We call such a set of relations the *multiplication table* of the units.

We give another important example needed later. Let

$$(1) \quad e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Then any two-rowed square matrix x may be expressed in terms of these four as follows

$$(2) \qquad x = \begin{pmatrix} x_0 & x_2 \\ x_1 & x_3 \end{pmatrix} = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

since the product of matrix e_0 by x_0 is a similar matrix having the element x_0 in place of 1. The general matrix x is thus expressed as a hypercomplex number with the four basal units e_0, e_1, e_2, e_3, whose multiplication table is (¹)

$$(3) \qquad e_0^2 = e_0, \qquad e_3^2 = e_3, \qquad e_0 e_2 = e_2 e_3 = e_2, \qquad e_3 e_1 = e_1 e_0 = e_1,$$
$$e_2 e_1 = e_0, \qquad e_1 e_2 = e_3,$$

together with the relations which state that all further squares and products are zero.

Instead of adding or multiplying these hypercomplex numbers, we may (more quickly) add or multiply the corresponding matrices x. To find the element in the rth row and cth column of the product of x by a similar matrix x', we multiply the elements of the rth row of x by the corresponding elements of the cth column of x' and add the two products. For example,

$$x' = \begin{pmatrix} x_3 & -x_2 \\ -x_1 & x_0 \end{pmatrix}, \qquad x x' = \begin{pmatrix} x_0 x_3 - x_1 x_2 & 0 \\ 0 & x_0 x_3 - x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Hence x and x' are roots of

$$(4) \qquad x^2 - (x_0 + x_3) x + (x_0 x_3 - x_1 x_2) \varepsilon = 0, \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Here $\varepsilon = e_0 + e_3$ plays the rôle of unity in multiplication. Thus every two-rowed square matrix x is a root of a quadratic equation. Matrices are known to obey the associative law of multiplication $xy.z = x.yz$.

In the same manner, we can express all n-rowed square matrices as hypercomplex numbers in n^2 basal units. Such a matrix x is the

---

(¹) If we write e_{11} for e_0, e_{21} for e_1, e_{12} for e_2, and e_{22} for e_3, we may express the multiplication table (of 16 products) in the compact form

$$e_{ij} e_{jk} = e_{ik}, \qquad e_{ij} e_{lk} = 0 \qquad (l \neq j).$$

root ([1]) of an equation of degree n whose constant term is the determinant of x and is called the *norm* of x. Hence the norm of a product is the products of the norms of the factors.

In general, we shall consider only hypercomplex numbers ([2])

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \tag{5}$$

with rational coordinates $x_0, \ldots, x_n$ and a multiplication table

$$e_i e_j = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{ijk} e_k \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n), \tag{6}$$

where the constants γ_{ijk} are rational numbers. The product of x by

$$y = y_0 e_0 + \ldots + y_n e_n$$

is defined to be the number obtained from $\Sigma x_i y_j e_i e_j$ by replacing $e_i e_j$ by its expression (6). We agree that x and y are equal if and only if $x_0 = y_0, \ldots, x_n = y_n$. We assume the associative law and the existence of a (unique) *principal unit* ε such that $\varepsilon x = x\varepsilon = x$ for every hypercomplex number x; we shall often write 1 for ε. If r is a rational number, rx denotes $\Sigma(rx_i)e_i$. We define $x + y$ to be

$$(x_0 + y_0)e_0 + \ldots + (x_n + y_n)e_n.$$

Hence the set of all numbers (5) with rational coordinates is closed under addition, subtraction, and multiplication. It is called a rational

---

([1]) For a very simple proof, see the second foot-note in § **15**.

([2]) We may identify e_j with the matrix having the element γ_{ijk} in the $(i+1)$ th row and $(k+1)$ th column; then relations (6) hold in matrices. For example, if

$$e_0^2 = e_0, \qquad e_1 e_0 = e_0 e_1 = e_1, \qquad e_1^2 = -e_0,$$

then

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hence ordinary complex numbers $x_0 + x_1 i$ may be expressed as matrices

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ -x_1 & x_0 \end{pmatrix}.$$

linear associative algebra with a principal unit (briefly a rational *algebra*), or a rational hypercomplex number system.

Since $\varepsilon, x, x^2, \ldots, x^{n+1}$ are linear homogeneous functions of $e_0, \ldots, e_n$ with rational coefficients, some linear combination of them with rational coefficients is zero. Hence x satisfies an unique equation of lowest degree with rational coefficients and leading coefficient unity. This is called the *rank equation* when the coordinates of x are arbitrary rational numbers. Its constant term is called the *norm* of x and designated $N(x)$.

3. *Preliminary survey of hypercomplex integers.* — Gauss called $a + bi$ a complex integer if a and b are rational integers; every complex integer decomposes into complex primes uniquely apart from unit factors, $\pm 1, \pm i$.

For $\theta = \sqrt{-3}$, we might call $a + b\theta$ a quadratic integer if and only if a and b are rational integers. But 4 would then have two essentially different factorizations

$$4 = 2 \times 2, \qquad 4 = (1 + \theta)(1 - \theta)$$

into indecomposable integers $2, 1 + \theta, 1 - \theta$, no one of which is the product of another by a unit, necessarily ± 1. By a *unit* is meant a (quadratic) integer $u = a + b\theta$ which divides 1, so that there exists another integer v such that $uv = 1$. Then $N(u)N(v) = 1$, where $N(u) = a^2 + 3b^2$ is a rational integer. Hence $N(u) = 1$, $a = \pm 1$, $b = 0$, and $u = \pm 1$.

We may avoid all such double factorizations by including among our (algebraic) integers not only the numbers $a + b\theta$ in which a and b are rational integers, but also those in which a and b are both halves of odd integers. Then

$$u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta, \qquad u' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\theta$$

are units since they are algebraic integers whose product is 1. The only units are here $\pm 1, \pm u, \pm u'$. Thus the second of the above factorizations of 4 may now be written in the form $4 = (2u)(2u')$, which

is not regarded as essentially different from $4 = 2 \times 2$, just as the latter is not distinguished from $4 = (-2)(-2)$.

A still simpler example will show the wisdom of enlarging certain proposed systems of integers. Let the system S be composed of unity and all positive *even* integers, This system is evidently closed under multiplication. Then 60 has two (and only two) decompositions into indecomposables of S :

$$60 = 2 \times 30, \qquad 60 = 6 \times 10,$$

where no one of 2, 6, 10, 30 is a product of two numbers, each not the unique unit 1, of S, so that all four are indecomposable. We evidently restore unique factorization into indecomposables by annexing to S all positive odd integers.

An algebraic number is called integral if and only if it is a root of an equation having rational integral coefficients and having unity as the coefficient of the highest power of the unknown. For example, $x = a + b\sqrt{m}$ is a root of

$$x^2 - 2ax + (a^2 - mb^2) = 0,$$

which, for $m = -1$, has rational integral coefficients only when a and b are both rational integers, so that we have Gauss's complex integers $a + bi$. For $m = -3$, the coefficients are rational integers only when a and b are either both rational integers or both halves of odd integers (see above). For $m = -3k^2$, where k is a rational integer, a and kb have the values just mentioned, so that the coordinate b of the algebraic integer x may have the denominator $2k$.

There is no point in studying factorization in the set A of all integral algebraic numbers. For, if a is any rational integer,

$$a = a_1^2 = a_2^4 = a_3^8 = \ldots,$$

where $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ are roots of $x^2 = a$, $x^4 = a$, $x^8 = a$, ..., and hence belong to A, so that the factorization of a within A would never terminate. Hence in the theory of algebraic numbers we confine our attention to the rational functions with rational coefficients of a particular algebraic number. Then uniqueness of factorization into primes

either holds true or can always be secured by the introduction of Dedekind's ideals. The above definition of algebraic integers led to this wholly satisfactory conclusion and is therefore a thoroughly satisfactory definition.

However, this definition fails in general for hypercomplex numbers. For example, let us call a two-rowed square matrix (2) integral if and only if its four elements are rational and the coefficients of the quadratic equation (4) satisfied by it are rational integers. Then, if k is an arbitrary rational integer $\neq 0$,

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & k^{-1} \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

is an integral matrix, since it is a root of $x^2 - 1 = 0$ by $M^2 = \varepsilon$. But

$$P = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad S = M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

are neither integral matrices, since the middle coefficient of (4) is $\frac{5}{2}$ for P, and the constant term is $-\frac{9}{2}$ for S. Hence this set of integral matrices is closed neither under multiplication nor under addition.

Historically the first definition of hypercomplex integers was that made for the case of quaternions

$$q = a + bi + cj + dk$$

by R. Lipschitz (¹). The multiplication table of the basal units (²) is

$$(7) \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

(¹) *Journal de Math.*, série 4, t. II, 1886, p. 393-439.

(²) They may be defined in terms of the matrix units (1) as follows :

$$1 = e_0 + e_3, \qquad i = \sqrt{-1}\,(e_3 - e_0), \qquad j = e_2 - e_1,$$
$$k = -\sqrt{-1}\,(e_2 + e_1),$$

Or we may define $1, i, j, k$ as 4-rowed square matrices with rational integral elements by means of the last note in § 2.

He called q an integral quaternion if and only if a, b, c, d are rational integers. But we then have three essentially different factorizations of 2 into prime quaternions $1+i$, $1+j$, $1+k$:

$$(8) \qquad 2 = -i(1+i)^2, \qquad 2 = -j(1+j)^2, \qquad 2 = -k(1+k)^2,$$

while $1+i$ is not the product of $1+j$ or $1+k$ by a unit, here ± 1, $\pm i$, $\pm j$, or $\pm k$.

A. Hurwitz [1] avoided all such difficulties by including among the integral quaternions not only those of Lipschitz, but also all quaternions whose coordinates are all halves of odd numbers. Now the three factorizations (8) are no longer essentially different; for example,

$$1+j = (1+i)u, \qquad u = \frac{1}{2}(1-i)(1+j) = \frac{1}{2}(1-i+j-k),$$

and the integral quaternion u is a unit since $uu' = 1$, where

$$u' = \frac{1}{2}(1+i-j+k)$$

is an integral quaternion. Hurwitz's system of integral quaternions is closed under addition, subtraction, and multiplication, and they have unique factorization into prime quaternions when the arrangement of the norms of those primes is prescribed.

We do not obtain satisfactory results by following the definition of integral algebraic numbers and calling a quaternion q integral if and only if its coordinates are rational and the coefficients of the quadratic equation satisfied by q and its conjugate

$$q' = a - bi - cj - dk$$

are rational integers. For,

$$Q = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$$

would be integral since $Q^2 = -1$, and $Q - i$ not integral being a

---

[1] *Göttinger Nachrichten*, 1896, p. 311-340; amplified in his *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen* (Berlin, 1919).

root of $x^2 + \frac{4}{5} = 0$. Thus the difference of the integral quaternions Q and i is not integral.

A. Hypercomplex integers as defined by Hurwitz and Du Pasquier. — Our aim is to select the integers from the set of all hypercomplex numbers (5) with rational coordinates, having a multiplication table (6) in which the γ_{ijk} are given rational numbers. In brief we seek the arithmetic of a given rational algebra.

Although the definition by Hurwitz was stated only for quaternions, it may be expressed in general form as follows.

Within a rational hypercomplex number system [*cf.* (5), (6)] a system of *integral* hypercomplex numbers shall have the following properties :

B (basis) : The system has a finite basis (i. e., it contains numbers $q_1, \ldots, q_k$ such that every number of the system is expressible in the form $\Sigma c_i q_i$, where each c_i is a rational integer);

C (closure) : The system is closed under addition, subtraction, and multiplication;

U (units) : The system contains the basal units $e_0, \ldots, e_n$;

M (maximal) : The system is a maximal (i. e., it is not contained in a larger system having properties B, C, U).

The only modification made by Du Pasquier [1] was to replace U by the weaker assumption U_1:

U_1 (unit 1) : The systems contains the principal unit 1.

We proceed to show that each of these definitions fails completely for the algebra with two basal units 1 and e, where $e^2 = 0$. Any system has a basis 1, $q = r + se$, where r and s are fixed rational numbers, $s \neq 0$. Since q^2 is in the system by C, we must have $q^2 = a + bq$, where a and b are rational integers. Hence

$$r^2 = a + br, \qquad 2rs = bs; \qquad 2r = b, \qquad r^2 = -a.$$

Thus r is a rational integer, so that any system has the basis 1, se,

---

[1] *Vierteljahrsschrift Naturf. Gesell. Zürich*, t. 54, 1909, p. 116-148; *L'enseignement math.*, t. 17, 1915, p. 340-343 ; t. 18, 1916, p. 201-260.

where s is rational. This system is contained in that having the basis, $1, te$ if and only if $\frac{s}{t}$ is a rational integer. Since therefore the system $(1, se)$ is contained in the larger system $\left(1, \frac{1}{2}se\right)$, and the latter is contained in the still larger system $\left(1, \frac{1}{4}se\right)$, etc., there exists no maximal system. In other words, there exist no hypercomplex integers in this algebra.

The same conclusion holds true also for Hurwitz's definition, which adds the requirement U that e shall occur in the system $(1, se)$ and hence that s be the reciprocal of a rational integer.

Suppose we omit the requirement M that the system be a maximal. It is to be anticipated (§ 3) that the laws of divisibility in a chosen system will not be as simple as in a larger (existing) system, nor the laws in the latter as simple as in a still larger (existing) system, and so on to infinity, and hence that the laws in the chosen system will be extremely complicated. This conjecture is confirmed in § 5.

5. *Insurmountable difficulties in any Hurwitz or Du Pasquier binary arithmetic with* $e^2 = 0$. — We shall examine the laws of divisibility in the system having the basis $1, se$, where s is a chosen rational number $\neq 0$. Without disturbing the relation $e^2 = 0$, we may take se as a new basal unit e. Hence we may take $s = 1$.

Then the integers are $x + ye$, where x and y are rational integers. Since $x + ye$ is a root of $(\omega - x)^2 = 0$, its norm is x^2. Hence $x = \pm 1$ for a unit. Conversely, $\pm 1 + ke$ is a unit when k is any rational integer, since its product by $\pm 1 - ke$ is 1. Write

$$c_0 = 3, \qquad c_1 = 3 + e, \qquad c_2 = 3 + 2e.$$

Then

$$(9) \qquad c_1 c_2 = c_0^2 u, \qquad c_0 c_2 = c_1^2 v, \qquad c_0 c_1 = c_2^2 v,$$

where $u = 1 + e$, and $v = 1 - e$ are units. No one of c_0, c_1, c_2 can be obtained from another one of them by multiplication by units both on the left and right. For if u_k denotes $\pm 1 + ke$,

$$u_k c_j u_l = c_n, \qquad n = j \pm 3(l + k) \equiv j \pmod 3.$$

Finally, since no integer has the norm 3, c_j is not the product of two integers neither of which is a unit, and hence is a prime. Thus, by (9), we have two essentially different decompositions $c_0 c_2$ and c_1^2 of the same integer into primes.

Nor is it possible to restore unique factorization into primes by the introduction of ideals, however defined. It is understood that in introducing ideals, each integer whose norm is not zero, and its associates (i. e., all products of it on both sides by arbitrary units), shall correspond to the same unique ideal, and that the product of two integers corresponds to the ideal which is the product of the two ideals corresponding to the two integers, and finally that the ideal I corresponding to the units plays the rôle of unity in the multiplication of ideals and has no ideal factor other than I. Hence the totality of ideals contains a set of ideals simply isomorphic with the set of classes of associated integers.

Then c_0, c_1, c_2 correspond to distinct ideals C_0, C_1, C_2, no one the unit ideal I, such that, by (9),

$$C_1 C_2 = C_0^2, \qquad C_0 C_2 = C_1^2, \qquad C_0 C_1 = C_2^2. \tag{10}$$

By the last two equations, any prime ideal factor D of C_0 divides both C_1 and C_2. Hence $C_i = D Q_i (i = 1, 2, 3)$, where Q_0, Q_1, Q_2 are distincts ideals. Thus

$$Q_1 Q_2 = Q_0^2, \qquad Q_0 Q_2 = Q_1^2, \qquad Q_0 Q_1 = Q_2^2.$$

No Q_i is I. For, if $Q_2 = I$, the third equation would give $Q_0 = Q_1 = I$. Hence the Q_i have the same properties as the C_i, and it is impossible to express the equal ideals $C_1 C_2$ and C_0^2 as the same product of prime ideals.

THEOREM I. — *For the algebra with the basal units* 1 *and* e, *where* $e^2 = 0$, *the definitions of integers by both Hurwitz and Du Pasquier fail since there is no maximal system. They fail also if we omit their requirement that a maximal system exists, since, if the integers are defined to be numbers of any chosen one of the infinitude of non-maximal systems, factorisation into indecomposable numbers is not unique and cannot be made unique by the introduction of ideals however defined.*

Similar insurmountable difficulties will be shown (§§ **11**, **12**) to arise for the majority of algebras in three units. This is doubtless true also of algebras in four units, for the majority of which there is certainly no maximal system (§ **14**) and hence, properly speaking, no integers under the definition of Hurwitz or Du Pasquier.

6. *New definition of hypercomplex integers.* — We shall employ the assumptions C (closure), U_1 (unit 1), M (maximal) and R :

R (rank equation) : For every number of the system, the coefficients of the rank équation are all rational integers.

We shall often obtain the same system of integers if we replace R by the weaker assumption N:

N (norm) : The norm of every number of the system is a rational integer.

Consider the algebra with the units 1, e, where $e^2 = 0$, for which we saw that the definitions by Hurwitz and Du Pasquier both fail. We make the assumptions C, U_1, M, N. Since $x = a + be$ is a root of $(\omega - a)^2 = 0$, we have $N(x) = a^2$. Hence if x is in a system satisfing our assumptions, a is a rational integer. The unique maximal system (of integers) is evidently composed of all the $x = a + be$, in which a is a rational integer and b is rational. The product of x by the unit $1 + ke$ is $a + (b + ak)e$, which, for $a \neq 0$, becomes a by taking $k = -\frac{b}{a}$. Hence every integer whose norm is not zero is associated with a rational integer a, and hence is factorable into primes uniquely apart from unit factors.

Our unique system of integers is the aggregate of the integers in the infinitude of systems obtained in § **4** by the definition of either Hurwitz or Du Pasquier. The insurmountable difficulties, which arose when they chose as their integers the numbers of any one of their systems, have now been shown to disappear for our properly chosen enlargement of their too restricted system. This enlargement was accomplished by the abandonment of their strong assumption B of a finite basis and the replacement of it by the weaker assumption N about the norm (*cf.* § **8**).

THEOREM II. — *All of the difficulties mentioned in Theorem I*

disappear under the new définition of integers, which now decompose into primes uniquely.

7. *Characteristic equations, property of* $N(x)$. — To define the characteristic equations, note that, by (6),

$$x e_j = \sum_{k=0}^{n} y_{jk} e_k, \qquad y_{jk} = \sum_{i=0}^{n} x_i \gamma_{ijk}.$$

Writing the first equation in full for $j = 0, 1, \ldots, n$, we get

$$\begin{array}{l} (y_{00} - x) e_0 + y_{01} e_1 \qquad + \ldots + y_{0n} e_n = 0, \\ y_{10} e_0 \qquad + (y_{11} - x) e_1 + \ldots + y_{1n} e_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n0} e_0 \qquad + y_{n1} e_1 \qquad + \ldots + (x_{nn} - x) e_n = 0. \end{array}$$

When x is replaced by an ordinary variable ω, the determinant of the coefficients of $e_0, \ldots, e_n$ is

$$\delta(\omega) = \left| \sum_{i=0}^{n} \gamma_{ijk} x_i - \delta_{jk} \omega \right|,$$

where $\delta_{jj} = 1$, $\delta_{jk} = 0$ if $j \neq k$. We call $\delta(\omega)$ the *right-hand characteristic determinant* of x. Let $C_0(\omega), \ldots, C_n(\omega)$ denote the adjoint minors of the elements of j th column. Let $\varepsilon = \Sigma \varepsilon_j e_j$ be the principal unit. Multiply the above linear equations by $C_0(x)\varepsilon, \ldots, C_n(x)\varepsilon$ on the left and add. We evidently get $\delta(x) e_j = 0$. Multiply this by ε_j and sum for $j = 0, 1, \ldots, n$; we get $\delta(x)\varepsilon = 0$. Hence x is a root of the right-hand characteristic equation $\delta(\omega) = 0$. It is understood that, besides substituting x^k for ω^k, we multiply the constant term $\delta(0) = \Delta(x)$ by ε.

Similarly, every hypercomplex number x is a root of its left-hand characteristic equation $\delta'(\omega) = 0$, obtained by starting from $e_j x$ instead of the above $x e_j$. Denote $\delta'(0)$ by $\Delta'(x)$. These characteristic determinants $\delta(\omega)$ and $\delta'(\omega)$ remain unaltered ([1]) under any linear transformation on the basal units e_i.

If y is a fixed and x a variable hypercomplex number, the rela-

([1]) Dickson, *Linear Algebras*, Cambridge University Tract, n° 16, 1914, p. 19.

tion $x' = xy$ defines a linear transformation on $x_0, \ldots, x_n$ with the determinant $\Delta'(y)$. Similarly, to y' corresponds a second transformation $x'' = x'y'$. Then to $y'' = yy'$ corresponds $x'' = xy''$, which is the product of the former transformations. Hence

$$\Delta'(y)\,\Delta'(y') = \Delta'(yy').$$

Similarly, the determinant of the linear transformation defined by $x' = yx$ is $\Delta(y)$, and we get

$$\Delta(y)\,\Delta(y') = \Delta(yy').$$

If the coordinates of x are arbitrary rational integers, its *rank equation* $R(\omega) = 0$ is the unique equation of lowest degree having the root x and coefficients which are polynomials in the coordinates of x, the leading coefficient being unity. Evidently $R(\omega)$ divides both $\delta(\omega)$ and $\delta'(\omega)$. Hence $N(x) \equiv R(0)$ divides both $\Delta(x)$ and $\Delta'(x)$. By the above definitions, either characteristic equation for $x = \varepsilon$, where ε is the principal unit, is $(1 - \omega)^{n+1} = 0$, and $R(\omega)$ is then a power of $1 - \omega$, whence $N(\varepsilon) = 1$. It now follows ([1]) that

$$N(y)\,N(y') = N(yy').$$

THÉOREM III. — *The norm of a product of any two hypercomplex numbers is equal to the product of their norms.*

8. *General remarks on the definitions of hypercomplex integers.* — In the new definition, we may replace assumption R by the assumption that, for every number of the system, the coefficients of the right-hand characteristic equation are rational integers, or by the similar property for the left-hand characteristic équation. The advantage in demonstrations is that we know the explicit form of the characteristic equations for a general algebra, but not that of the rank equation. Furthermore, we shall prove that the assumptions B and C of Hurwitz and Du Pasquier imply the property R of the rank equation.

THEOREM IV. — *If all the coefficients of the rank equation are*

([1]) DICKSON, *Comptes rendus du Congrès international des Mathématiciens*, (Strasbourg, 1920), Toulouse, 1921, § 5.

rational integers, those of either characteristic equation are rational integers, and conversely.

The converse follows from Gauss's lemma; if

$$\delta(\omega) = \omega^m + a_1\omega^{m-1} + \ldots + a_m$$

has rational integral coefficients and is divisible by

$$R(\omega) = \omega^r + A_1\omega^{r-1} + \ldots + A_r,$$

with rational coefficients, these coefficients A_i are all rational integers.

Next let $R(\omega)$ have rational integral coefficients. Then the roots of $R(\omega) = 0$ are integral algebraic numbers. But (¹) these roots include all the distinct roots of $\delta(\omega) = 0$. Hence the coefficients of the latter are integral algebraic numbers and also rational (since the coordinates x_i and γ_{ijk} are assumed to be rational), and hence are rational integers.

THEOREM V. — *For every system having the closure pooperty* C *and a finite basis composed* (²) *of as many linearly independent numbers as the algebra has basal units, the characteristic equations of each number of the system have rational integral coefficients.*

Such a system has a basis $E_0 = 1, E_1, \ldots, E_n$. We may take the E_i as new basal nnits of the algebra. By the closure property C, E_iE_j belongs to the system. By the property B of the basis, E_iE_j is equal to a linear function of $E_0, \ldots, E_n$ with rational integral coefficients. Hence the new constants of multiplication Γ_{ijk} are rational integers. The same is true of the coordinates X_i of every number $X = \Sigma X_iE_i$ of the system (property B). Hence either characteristic equation of X has rational integral coefficients. But the coefficients of that equation are invariant under every linear transformation of the basal units (§ **7**).

Hence *any system according to the definition of Du Pasquier is*

(¹) G. SCHEFFERS, *Math. Annalen*, t. 39, 1891, p. 302. — DICKSON, *Linear Algebras*, p. 22.

(²) Assumed by Du Pasquier (ref. in § 4) in finding his systems of 2-rowed square matrices, the only algebra for which he has given details of the work of finding maximal systems.

a system according to the new definition, but not conversely, so that the new maximal systems are usually not systems of Du Pasquier.

After the introduction of the new basal units E_i, the particular Du Pasquier system becomes the set of linear combinations of the E_i with rational integral coordinates and hence has property U; but this need not be true simultaneously of the remaining Du Pasquier systems of the same algebra (*cf.* § **16**). Hence after making a suitably chosen transformation of the basal units with rational coefficients, we obtain an algebra in which at least one Du Pasquier system is a Hurwitz system.

9. *General theory of integers of reducible algebras.* — A linear associative algebra S of hypercomplex numbers with s basal units whose coordinates range independently over all rational numbers, and having a principal unit ε, is called *rationally reducible* if it contains $\alpha + \beta = s$ numbers $e_1, \ldots, e_\alpha, E_1, \ldots, E_\beta$, not satisfiing a linear homogeneous equation with rational coefficients, such that

$$(11) \qquad e_i E_j = 0, \qquad E_j e_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, \alpha; j = 1, \ldots, \beta).$$

In the contrary case, S is called rationally irreducible.

Let S be rationally reducible. It is readily proved ([1]) that all squares and products of $e_1, \ldots, e_\alpha$ are linear functions of $e_1, \ldots, e_\alpha$ with rational coefficients, so that $e_1, \ldots, e_\alpha$ are the basal units of an algebra a with rational coordinates. Likewise, $E_1, \ldots, E_\beta$ are the basal units of an algebra A. Also, a and A have principal units e and E respectively, whose sum is ε.

Conversely, from any two linear associative algebras a and A with basal units e_i and E_j, principal units e and E, and rational coordinates, we evidently obtain a linear associative algebra S with the basal units $e_1, \ldots, e_\alpha, E_1, \ldots, E_\beta$, principal unit $e + E$, and rational coordinates, by postulating relations (11) and regarding $e_1, \ldots, E_\beta$ as satisfying no linear homogeneous equation with rationial coefficients.

We call S the *direct sum* of a and A and write $S = a + A = A + a$, and call a and A the *components* of S.

([1]) Dickson. *Linear Algebras*, p. 26, 27.

THEOREM VI. — *Consider systems of integers having properties* C, U_1, R (*and* M). *The first* (*or second*) *components of the numbers of any* (*maximal*) *system of integers of a rationally reducible algebra constitute a* (*maximal*) *system of integers of the first* (*or second*) *component algebra. Conversely, given a* (*maximal*) *system* $[x]$ *of integers* x *of an algebra* a *and a* (*maximal*) *system* $[X]$ *of integers* X *of another algebra* A, *if we add every number* x *to every number* X, *we obtain sums forming a* (*maximal*) *system of integers of the direct sum* $a + A$.

By Theorem IV, R implies that the coefficients of the right-hand characteristic equation are rational integers, and conversely.

(*i*). Let $[z]$ be any given system of integers z of a reducible algebra $S = a + A$. We have $z = x + X$, where x is a number $\Sigma x_i e_i$ of the first component algebra a, and X is a number $\Sigma X_k E_k$ of A. To determine the right-hand characteristic determinant of z for S (§ 7), we employ

$$z e_j = \sum_{i=1}^{\alpha} x_i e_i e_j + 0 \qquad (j = 1, \ldots, \alpha),$$

$$z E_j = 0 + \sum_{k=1}^{\beta} X_k E_k E_j \qquad (j = 1, \ldots, \beta).$$

Hence the right-hand characteristic determinant of z for S is equal to the product of that of x for a by that of X for A. Hence, by Gauss's lemma (§ 8), the polynominals in ω which are equal to the last two determinants have rational integral coefficients when z is in the system $[z]$. Hence the rank equations of x and X for a and A, respectively, have rational integral coefficients. Next, if also $z' = x' + X'$ is in $[z]$, then $zz' = xx' + XX'$ is in $[z]$ by the closure property C. We have now proved the first half of Theorem VI with both words maximal omitted.

(*ii*) Conversely, let $[x]$ by any given system of integers x of an algebra a, and $[X]$ any given system of integers of another algebra A. As explained above, we may regard a and A as the components of a rationally reducible algebra $S = a + A$ for which relations (11) hold. To every number x of $[x]$ add every number X of $[X]$. By the

facts in (i), these sums form a system $[z]$ of numbers of S having properties C, U_1, and R.

Further, let $[x]$ and $[X]$ be maximal systems of a and A, respectively. Then if $[z]$ is not a maximal system of S, it is contained in a larger system $[z']$ of S. By (i), the first components x' of the $z' = x' + X'$ form a system $[x']$ of numbers of a having properties C, U_1, R, and likewise for the second components X'. Either $[x']$ is larger than $[x]$ and contains it, or else $[X']$ is larger than $[X]$, contrary to hypothesis. This proves the last half of Theorem VI.

(iii) Returning to part (i), let $[z]$ be a maximal system of S. Then if $[x]$ is contained in a larger system $[x']$ of a, part (ii) shows that $[x']$ and $[X]$ determine a system $[z']$ of numbers $z' = x' + X$ of S, which have properties C, U_1, and R, such that $[z']$ contains the smaller system $[z]$, whereas $[z]$ was assumed to be a maximal. This completes the proof of the first half of Theorem VI.

THEOREM VII. — *The second part of Theorem VI holds also for systems of integers defined by properties* C, U_1, N *and* M.

We employ the known result (¹) that the rank equation of S is equal to the product of the rank equations of the component algebras a and A. From their constant terms, we get

$$N_S(z) = N_a(x) . N_A(X), \tag{12}$$

where each norm is taken with respect to the algebra indicated by the subscript.

Let there be given systems $[x]$ and $[X]$ of integers of a and A, respectively. To every x of $[x]$ add every X of $[X]$; these sums form a set $[z]$ of numbers $z = x + X$ of the direct sum $S = a + A$. Since $N_a(x)$ and $N_A(X)$ are rational integers by assumption N, $N_S(z)$ is a rational

(¹) For, if $r(\omega) = 0$ is the rank equation of a and $R(\omega) = 0$ that of A, x and X are both roots of $r(\omega).R(\omega) = 0$. But $z = x + X$ implies $z^k = x^k + X^k$, whence $f(z) = f(x) + f(X)$ for any polynomial f. Hence, z is a root of $r.R = 0$. That it is not the root of an equation of lower degree follows by use of $z = x + 0$ or $z = 0 + X$, since the coefficients of r are independent of the coordinates of X.

integer by (12). Thus $[z]$ has property N and evidently also properties C and U_1.

Suppose that $[z]$ is not a maximal, but is contained in a larger system $[z']$ of numbers of S having properties C, U_1, N. Since $e+0$ and $0+E$ are in $[z]$, they are in $[z']$. Then if $z'=x'+X'$ is any number of $[z']$, $ez'=x'$ and $x'+E$ are in $[z']$. Thus $N_S(x'+E)$ is a rational integer by hypothesis, and is equal to $N_a(x')$ by (12), since $N_A(E)=1$ by § 7 (end). Hence $N_a(x')$ is a rational integer. Hence the x' form a system $[x']$ of numbers of a having properties C, U_1, N. Likewise for the X'. Either $[x']$ is larger than $[x]$ and contains it, or $[X']$ is larger than $[X]$, contrary to the assumption that $[x]$ and $[X]$ are maximal.

From the third and fourth sentences of the preceding paragraph, we obtain the following analogue of the first part of Theorem VI.

THEOREM VIII. — *In a rationally reducible algebra* $S=a+A$, *consider systems of integers having properties* C *and* N *and containing* (¹) *the principal units* e *and* E *of* a *and* A. *The first components of the numbers of any (maximal) system of integers of* S *constitute a (maximal) system of integers of* a, *and the second components a system of* A.

Let a number $z=x+X$ of a system $[z]$ of integers be a unit, so that there exists a number $z'=x'+X'$ of $[z]$ such that $zz'=\varepsilon=e+E$. Then $xx'=e$, $XX'=E$, and x is a unit of a, and X of A. Conversely, if x and X are units of a and A, then $x+X$ is a unit of $a+A$.

If all integers of norm $\neq 0$ of the component algebras a and A factor into primes uniquely apart from unit factors, the same is true of the integers of $a+A$.

For example, consider the direct sum $(e_0)+(e_1)+(e_2)$:

$$e_i^2=e_i, \qquad e_ie_j=0\,(j\neq i), \qquad 1=e_0+e_1+e_2.$$

The rank and characteristic equations are $\Pi(x_i-\omega)=0$.

(¹) Without assuming that the systems contain e and E, I have verified the theorem for the three classic reducible algebras in 3 units (§ **11**), the proof being long only for $a=(e_0)+(e_1)$, $b=(e_2)$.

Hence under the new definition by properties C, U_1, R, M the integers are the numbers having rational integral coordinates. The latter are all $\geqq 0$ in the product of x by a suitably chosen unit $\pm e_0 \pm e_1 \pm e_2$. We restrict attention to integers x of norm $x_0 x_1 x_2 \neq 0$ and having positive integral coordinates. Denote x by (x_0, x_1, x_2). Then $xy = (x_0 y_0, x_1 y_1, x_2 y_2)$. Since

$$(p, q, rs) = (p, q, r)(1, 1, s), \quad (p, q, r) = (p, q, 1)(1, 1, r),$$

one of the coordinates of a prime is a rational prime and the remaining two are unity, and conversely every such number is a prime. Hence if the p_i, q_j, r_k are all rational primes, we have the following unique factorization into primes :

$$(p_1 \ldots p_a, q_1 \ldots q_b, r_1 \ldots r_c) = \prod_{i=1}^{a} (p_i, 1, 1) \cdot \prod_{j=1}^{b} (1, q_j, 1) \cdot \prod_{k=1}^{c} (1, 1, r_k).$$

Given that a number x of an algebra a is an integer if and only if specified coordinates x_i are rational integers and the remaining coordinates x_j are rational, and similarly for another algebra A, then we know from Theorem VI that in the direct sum $S = a + A$ a number $z = x + X$ is an integer if and only if the coordinates x_i and X_i are rational integers and the remaining coordinates x_j and X_j are rational. From $zz' = xx' + XX'$, where $z' = x' + X'$ is a unit, we conclude that an integer z is associated with those and only those integers whose first components are associated with x in a and whose second components are associated with X in A.

If a is one of the two rationally irreducible algebras in two basal units (§ **10**), or one of the three in three basal units (§ **12**), we shall find that an integer x of a, such that $N(x) \neq 0$, is associated with the abridged integer having the same coordinates x_i (which were rational integers in x), but having zeros in place of the coordinates x_j (which were rational in x). Hence for every rationally reducible algebra in 2, 3 or 4 basal units, each integer $z = x + X$, such that $N(z) \neq 0$, is associated with the abridged integer having each x_j and X_j zero, but with no further coordinates zero. Thus the laws of factorization in $a + A$ are the same as in $a' + A'$, where a' denotes the abridgement

of a to the basal units e_i, and A′ the abridgement of A to the units E_i.

But if a is the algebra of matrices (§ **13**), further coordinates are zero in the associates of x.

By the results in this section we may read off at once all the properties of the integers of a rationally reducible algebra from those of the components.

10. *Algebras in two units.* — We assume properties C, U_1, N, M. The unique maximal system of integers of the reducible algebra

$$(e_0) + (e_1) : e_0^2 = e_0, \qquad e_0 e_1 = e_1 e_0 = 0, \qquad e_1^2 = e_1, \qquad 1 = e_0 + e_1,$$

is composed of all the numbers $x_0 e_0 + x_1 e_1$ in which x_0 and x_1 are rational integers. Those of norm $x_0 x_1 \neq 0$ decompose into primes uniquely apart from unit factors $\pm e_0 \pm e_1$ (§ **9**). This algebra is another form of that with the basal units 1, e, where $e^2 = 1$. That with $e^2 = 0$ was treated in §§ **4**, **5**. That with $e^2 = -1$ has as integers Gauss's complex integers $x + yi$, where x and y are rational integers. For $e^2 = \pm 1$, the same results are obtained by Du Pasquier's definition.

11. *Reducible algebras in three units.* — Such an algebra is the direct sum of an algebra in two units e_0 and e_1 (§ **10**) and the algebra (e_2) in a single unit such that $e_2^2 = e_2$. Hence they are $(e_0) + (e_1) + (e_2)$;

$$\begin{array}{lllll} A + (e_2), & A = (e_0, e_1), & e_0^2 = e_0, & e_0 e_1 = e_1 e_0 = e_1, & e_1^2 = -e_0; \\ B + (e_2), & B = (e_0, e_1), & e_0^2 = e_0, & e_0 e_1 = e_1 e_0 = e_1, & e_1^2 = 0. \end{array}$$

Under the new definition (¹) of integers, Theorem VI shows that the integers of the first two algebras are the numbers all of whose coordinates are rational integers, while those of $B + (e_2)$ are $\Sigma x_i e_i$, where x_1 is rational and x_0 and x_2 are rational integers. For all three algebras, every integer of norm $\neq 0$ decomposes into primes uniquely apart from unit factors.

Only for the first two of these algebras are the integers the same by

(¹) Also with R replaced by N, the proof being longer.

Du Pasquier's [1] definition. In $B + (e_2)$ replace e_0 by $1 - e_2$; we get his system 3. He found that the most general system of numbers under his definition has the basis 1, αe_1, $\beta e_1 + g e_2$, where α and β are rational, $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{g_1}{g}$, while g_1 and g are rational integers, whence no systems is maximal and integers do no exist. Note that the aggregate of the numbers in all of his systems is the above system of integers under the new definition.

Let us ignore the assumption of a maximal, and take as integers the numbers of an arbitrarily chosen one of his systems. Without altering the multiplication table of the units, we may take αe_1 as a new unit e_1, which amounts to taking $\alpha = 1$. Then the integers have the basis

$$1 = e_0 + e_2, \qquad e_1, \qquad g^{-1} g_1 e_1 + g e_2.$$

Thus $g^2 e_2$ is integral. Write h for $g^2 + 3$, and

$$c_j = (3, j, h) = 3 + j e_1 + g^2 e_2,$$

where (x_0, x_1, x_2) denotes $\Sigma\, x_i e_i$. Since

$$(x_0, x_1, x_2)(y_0, y_1, y_2) = (x_0 y_0, x_0 y_1 + x_1 y_0, x_2 y_2),$$

we have

$$c_j c_k = c_l^2 \ (\text{if } j + k = 2l), \quad c_j u_l = c_{j+3l},$$
$$u_l = (1, l, 1), \qquad u_l u_{-l} = 1,$$

whence u_l is a unit. Thus

$$c_1^2 = c_0 c_2, \qquad c_2^2 = c_1 c_3 = c_1 c_0 u_1, \qquad c_0^2 = c_2 c_{-2} = c_2 c_1 u_{-1},$$

which may be written as

$$c_1 c_2 = c_0^2 u_1, \qquad c_0 c_2 = c_1^2, \qquad c_0 c_1 = c_2^2 u_{-1},$$

which are exactly of the type (9). The only possible units are $(1, l, \pm 1)$ and their negatives; but $(1, l, -1)$ is not one of our integers, and hence is not a unit, if $|g| > 2$. We find that no two of c_0, c_1, c_2 are associated numbers and that each is a prime. Hence (§ 5)

---

[1] *Bull. Soc. Math. de France*, t. XLVIII, 1920, p. 109-132.

factorization into primes is not unique and cannot be made unique by the introduction of ideals of any kind. This conclusion applies to each of the triply infinite number of systems of integers, one system for each set of values of α, β, g. We saw above how these difficulties disappear under the new definition.

12. *Irreducible Algebras in Three Units.* — We employ assumptions C, U_1, N, M, and find that the resulting integers have also properties U and R. For the algebra

$$T_1: \quad e_0 = 1, \qquad e_1^2 = e_2, \qquad e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2^2 = 0,$$

the rank and characteristic equations are all $(x_0 - \omega)^3 = 0$. The maximal system of integers is composed of all numbers x for which x_0 is a rational integer and x_1, x_2 are rational. If

$$x_0 \neq 0, \qquad x u = x_0, \qquad \text{for} \qquad u = 1 - \frac{x_1}{x_0} e_1 + \frac{x_1^2 - x_0 x_2}{x_0^2} e_2.$$

Hence x is a unit if $x_0 = 1$. Thus u is a unit, and any integer x of norm $x_0^3 \neq 0$ is associated with x_0, and hence decomposes into primes uniquely.

If we replace u by $1 - \frac{x_1}{x_0} e_1 - \frac{x_2}{x_0} e_2$, we see that all the preceding statements hold also for the algebra

$$T_2: \quad e_0 = 1, \qquad e_1^2 = e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2^2 = 0.$$

Finally, consider the algebra

$$T_3: \quad e_0^2 = e_0, \qquad e_1^2 = e_1, \qquad e_1 e_2 = e_2 e_0 = e_2,$$
$$e_0 e_1 = e_1 e_0 = e_0 e_2 = e_2 e_1 = e_2^2 = 0,$$
$$e_0 + e_1 = 1, \qquad R(\omega) = (x_0 - \omega)(x_1 - \omega), \qquad \delta(\omega) = (x_0 - \omega)(x_1 - \omega)^2.$$

Thus

$$N(x) = x_0 x_1, \qquad N(x+1) = (x_0 + 1)(x_1 + 1).$$

Hence if x is an integer, $x_0 x_1$ and $x_0 + x_1$ are rational integers. Thus the maximal system is composed of all numbers x for which x_0 and x_1 are rational integers, while x_2 is rational.

Denote x by (x_0, x_1, x_2). Then

$$(x_0, x_1, x_2)(y_0, y_1, y_2) = (x_0 y_0, x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_0). \tag{13}$$

For $u_z = (1, 1, z)$, $u_z u_{-z} = 1$, so that u_z is a unit. Now

$$u_w x u_z = (x_0, x_1, r), \qquad r = x_2 + x_0 w + x_1 z. \tag{14}$$

Hence, unless $x_0 = x_1 = 0$, we can find rational numbers w, z such that $r = 0$. Thus any integer of norm $x_0 x_1 \neq 0$ is associated with $x_0 e_0 + x_1 e_1$. By § **10**, the latter integers decompose into primes uniquely.

These satisfactory results regarding the integers of any of these three algebras T_i are in marked contrast to the results obtained by the definitions of either Hurwitz or Du Pasquier. Then there is no maximal system of integers, while if we select any system we meet essential difficulties.

First, for T_1, which is Du Pasquier's system 4, the most general system of integers was stated by him to have the basis 1, $g^{-1}\alpha^2 e_2$, $\alpha e_1 + \beta e_2$, where α and β are rational and g is a rational integer, so that no system is maximal. Taking

$$E_1 = \alpha e_1 + \beta e_2, \qquad E_2 = E_1^2 = \alpha^2 e_2,$$

we obtain T_1 written in capital letters E_i. Hence the new basis is 1, E_1, tE_2, where $t = \frac{1}{g}$. Write c_j for $3 + jtE_2$. We obtain (9), where now

$$u = 1 + tE_2, \qquad v = 1 - tE_2$$

are units. No two of the primes c_0, c_1, c_2 are associates. Hence (§ **5**), decomposition into primes is not unique, and cannot be made unique by the introduction of ideals of any kind.

For T_2, which is Du Pasquier's system 6, the most general system of integers was stated by him to have the basis, 1, αe_1, $\beta e_1 + \gamma e_2$, where α, β, γ are rational, so that no system is maximal. The last two numbers of the basis may be taken as new units E_1, E_2 without disturbing T_2. The further discussion for T_1 applies also here, where $t = 1$.

Du Pasquier's system 5 is

$$e_0 = 1, \qquad e_1^2 = 1, \qquad e_1 e_2 = e_2, \qquad e_2 e_1 = -e_2, \qquad e_2^2 = 0,$$

and his most general system of integers has the basis 1, αe_2, $g\mathrm{E} + \beta e_2$, where α and β are rational, g is a rational integer, and $\mathrm{E} = \frac{1}{2}(1 + e_1)$. Taking the latter as a new unit in place of e_1, and then $\varepsilon = \mathrm{E} + g^{-1}\beta e_2$ in place of E, we get

$$\varepsilon^2 = \varepsilon, \qquad \varepsilon e_2 = e_2, \qquad e_2 \varepsilon = 0, \qquad e_2^2 = 0,$$

and the basis 1, αe_2, $g\varepsilon$. The effect of taking αe_2 as a new e_2 is to take $\alpha = 1$. Finally, we write e_1 for ε, and e_0 for $1 - \varepsilon$, and get algebra T_3 and the basis 1, ge_1, e_2. Hence (p, q, r) is an integer if and only if p, q, r are rational integers such that $p \equiv q \pmod{g}$. By (13),

$$(p, q, r) = (p, 1, z)(1, q, w), \qquad \text{if} \qquad z + w = r.$$

All three numbers are integers if

$$p \equiv q \equiv 1 \pmod{g}.$$

As special cases, or by (14),

$$(p, 1, 0)\, u_z = (p, 1, z), \qquad u_w (1, q, 0) = (1, q, w).$$

Hence (p, q, r) is the product of units and $(p, 1, 0)$, $(1, q, 0)$. Also, $(p, q, 0)$ is the product of the last two. By (14) for $x = (p, p, 0)$, x is associated with (p, p, r) if and only if $r = p(w + z)$. Hence if $p \equiv 1 \pmod{g}$ and if r is not divisible by p, (p, p, r) and $(p, p, 0)$ are not associated, but have the same factorization apart from units. This property of (p, p, r) holds also for the product of (r, s, l) by (a, b, n), where

$$l = rw + sz, \qquad n = aw_1 + bz_1,$$

if $sn + al$ is not divisible by the greatest common divisor of ra and sb; for example, if r and b have a common factor not a divisor of $as(z + w_1)$.

THÉORÈME IX. — *For the six classic algebras in three units, the integers of the unique system obtained by the new definition have unique factorization into primes and the system is either identical (in the case of two reducible algebras) with the system of integers obtained by Du Pasquier's definition or else is the aggregate of the numbers in his infinitely many systems, no one of which is a maximal nor has satisfactory laws of factorization into primes.*

Thus the new definition succeeds when that of Du Pasquier fails, by causing the proper enlargement of every one of his systems which present serious difficulties to a system having no difficulties.

13. *The Associated Arithmetic.* — In § **12**, we proved that the integers of norm $\neq 0$ of the algebra T_3 in three basal units are associated (by multiplication by units) with the integers $x_0 e_0 + x_1 e_1$ of the algebra $S = (e_0) + (e_1)$. We shall say that the latter integers form the arithmetic associated with the arithmetic of the integers of T_3. And similarly in general.

14. *Algebras in Four Units.* — We make use of Study's (¹) list of the algebras into which any algebra in four units can be transformed by a real linear transformation on the units. Ten of them are rationally reducible, and the properties of their integers are obtained by inspection from the results in § **9**. Thirteen of them are rationally irreducible (although III_b is algebraically reducible). We shall discuss in §§ **16**, **17** the algebra of real quaternions and the algebra XII_b obtained from it by an imaginary transformation of the units.

There remain eleven algebras. For each of them, there is no maximal system under the definition of Du Pasquier (²), so that integers do not exist. Under the new definition by properties C, U_1, R, M, the integers are found by a mere inspection of the left-hand characteristic equation $\delta'(\omega) = 0$, while their essential properties are readily

(¹) *Monatshefte Math. Physik*, t. I, 1890, p. 305-309.

(²) *Comptes rendus du Congrès international des Mathématiciens* (Strasbourg, 1920); Toulouse, 1921, p. 164-175.

found. The notation V (13) means that the algebra is numbered V in Study's list and is system 13 in Du Pasquier's list. The notation $[x_0, x_1]$ means that $\Sigma x_i e_i$ is an integer (under the new definition) if and only if x_0 and x_1 are rational integers and the remaining coordinates x_2 and x_3 are rational.

For algebras V (13), IX (17), X (18), XI (19), XIV (22), and XVI (29), we have

$$\delta'(\omega) = (x_0 - \omega)^2 \qquad \text{and} \qquad [x_0].$$

The associated arithmetic is that of rational integers x_0.

For III_b (11) and XIII (20),

$$\delta'(\omega) = \{(x_0 - \omega)^2 + x_1^2\}^2 \qquad \text{and} \qquad [x_0, x_1].$$

The associated arithmetic is that of ordinary complex integers $x_0 + x_1 i$.

For VII (15), we employ new units

$$\mathrm{E}_0 = \frac{1}{2}(1 - e_1), \qquad \mathrm{E}_1 = \frac{1}{2}(1 + e_1), \; e_2, \; e_3,$$

and get

$$\mathrm{E}_0^2 = \mathrm{E}_0, \qquad \mathrm{E}_1^2 = \mathrm{E}_1, \qquad \mathrm{E}_1 e_2 = e_2, \qquad \mathrm{E}_1 e_3 = e_3, \qquad e_2 \mathrm{E}_0 = e_2, \qquad e_3 \mathrm{E}_1 = e_3,$$

all further products being zero. Then

$$\delta'(\omega) = (x_0 - \omega)^2 (x_1 - \omega)^2, \qquad [x_0, x_1].$$

For XIII_b (21), we employ as units the proceding E_0, E_1, and

$$\mathrm{E}_2 = \frac{1}{2}(e_2 - e_3), \qquad \mathrm{E}_3 = \frac{1}{2}(e_2 + e_3),$$

and get

$$\mathrm{E}_0^2 = \mathrm{E}_0, \qquad \mathrm{E}_1^2 = \mathrm{E}_1, \qquad \mathrm{E}_0 \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_2, \qquad \mathrm{E}_1 \mathrm{E}_3 = \mathrm{E}_3, \qquad \mathrm{E}_2 \mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2, \qquad \mathrm{E}_3 \mathrm{E}_0 = \mathrm{E}_3,$$

all further products being zero. Then

$$\delta'(\omega) = (x_0 - \omega)^2 (x_1 - \omega)^2, \qquad [x_0, x_1].$$

For XV (23), we employ new units E_0, E_1, e_2, e_3, and get

$$E_0^2 = E_0, \qquad E_1^2 = E_1, \qquad E_1 e_2 = e_2, \qquad E_1 e_3 = e_3, \qquad e_2 E_0 = e_2, \qquad e_3 E_0 = e_3,$$

all further products being zero. Then

$$\delta'(\omega) = (x_0 - \omega)^3 (x_1 - \omega), \qquad [x_0, x_1].$$

For the last three algebras the associated arithmetic is that of $(E_0) + (E_1)$, and hence is that of pairs of rational integers.

15. *Algebra and Arithmetic of Square Matrices.* — It was shown in § **2**, that all n-rowed square matrices with rational elements form a linear associative algebra in n^2 basal units. We shall now investigate maximal systems of such matrices having properties C, U_1, R.

The system S composed of all matrices whose elements are all rational integers has the properties C, U_1, R by § **2**. We shall now prove that it is a maximal. Suppose that S is contained in a larger system L having those properties. Thus L contains a matrix m whose elements are fractions having a least common denominator d, where $d > 1$. By a theorem due to H. J. S. Smith (¹), we can find square matrices p and q having rational integral elements of determinant unity such that $pmq = \delta$, where δ is a diagonal matrix all of whose elements outside the main diagonal are zero, while those in the diagonal are $\frac{d_1}{d}, \ldots, \frac{d_r}{d}, 0, \ldots, 0$ where r is the rank of m, the d_i are rational integers which are positive with the exception (when $r = n$) of d_n, whose sign is that of $|m|$, and d_i is a divisor of d_{i+1}. Any common divisor of d_1 and d would divide every d_i and hence divide the numerator of every element of m, contrary to the definition of d. Hence d_1 and d are relatively prime.

Since matrices p and q belong to S and hence to L, the product $pmq = \delta$ belongs to L by property C. We shall prove that δ does not

(¹) *Phil. Trans. London*, t. 151, 1861, p. 293; *Coll. Math. Papers*, t. I, p. 367; *Cf.* Bachmann, *Arith. Quadr. Formen*, t. IV, 1898, p. 294; Bôcher, *Introduction to Higher Algebra*, 1907, p. 264-267. *We first remove the rational factor* $\frac{1}{d}$ *from* m *and place it in front of* p.

have property R. If $R(\omega) = 0$ denotes the rank equation of the general n-rowed square matrix x, we obtain $R(\omega)$ by subtracting ω from each diagonal term of x. This classic theorem (¹) was verified in § 2 for $n = 2$.

For δ the rank equation becomes

$$\Pi\left(\frac{d_i}{d} - \omega\right) = 0.$$

Its coefficients are rational integers by the assumption R. Hence its roots are rational integers, whereas $\frac{d_1}{d}$ is not integral. In view of this contradiction, our system S is a maximal.

But this systems S is not the only maximal system. If Σ is any system of matrices with rational elements having properties C, U_1, R, M, and if t is any matrix such that both t and t^{-1} transform every matrix with rational elements into one with rational elements, we readily prove that t transforms Σ into a system of matrices having the same four properties. The conditions on t are evidently satisfied if (²) the elements of t are all products of rational numbers by the same number. This common factor may be omitted since it cancels from $t^{-1}mt$. Hence if we transform our maximal system S by any matrix having rational elements of determinant not zero, we obtain a maximal system of matrices with rational elements having properties C, U_1, R. We obtain in this way an infinitude of distinct maximal systems. For, if we employ as t the diagonal matrix whose diagonal

---

(¹) Let e_{ij} denote the matrix whose elements are all zero except that in the ith row and jth column, which is unity. Let x_{ij} be the element in the ith row and jth column of x. Then

$$x\,e_{ij} = x_{1i}\,e_{1j} + x_{2i}\,e_{2j} + \ldots + x_{ni}\,e_{nj}.$$

Transposing and keeping j fixed, but taking $i = 1, \ldots, n$, we have n equations the matrix of whose coefficients is derived from (x_{ij}) by subtracting $\omega = x$ from each diagonal term. The determinant D of this matrix is known to be an irreducible polynomial, when the x_{ij} are arbitrary. Thus the rank equation is $D = 0$.

(²) And only then for 2-rowed square matrices.

elements are $k_1, \ldots, k_n$, we see that t transforms (c_{ij}) into a matrix having $c_{ij}\frac{k_j}{k_i}$ as the element in the ith row and jth column. Since the $k's$ are arbitrary rational numbers $\neq 0$, we may take $k_1 = 1$ without loss of generality. For example, if $n = 2$,

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \qquad t^{-1}\begin{pmatrix} x_0 & x_2 \\ x_1 & x_3 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} x_0 & k x_2 \\ k^{-1} x_1 & x_3 \end{pmatrix}.$$

If in the final matrix we let x_0, x_1, x_2, x_3 range independently over all rational integers, we obtain a system S_k which is identical with S_l if and only if $k = \pm l$.

THEOREM X. — *There exist infinitely many maximal systems of n-rowed square matrices with rational elements having properties* C, U_1, R. *One such maximal system is composed of all the matrices with rational integral elements.*

Whether or not there exist maximal systems, not derivable from S by transformation, is not decided here and a decision is immaterial for our theory. In any case we would make an arbitrary selection of one maximal system and call its matrices integral. Fortunately the selection of S itself is wholly satisfactory, since the matrices of S have unique factorization into primes, as we proceed to prove.

Nothing is simpler ([1]) than the arithmetic of all matrices m with rational integral elements. Any such matrix u is a unit if and only if its determinant is ± 1; for, its adjoint matrix u' has rational integral elements, and $uu' = u'u = 1$. By the above discussion (with now $d = 1$), there exist units p and q such that $pmq \equiv \delta$, where δ is a diagonal matrix whose diagonal terms d_i are all positive integers or zero. Thus matrix m is associated with such a diagonal matrix δ. Hence unique factorization of matrices of non-vanishing determinants into prime matrices will follow if proved for diagonal matrices all of whose diagonal elements are positive rational integers. But this was proved for diagonal matrices near the end of § 9 (for the typical case $n = 3$),

([1]) In spite of the very long discussion by ideals, etc., by DU PASQUIER in his Zürich thesis (*Vierteljahrsschrift Naturf. Gesell. Zürich*, t. 51, 1906, p. 55-129; t. 52, 1907, p. 243-248).

since the product of two diagonal matrices $(d_1, \ldots, d_n)$ and $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ is $(d_1\delta_1, \ldots, d_n\delta_n)$.

Or, if we prefer, we may write $\delta = d_1 e_1 + d_2 e_2 + d_3 e_3$, where

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e_i^2 = e_i, \qquad e_i e_j = 0 \quad (j \neq i), \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 1,$$

which are the basal units of the algebra employed in § **9**. But there are now infinitely many units, while there were only eight.

THEOREM XI. — *The arithmetic of all n-rowed square matrices with rational integral elements is associated with the arithmetic of the direct sum* $(e_1) + (e_2) + \ldots + (e_n)$, *and has unique factorization into primes.*

16. *The Property* U. — An equivalent statement of the first theorem in § **15** is that the system S of n-rowed square matrices with rational integral elements is the unique maximal system of all matrices with rational elements having properties C, R, and U, where U states that all the basal units e_{ij} occur in the system.

The initial result in § **15** shows also that S is the unique maximal system of matrices with rational elements having properties B, C, U, so that the matrices (of S) having rational integral elements are the integral matrices according to Hurwitz's definition (§ **4**). For, if S is not a maximal system, we proved that it contains the diagonal matrix δ, and hence by property C also every power of δ. There is no finite basis (i. e., property B fails), since δ^n is not a linear function of the lower powers of δ with rational integral coefficients c_i. For, $\left(\frac{d_1}{d}\right)^n$ would then be equal to $\Sigma c_i \left(\frac{d_1}{d}\right)^i$ which is the quotient of a rational integer by d^{n-1}, whereas $\frac{d_1^n}{d}$ is not a rational integer.

Under Du Pasquier's [1] definition by properties B, C, U_1, M, a

---

[1] *Vierteljahrsschrift Naturf. Gesell. Zürich*, t. 51, 1906, p. 116-148; quoted in *l'Enseignement math.*, t. 18, 1916, p. 201-260.

long computation led him to all of the ∞^6 maximal systems of 2-rowed square matrices with rational elements, since the four basal matrices involve six arbitrary rational integers.

Hence, if we assume C and either B or R, we find a unique maximal system of matrices or an infinitude of maximal systems, according as we assume also U or U_1. However, we have an excellent reason for deciding not to assume U, in spite of its having led us to a simpler conclusion than does U_1. In fact, property U is not always invariant under a linear tsansformation of the basal units with rational (¹) coefficients, while the properties U_1, B, R, N, C, M are always all invariant. Expressed otherwise, a maximal system of integers containing all the basal units may transform into a system not containing all the new basal units.

Light is thrown on this question by the algebra derived from the algebra (7) of real quaternions by taking

$$E_3 = i\sqrt{-1}, \qquad E_2 = j\sqrt{-1}, \qquad E_1 = -k.$$

Thus

$$(15) \qquad E_1^2 = -1, \qquad E_2^2 = E_3^2 = +1, \qquad E_1E_2 = -E_2E_1 = E_3,$$
$$E_1E_3 = -E_3E_1 = -E_2, \qquad E_2E_3 = -E_3E_2 = -E_1.$$

Call x and x' conjugates if

$$x = x_0 + \Sigma x_i E_i, \qquad x' = x_0 - \Sigma x_i E_i.$$

Then

$$(16) \qquad N(x) = xx' = x'x = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Consider maximal systems of integers x with rational coordinates having properties C, U, N. Let x be an integer, so that $N(x)$ and $N(x+1)$ are rational integers. By their difference, the double of the

(¹) If the coefficients are rational integers of determinant ± 1 (the case of arithmetical equivalence), property U is invariant. When that property is postulated, we should not confine our investigation of all possible arithmetics to a study of a complete list of algebras no two of which are equivalent under transformations of the units with rational coefficients, but study the much larger list of algebras no two of which are equivalent under transformations with rational integral coefficients.

« absolute term » x_0 of x is a rational integer. By property C, $E_1 x$, $E_2 x$, $E_3 x$ are integers; their absolute terms are $-x_1, x_2, x_3$. Hence each $2x_i$ is a rational integer. Evidently $x_i = X_i + a_i$, where X_i is a rational integer and $a_i = 0$ or $\frac{1}{2}$. Then $x = X + a$, where X is an integer by property C. By C, $a = x - X$ is an integer. Write

$$a = \frac{1}{2}(A_0 + \Sigma A_i E_i), \qquad A_j = 0 \text{ or } 1.$$

By $N(a)$, $A_0^2 + A_1^2$ and $A_2^2 + A_3^2$ differ by a multiple of 4, while each sum is 0, 1, or 2; hence they are equal. Thus the only sets of values are

$$(17) \qquad (A_0, A_1, A_2, A_3) = (0, 0, 0, 0), \quad (0, 1, 1, 0),$$
$$(0, 1, 0, 1), \quad (1, 0, 1, 0),$$
$$(1, 0, 0, 1), \quad (1, 1, 1, 1).$$

An evident system I of integers satisfying our assumptions is composed of all the numbers X whose four coordinates are all rational integers. We shall examine the systems obtained by annexing to I one or more of the five numbers $a \neq 0$ corresponding to the sets (17) other than the first set.

First, annex the a corresponding to either the second or fifth set (17), viz.,

$$(18) \qquad e_1 = \frac{1}{2}(E_1 + E_2), \qquad e_3 = \frac{1}{2}(1 + E_3).$$

Since $e_1 E_2 = e_3$, $e_3 E_2 = e_1$, the enlarged system contains both e_1 and e_3 by property C. If we annex also the a corresponding to either the third or fourth set (17), viz.,

$$(19) \qquad e'_1 = \frac{1}{2}(E_1 + E_3), \qquad e'_3 = \frac{1}{2}(1 + E_2),$$

we annex both, since $E_3 e'_1 = e'_3$, $E_3 e'_3 = e'_1$.

But

$$e'_3 + e_1 - E_2 = \frac{1}{2}(1 + E_1)$$

has the norm $\frac{1}{2}$, and we do not obtain a system satisfying our assumptions. Hence the only possible maximal systems are I, the system S_1 obtained by annexing the pair (18) to I, and the system S_2 obtained by annexing the pair (19) to I. For, the a corresponding to the sixth set (17) is equal to $e_1 + e_3$ and to $e'_1 + e'_3$ and hence is in both S_1 and S_2.

The system S_1 contains (18) and all the E_i, and hence also

$$(20) \qquad e_0 = \frac{1}{2}(1 - E_3) = e_3 - E_3, \qquad e_2 = \frac{1}{2}(E_2 - E_1) = e_1 - E_1.$$

Conversely, from (18) and (20) we obtain by additions and subtractions the three E_i and 1. The multiplication table of the e_i is given by (3). Hence the system S_1 is composed of the linear combinations of the e_i with rational integral coefficients, and has properties C, U, M. While we may deduce the new norm from (16) by expressing the old coordinates x_i in terms of the new, we obtain it directly from the next remark. The relations (3) are all satisfied by the matrices [1] (1). Then $x = \Sigma x_i e_i$ becomes the matrix (2), whose determinant $x_0 x_3 - x_1 x_2$ is $N(x)$ by (4), and is a rational integer when x is in S_1. Thus S_1 has the properties C, U, N, M.

Also S_2 has the same properties since it is derived from S_1 by interchanging e_2 and e_3 and changing the sign of e_1, and this transformation of units leaves unaltered the multiplication table (3).

THEOREM XII. — *Algebra* (15) *contains exactly two maximal sets* S_1 *and* S_2 *of integers having properties* C, U, N, *and each is equivalent* (*under rational transformation of the units*) *to the arithmetic of 2-rowed square matrices with rational integral elements.*

We proved above that the algebra of matrices with rational elements has a single maximal set S of integers having properties C, U, R (and hence N). When we transform the algebra (15) into the

---

[1] But by no other 2-rowed square matrices apart from the interchange of those corresponding to e_0 and e_3 as well as those corresponding to e_1 and e_2, such interchanges leaving unaltered the set of equations (3).

matric algebra by the rational transformation (18) and (20), we thereby trausform S_1 into S, and S_2 into the system of matrices

$$(21)\qquad \begin{pmatrix} x_0 + x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3, & x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_2, & x + \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix},$$

in which x_0, x_1, x_2, x_3 range independently over all rational integers. This system of matrices (21) does not contain e_0. It has properties C, N, M, U_1, but not U.

In view of Theorem X and our transformation of units, algebra (15) has an infinitude of maximal systems having properties C, U_1, R, and hence composed of integers according to the definition adopted in this memoir. By the formula above Theorem X, such systems include that formed of the linear combinations of 1, $k^{-1}e_1$, kE_2, e_3 with rational integral coefficients, where k is any fixed rational number $\neq 0$.

The value of the provisional assumption U lies in its help in detecting at least one maximal system according to our definition (with U_1 and not U), and moreover one having the pleasing property U, as well as uniqueness of factorization into primes, which recommend its selection in preference to all other maximal systems as the system of integers of the algebra in its initial units.

17. *Integral Quaternions.* — If x is in a maximal system of quaternions with rational coordinates having properties C, U, N, we find at once that only the first and last cases (17) exist, so that the four coordinates of x are either all rational integers or all halves of odd integers. Hence x is a linear combination of

$$(22)\qquad \rho = \frac{1}{2}(1 + i + j + k), \qquad i, j, k,$$

with rational integral coefficients. The squares and products of the numbers (22) are equal to such linear combinations of (22).

THEOREM XIII. — *The unique maximal system of quaternions with rational coordinates having properties* C, U, N *is composed of all quaternions whose four coordinates are either all rational integers or all halves of odd integers.*

A like conclusion was reached by Hurwitz for quaternions having properties C, U, B, as required by his definition of integers. His proof is much longer and more difficult then the above proof.

According to the definition of integer in this memoir, there is at least one maximal system of integral quaternions, viz., the system of Hurwitz, and its numbers would naturally be chosen as our integral quaternions in view of their admirable properties as to factorization into prime quaternions.

18. *General Theory.* — We shall now give a complete theory of integers in any linear associative algebra, the coordinates of whose numbers range over all complex numbers. There are two categories of such algebras. For any algebra of the first category we may introduce new units $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h, \eta_1, \ldots, \eta_k$, such that (¹)

$$\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \eta_\rho = \eta_\rho, \qquad \eta_\rho \varepsilon_j = \eta_\rho, \qquad \eta_\rho \eta_\sigma = \Sigma \gamma_{\rho\sigma\tau} \eta_\tau,$$

while all further products are zero. Here η_ρ, η_σ and η_τ are of characters (i, j), (j, l) and (i, l); while in the summation, $\tau > \rho$, $\tau > \sigma$. For the general number

$$z = x_1 \varepsilon_1 + \ldots + x_h \varepsilon_h + y_1 \eta_1 + \ldots + y_k \eta_k,$$

we have $\delta(\omega) = \Pi(x_i - \omega)^{m_i}$. Since $R(\omega)$ is a divisor of the latter, the maximal system of integers is composed of all the numbers z in which the x_i are rational integers and the y_j are rational. We readily prove that $u = 1 + \Sigma a_j \eta_j$ is a unit if the a_j are any rational numbers. For,

$$u(1 - a_1 \eta_1) = 1 - a_1^2 \eta_1^2 + l_2 = 1 + a_{12} \eta_2 + l_3,$$

where l_i is a linear function of $\eta_i, \eta_{i+1}, \ldots$, with rational coefficients. Similarly,

$$(1 + a_{12} \eta_2 + l_3)(1 - a_{12} \eta_2) = 1 - a_{12}^2 \eta_2^2 + l'_3 = 1 + a_{13} \eta_3 + l_4,$$
$$(1 + a_{13} \eta_3 + l_4)(1 - a_{13} \eta_3) = 1 + a_{14} \eta_4 + l_5.$$

(¹) E. Cartan, *Annales de la Fac. Sc. de Toulouse*, t. 12, 1898, B. 33; Dickson, *Linear Algebras*, p. 44.

We finally reach a product equal to 1. Hence

$$uv = 1, \qquad v = (1 - a_1\eta_1)(1 - a_{12}\eta_2)(1 - a_{13}\eta_3)\ldots = 1 + \Sigma b_j\eta_j,$$

where each b_j is rational. Thus v is an integer, and u and v are units.

If $x_1, \ldots, x_h$ are given rational integers each $\neq 0$ and $y_1, \ldots, y_k$ are any rational numbers, $z = \Sigma x_i\varepsilon_i + \Sigma y_\rho\eta_\rho$ is associated with $\Sigma x_i\varepsilon_i$, *i. e.*, there exists a unit v such that $zv = \Sigma x_i\varepsilon_i$. For, if u is the unit

$$u = 1 + \Sigma x_i^{-1} y_\rho \eta_\rho,$$

$\Sigma x_i\varepsilon_i u = z$. As shown above, there exists a unit v such that $uv = 1$. Hence *the arithmetic of any algebra of the first category is associated* (§ **13**) *with the arithmetic of the algebra which is the direct sum* $(\varepsilon_1) + \ldots + (\varepsilon_h)$.

The units of an algebra of the second category ([1]) fall into sets, each corresponding to a unit of an algebra of the first category, and having the multiplication table

$$e^i_{\alpha\beta}e^j_{\beta\gamma} = e^i_{\alpha\gamma}, \qquad e^i_{\alpha\beta}\eta^\rho_{\beta\gamma} = \eta^\rho_{\alpha\gamma}, \qquad \eta^\rho_{\beta\gamma}e^i_{\gamma\delta} = \eta^\rho_{\beta\delta}, \qquad \eta^\rho_{\alpha\beta}\eta^\sigma_{\beta\gamma} = \sum_\tau \gamma_{\rho\sigma\tau}\eta^\tau_{\alpha\gamma}$$
$$(\tau > \rho, \tau > \sigma),$$

where the superscripts do not denote powers, the γ's are constants, and all further products of the e and η are zero.

Consider any number z of the algebra. Then

$$z = x + y, \qquad x = \sum_{k,\lambda,\mu} x^k_{\lambda\mu}e^k_{\lambda\mu}, \qquad y = \sum_{\rho,\lambda,\beta} y^\rho_{\lambda\beta}\eta^\rho_{\lambda\beta}.$$

The right-hand characteristic determinant $\delta(\omega)$ of z is known to be a product of powers of the determinants

$$D_i(\omega) = \begin{vmatrix} x^i_{11} - \omega & x^i_{12} & \ldots & x^i_{1p_i} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ x^i_{p_i1} & x^i_{p_i2} & \ldots & x^i_{p_ip_i} - \omega \end{vmatrix},$$

which involve no coordinate of y. Hence z is an integer if and only

([1]) Cartan, *loc. cit.*, B. 51; Dickson, *loc. cit.*, p. 54.

if x is an integer, the coordinates of y being arbitrary rational numbers. Consider

$$u = 1 + \sum_{\rho, \alpha, \beta} a^{\rho}_{\alpha\beta} \eta^{\rho}_{\alpha\beta}.$$

Then

$$x u = x + \sum_{\lambda, \rho, \alpha, \beta} x^{i}_{\lambda\alpha} a^{\rho}_{\alpha\beta} \eta^{\rho}_{\lambda\beta}$$

will reduce to $x + y$ if and only if

$$\sum_{\alpha} x^{i}_{\lambda\alpha} a^{\rho}_{\alpha\beta} = y^{\rho}_{\lambda\beta} \qquad (\text{for all } \rho, \lambda, \beta).$$

Here α and λ each take the same values $1, \ldots, p_i$. The determinant of the coefficients of $a^{\rho}_{1\beta}, \ldots, a^{\rho}_{p_i\beta}$ is $D_i(0)$, which is not zero if $N(x) \neq 0$. Then the equations uniquely determine the a.

The proof that u is a unit is similar to that above :

$$u\left(1 - \sum_{\alpha, \beta} a^{1}_{\alpha\beta} \eta^{1}_{\alpha\beta}\right) = 1 + \sum_{\alpha, \beta}^{\rho \geqq 2} b^{\rho}_{\alpha\beta} \eta^{\rho}_{\alpha\beta},$$

whose product by

$$1 - \sum b^{2}_{\alpha\beta} \eta^{2}_{\alpha\beta}$$

is

$$1 + \sum_{\alpha, \beta}^{\rho \geqq 3} c^{\rho}_{\alpha\beta} \eta^{\rho}_{\alpha\beta},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

We finally reach a product equal to 1. Hence $uv = 1$ for

$$v = \left(1 - \sum_{\alpha, \beta} a^{1}_{\alpha\beta} \eta^{1}_{\alpha\beta}\right)\left(1 - \sum_{\alpha, \beta} b^{2}_{\alpha\beta} \eta^{2}_{\alpha\beta}\right)\left(1 - \sum_{\alpha, \beta} c^{3}_{\alpha\beta} \rho^{3}_{\alpha\beta}\right) \ldots = 1 + \sum_{\rho, \alpha, \beta} g^{\rho}_{\alpha\beta} \eta^{\rho}_{\alpha\beta},$$

where the g are rational. Thus v is an integer, and u and v are units. Then $xu = z$ gives $zv = x$. Thus every number z whose norm is not zero is associated with its x component.

These x components are known to be the numbers of the algebra which is the direct sum of several general matric algebras (§ 15).

Applying Theorems VI and XI, and noting that our conclusion applies also to algebras of the first category, we obtain

THEOREM XIV. — *The arithmetic of any linear associative algebra the coordinates of whose numbers range over all complex numbers is associated with the arithmetic of a direct sum of algebras each with a single unit. Any number whose norm is not zero decomposes into primes uniquely.*

We therefore obtain only trivial arithmetics from algebras the coordinates of whose numbers range over the field of all complex numbers. If we restrict the coordinates and the coefficients of the transformations of the units to the field of real numbers, we obtain algebras in addition to those just investigated (for example, real quaternions) and now obtain arithmetics which are not trivial. If we employ the field of rational numbers, we obtain still further algebras and a rich variety of arithmetics, which will form the subject of the book cited in § **20**.

19. *The Integers of Cayley's Algebra.* — We employ the four quaternion units $1, i, j, k$ as well as the new units

$$e = e_4, \qquad ie = e_5, \qquad je = e_6, \qquad ke = e_7.$$

Any linear combination of these 8 basal units may be designated by $x = q + Qe$, where

$$(23) \qquad q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k, \qquad Q = x_4 + x_5 i + x_6 j + x_7 k$$

are quaternions. Instead of employing Cayley's multiplication table for these 8 units, it is far simpler to use the condensed law of multiplication

$$(24) \quad (q + Qe)(r + Re) = t + Te, \qquad t \equiv qr - R'Q, \qquad T \equiv Rq + Qr',$$

found by the writer ([1]), who also discovered that both right-hand and left-hand division, except by zero, is always uniquely possible.

([1]) DICKSON, *Linear Algebras*, p. 15.

Here r' denotes the quaternion conjugate to r (§ 3). Unlike all the earlier algebras in this memoir, the present algebras is not associative.

As a special case of (24), the product of x by $q' - Qe$ in either order is

$$qq' + QQ' = x_0^2 + \ldots + x_7^2,$$

which is the norm $N(x)$ of x, since it is the constant term of the quadratic equation satisfied by x. We have

$$N(xy) = N(x)N(y).$$

We shall determine all maximal sets of integers x with rational coordinates having properties C, U, N.

With x, also $x+1, x+i, \ldots, x+e_7$, are integers. From their norms we subtract $N(x)$ and conclude that $2x_0+1, \ldots, 2x_7+1$, are all rational integers. Hence

$$x_t = \frac{1}{2}X_t \qquad (t = 0, \ldots, 7),$$

where each X_t is a rational integer. Since $N(x)$ is a rational integer, ΣX_t^2 is divisible by 4. According as X_t is even or odd, X_t^2 has the remainder 0 or 1 when divided by 4. Hence the number of odd X_t is 0, 4 or 8. In the first and third cases, q and Q are Hurwitz's integral quaternions. By annexing e to all such quaternions, we obtain a system H containing our x, and forming a part of the larger system (30) obtained below.

Hence let exactly four of the eight coordinates of $x = q + Qe$ be halves of odd integers, the four not being those of q, nor those of Q (otherwise x is in H). If three of those four are in one of q, Q, and hence the fourth in the other, then, by employing xe instead of x if necessary, we may assume that three are in Q and one in q. After multiplying x on the left by $1, i, j$, or k, we may assume that x_0 is half an odd integer, while x_1, x_2, x_3 are rational integers. Subtracting from x a quaternion with rational integral coordinates, we get $\frac{1}{2} + Q_1 e$. Its product by $1+i$ is $\frac{1}{2}(1+i) + Q_1 e$, which falls under the next case.

Next, let exactly two of the coordinates of q and two of those of Q be halves of odd integers. After multiplying x on the left by $1, i, j$, or k, we may take x_0 as half an odd integer. Since the multiplication table (7) of quaternions is unaltered by a cyclic permutation of i, j, k, we may treat only one of three analogous cases (and at the end of our discussion draw similar conclusions for the two omitted cases), and hence assume here that x_1 is half an odd integer, while x_2 and x_3 are rational integers. Then by subtracting a quaternion with rational integral coordinates, we get $q = \frac{1}{2}(1 + i)$. Since

$$ix + 1 = iq + 1 + (Qi)e, \qquad iq + 1 = q,$$

we may replace Q by Qi without disturbing q. Hence if either x_4 or x_5 of Q is half an odd integer, we may take x_4 to be that one. After subtracting Re, where R is a quaternion with rational integral coordinates, we have the cases

$$(25) \qquad Q = \frac{1}{2}(1+i), \qquad \frac{1}{2}(1+j), \qquad \frac{1}{2}(1+k), \qquad \frac{1}{2}(j+k).$$

We shall reduce these cases to the second, for which x is

$$(26) \qquad Z = \frac{1}{2}(1+i) + \frac{1}{2}(1+j)e,$$

whence

$$(1+j)Z = \frac{1}{2}(1+i+j-k) + je,$$

so that the set contains

$$(27) \qquad \rho = \frac{1}{2}(1+i+j+k),$$

and hence all of Hurwitz's integral quaternions. We shall assume that the latter occur in our set in all cases.

For the first case (25), x is

$$L = \frac{1}{2}(1+i) + \frac{1}{2}(1+i)e.$$

Then

$$(\rho e)\mathrm{L} = \frac{1}{2}(-1-j) + \frac{1}{2}(1+k)e.$$

Apply the cyclic permutation (ikj) and to the result add $1+i$; we get Z. In the third case (25), replace j by $-k$, and k by j (so that the multiplication table of quaternion units is unaltered); we get the second case (25). In the fourth case (25), we add

$$\frac{1}{2}(1+i-j-k)e,$$

which belongs to our set by hypothesis, and get the first case (25). Hence all cases have now been reduced to (26).

Since the set contains Z, it contains

$$e\mathrm{Z} = w \equiv \frac{1}{2}(-1+j) + \frac{1}{2}(1-i)e, \qquad (\rho e)\mathrm{Z} = v \equiv \frac{1}{2}(-1-k) + \frac{1}{2}(1+k)e.$$

Adding $1+ie$ to w, and $1+k$ to v, we get

$$(28) \qquad \mathrm{W} = \frac{1}{2}(1+j) + \frac{1}{2}(1+i)e, \qquad \mathrm{V} = \frac{1}{2}(1+k) + \frac{1}{2}(1+k)e.$$

The followings 8 numbers

$$(29) \qquad i,\ j,\ k,\ \rho,\ e,\ \mathrm{W},\ \mathrm{Z},\ \mathrm{V}$$

are evidently linearly independent. In view of $2\mathrm{W}$, $2\mathrm{Z}$, $2\mathrm{V}$, 2ρ, we may express ie, je, ke, 1 as linear functions of the numbers (29) with rational integral coefficients. Note also that

$$\rho e = \mathrm{Z} - \mathrm{W} + \mathrm{V} + ie - 1 - i - k.$$

Hence all of the numbers previously mentioned as belonging to our system of integers are linear functions of the eight in (29) with rational integral coefficients. It can be verified that this is true also of the product of any two of the numbers (29). Hence the system of numbers

$$(30) \qquad \left\{ \begin{array}{c} x = x_0\rho + x_1 i + x_2 j + x_3 k + x_4 e + x_5 \mathrm{W} + x_6 \mathrm{Z} + x_7 \mathrm{V} \\ (x_0, \ldots, x_7 \text{ rational integers}) \end{array} \right.$$

has the properties U and C. It has the property N, since

$$(31)\quad x = \frac{1}{2}(x_0 + x_5 + x_6 + x_7) + \left(x_1 + \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_6\right)i + \left(x_2 + \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_5\right)j$$
$$+ \left(x_3 + \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_7\right)k + \left[x_4 + \frac{1}{2}(x_5 + x_6 + x_7)\right]e$$
$$+ \frac{1}{2}x_5 ie + \frac{1}{2}x_6 je + \frac{1}{2}x_7 ke,$$

the sum of the squares of whose eight components is the rational integer

$$\mathrm{N}(x) = x_0^2 + \ldots + x_7^2 + x_0(x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7)$$
$$+ x_4(x_5 + x_6 + x_7) + x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_7 + x_5x_6 + x_5x_7 + x_6x_7.$$

If we make any enlargement of this system (30), we obtain a system not having properties U, C, N. For, let us annex $u = q + \mathrm{Q}e$, four of whose coordinates are rational integers, while four are the halves of odd integers. First, let two of the latter be coordinates of q and two of Q. This will be true also of u, iu, ju, ku, in one of which x_4 is half an odd integer. After subtracting $\mathrm{R}e$, where R has rational coordinates, we may take

$$\mathrm{Q} = \frac{1}{2}(1 + i), \qquad \frac{1}{2}(1 + j), \qquad \text{or} \qquad \frac{1}{2}(1 + k).$$

In the respective cases, we subtract W, Z, or V from u and get a number lacking e and hence a quaternion r. If r is in Hurwitz's arithmetic, r is in our system (30), and we have caused no enlargement by annexing u. Hence r is not in Hurwitz's arithmetic and therefore enlarges it to a system of quaternions not having properties U, C, N (§ **17**).

Finally, let exactly three of the coordinates of Q and one of q be halves of odd integers (the reverse case reducing to this after multiplication by e). As above we may assume that $q = \frac{1}{2}$, while three of the coordinates of Q are $\frac{1}{2}$ and the fourth is zero. Subtracting ρe, we get $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}le$, where $l = 1$, i, j, or k. But the norm is now $\frac{1}{2}$ and not a rational integer. Hence our system is a maximal.

THEOREM XV. — *The only maximal systems of integers of Cayley's algebra having properties* C, U, N *are* (30) *and the two systems obtained from it by cyclic permutations of* i, j, k.

For the system (30) there are exactly 240 units :

$$\pm 1, \quad \pm i, \quad \pm j, \quad \pm k, \quad \pm e, \quad \pm ie, \quad \pm je, \quad \pm ke,$$

$$u = \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k), \quad ue.$$

$$\frac{1}{2}(\pm 1 \pm j) + \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i)e, \qquad \frac{1}{2}(\pm 1 \pm j) + \frac{1}{2}(\pm j \pm k)e,$$

$$\frac{1}{2}(\pm 1 \pm i) + \frac{1}{2}(\pm 1 \pm j)e, \qquad \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i) + \frac{1}{2}(\pm i \pm k)e,$$

$$\frac{1}{2}(\pm 1 \pm k) + \frac{1}{2}(\pm 1 \pm k)e, \qquad \frac{1}{2}(\pm 1 \pm k) + \frac{1}{2}(\pm i \pm j)e,$$

$$\frac{1}{2}(\pm i \pm k) + \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i)e, \qquad \frac{1}{2}(\pm i \pm k) + \frac{1}{2}(\pm j \pm k)e,$$

$$\frac{1}{2}(\pm j \pm k) + \frac{1}{2}(\pm 1 \pm j)e, \qquad \frac{1}{2}(\pm j \pm k) + \frac{1}{2}(\pm i \pm k)e,$$

$$\frac{1}{2}(\pm i \pm j) + \frac{1}{2}(\pm 1 \pm k)e, \qquad \frac{1}{2}(\pm i \pm j) + \frac{1}{2}(\pm i \pm j)e.$$

There are many ways to express 2 as the product of an integer f by its conjugate : $f = 1 + i$, or a number with any two coordinates ± 1 and the others zero; $f = \rho + e$, for ρ in (27), or a number with any four coordinates $\pm \frac{1}{2}$, one ± 1, and three zero; $f = q + Qe$, where q and Q are both of the form

$$\frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k).$$

Note that

$$(1 + i)\sigma = \rho + \rho e, \qquad \sigma = \frac{1}{2}(1 + j) + \frac{1}{2}(1 + k)e.$$

$$\tau(1 + i) = \rho + \rho e, \qquad \tau = \frac{1}{2}(1 + k) + \frac{1}{2}(i + j)e.$$

where τ is a unit, but σ is not an integer (30). Thus $\rho + \rho e$ is the product of $1 + i$ on the left by a unit, but not on the right. Again

$$(1 + i)\lambda = \rho + e, \qquad \lambda = \frac{1}{2}(1 + j) + \frac{1}{2}(1 - i)e = \text{unit}.$$

But it would be very laborious to prove that two integers of the same norm are not associates if we permit unit factors both on the right and left simultaneously.

If g is a given integer (30), we can find an integer q of the same form (30) such that

$$N(g - mq) \leqq \frac{5}{4} m^2,$$

where m is any given positive rational integer. When a and b are any given integers, we can find integers q and c such that

$$a = qb + c, \qquad N(c) \leqq \frac{5}{4} N(b).$$

Take [1] $g = a\bar{b}$, $m = b\bar{b}$, and write c for $a - qb$. We readily verify by (24) that $(qb)\bar{b} = qm$, although the associative law usually fails here. Thus

$$g - qm = (a - qb)\bar{b} = c\bar{b}, \qquad N(c)\,N(\bar{b}) \leqq \frac{5}{4} m^2.$$

For integral quaternions, Hurwitz proved similarly that

$$N(g - mq) < m^2, \qquad a = bq + c, \qquad N(c) < N(b),$$

and hence established the existence of a right-hand greatest common divisor of a and b. Since we are unable to prove its existence for our integers (30), we have no valid reason to prefer the system (30), or one of its two equivalents, to other maximal systems (if such exist) having properties C, U_1, N, M.

20. *Outlook*. — We investigated above the integers of the classic canonical algebras to which any algebra in 2, 3, or 4 basal units can be reduced by a linear transformation with real coefficients. If we restrict attention to transformations with rational coefficients, we obtain a much larger list of canonical algebras. The arithmetic of the

---

[1] If $b = r + Re$, we write $\bar{b}$ for $r' - Re$, where r' is the conjugate of the quaternion r.

new algebras not in the former list will have new types of properties. In particular, we may now secure unique factorization into primes, only after the introduction of ideals. This becomes evident if we recall that an algebraic number field of degree n is a special type of linear algebra in n basal units. This more general theory of hypercomplex integers will be presented in the author's book, *Algebras and Their Arithmetics*, in course of publication by the University of Chicago Press.

Theory of non-analytic Functions of a complex Variable;

By E. R. HEDRICK, Louis INGOLD
and W. D. A. WESTFALL.

1. *Introduction.* — This paper is concerned with the extension of the classical theory of functions of a complex variable obtained by the removal of the restrictions imposed by the Cauchy-Riemann equations. Only certain very general continuity and differentiability conditions are retained.

The analytic theory is regarded as being equivalent to the theory of a special type of transformations from a pair of variables (x, y) to another pair (u, v). The removal of the above restrictions permits much more general transformations to be considered in the same way.

The paper is written (as is the classical theory) in the language of function-theory rather than in the language of transformations. It is certainly true, as is often insisted ([1]), that the study of such transformations can be made without the use of complex variables. It is equally true, however, that the study of even an analytic function is only a study of its components, which are real functions, and that the complex variable is, therefore, in no way essentially involved.

The theory of analytic functions, however, is already developed, and it has seemed to the authors that the results of that theory can be much more conveniently utilized in the present paper if the same phraseology is employed; furthermore the use of the complex variable makes it possible to compare the results of this paper with those of the

([1]) See Picard, *Traité d'Analyse*, vol. II, p. 1.

special analytic case, and to better recognize the true position of this special theory in relation to the more general theory.

The word *function* is employed in the general sense defined by Dirichlet. A complex variable w is a function of the complex variable z in a given region R if there exists a value of w corresponding to each value of z in that region. The ordinary technical terms of function-theory, as *multiple-valued*, *single-valued*, etc., are used with their usual meanings.

The two outstanding properties of analytic functions wich lead to the Cauchy-Riemann equations are the conformal property, and the equivalent property of possessing a unique [1] derivative.

In the case of non-analytic functions it is natural to inquire, in connection with the first of these properties, how the angular distortion at a point is related to the directions of the sides of the angle.

It is found that for a fixed angle in the plane of the independent variable there are, in general, two directions for the initial side corresponding to which the angular distortion takes on extreme values.

These directions vary with the angle, but are perfectly determinate even in the limiting case in which the angle under consideration approaches zero. For this special case the two characteristic directions coincide with certain directions discovered by Tissot in connection with mapping problems.

A similar study is made in regard to the difference quotient. It is found that there are two directions at each point in the plane of the independent variable along which the square of the limit of the absolute value of the difference quotient takes on extreme values. It is particularly interesting to note that these directions coincide with the directions of the special case mentioned above.

The lines which these two directions determine (here called *characteristic lines*), are studied by means of the fundamental quantities E, F, G, defined precisely as the fundamental quantities of differential geometry. The lines are somewhat similar to lines of curvature. A

---

[1] It is customary to say that the derivative does not exist in case the limit of the difference quotient is not unique. There are, however, occasional departures from this practice.

distinction between analytic and non-analytic functions is that the characteristic lines of the former become indeterminate. This is comparable, in differential geometry, to the case of the sphere, whose lines of curvature become indeterminate. The indicatrix of differential geometry is analogous to Tissot's indicatrix, which becomes a circle in the analytic case.

The notion of the *ellipticity* of a function is introduced. This is the absolute value of the difference between the semi-axes of Tissot's indicatrix. The ellipticity can be used as measure of the divergence of a function at any point from an analytic function.

A second approach to the study of this theory is made through the Beltrami equations. Use is made of the result that any two complex functions on a given surface are analytic functions of each other. By considering the special case in which the given surface is a plane a complete classification of functions is obtained. Functions of the same class in a given region are the functions which are defined in that region, and which are analytic functions of each other. From this point of view analytic functions defined in a given region simply constitute one of these classes.

Many theorems of the usual theory of analytic functions can be generalized to apply to functions of any one class. Thus there exists in each class a theory almost coextensive with the analytic theory. No attempt has been made here to push this generalization to its conclusion, but to illustrate this possibility, the method is applied to one or two of the more important theorems of the ordinary theory.

Finally, it should be mentioned that throughout the paper only those regions are admitted in which the functions under consideration are free from singularities. A future paper is contemplated which will include a study of the properties of non-analytic functions in the neighborhood of their points of discontinuity, together with extensions of the ideas of the present paper.

2. *Directions of maximum and minimum angular distortion.* — One of the most prominent distinctions between analytic and non-analytic functions lies in the fact that in the case of analytic functions, the correspondence between the planes of the dependent and indepen-

dent variables preserves angles. In the case of non-analytic functions, it is of interest to inquire in what manner the amount of distortion of angles at a point varies as the sides of the angle vary in direction. This question will now by investigated.

We denote, as usual, the independent variable by $z = x + iy$ and consider the function

$$(1) \qquad w = u + iv = f(z).$$

Let u and v, the real and imaginary parts of w, and also their first, second, and third partial derivatives ([1]) be assumed to be continuous in the regions considered.

We introduce the fundamental quantities E, F and G, defined as follows :

$$(2) \quad E = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2, \quad F = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

These quantities are, of course, not independent. Since they are obtained from a certain representation of the plane, they must satisfy the partial differential equation $K = 0$ where K is the expression for the Gaussian curvature of the differential form $E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$.

Now consider two directions in the z-plane determined by $\tan\theta = h$ and $\tan\varphi = m$, where the angles θ and φ are measured from the x-axis, and suppose that the angle $\alpha = \theta - \varphi$ remains fixed while m and h vary; then we have,

$$(3) \qquad \tan\alpha = k = \frac{h - m}{1 + hm}.$$

Denote by β the angle in the w-plane corresponding to α. An easy computation gives

$$(4) \qquad \tan\beta = \frac{k(1 + m^2)\sqrt{(EG - F^2)}}{E + Fk + [k(G - E) + 2F]m + (G - Fk)m^2}.$$

In the usual manner the following equation is obtained for the values of m which yield extreme values for $\tan\beta$ when they exist.

$$(5) \quad [k(G - E) + 2F]m^2 - 2(G - E - 2kF)m - k(G - E) - 2F = 0.$$

If the coefficient of m^2 in this equation does not vanish, it is numeri-

---

([1]) The curvature K introduced below involves the third derivatives of u and v.

cally equal to the term independent of m but opposite in sign. The solutions of (5) are then real and are the negative reciprocals of each other. The corresponding directions are therefore perpendicular to each other. We shall call them the *principal directions* of the function w *with respect to the angle* α.

If the solutions of equation (5) are distinct, then one of the solutions corresponds to a maximum value of $\tan\beta$ and the other corresponds to a minimum. The general proof of this statement is omitted on account of its length. The proof for the case that is of particular interest to us is given in § 7.

If the coefficient of m^2 vanishes, we shall say that the directions parallel to the axes are the principal directions. These also correspond to maximum and minimum values of $\tan\beta$.

In case the coefficients of both m and m^2 vanish, equation (5) degenerates altogether, and we shall say that any two orthogonal directions are principal directions for this case. Here it may be seen that $F = 0$ and $E = G$, so that $\tan\beta$ is independent of m. We collect the results for the various cases mentioned above, in the following theorem.

THEOREM I. — *For any function w of the complex variable z there exist, through each point of the z-plane, two principal directions with respect to any fixed angle α. These directions are perpendicular to each other.*

3. *Special cases.* — There are several interesting special cases of equation (5).

(*a*) If $G = E$, the equation becomes

$$m^2 + 2km - 1 = 0,$$

and is independent of the fundamental quantities, so that for all such functions, the principal directions for a given value of k at a given point are the same.

(*b*) If $F = 0$, the equation becomes

$$km^2 - 2m - k = 0,$$

and is again independent of the fundamental quantities.

(*c*) If α is a right angle, k becomes infinite and the limiting form of the equation is then

$$(G - E)m^2 + 4Fm - (G - E) = 0.$$

The values of $\tan\beta$ corresponding to the values of m which satisfy this equation reduce to

$$\pm \frac{2\sqrt{(EG - F^2)}}{\sqrt{[(G - E)^2 + 4F^2]}}.$$

(*d*) If both $E = G$ and $F = 0$, the equation degenerates. In this case it can be shown that u and v satisfy the Cauchy-Riemann equations, or it can be seen that the expression for $\tan\beta$ reduces to k, and the function in this case will be said to be *analytic at the point* (¹).

4. *The limiting case* $k = 0$. — If we consider the limiting case in which the angle α reduces to zero we see from formula (4) that $\tan\beta$ also vanishes. In this case, instead of considering the maximum and minimum values of $\tan\beta$, we may consider the maximum and minimum values of the limit of $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$, as $\alpha = 0$. The corresponding form of équation (5) can be obtained by simply putting $k = 0$ in that equation, which gives

$$Fm^2 - (G - E)m - F = 0.$$

The values of m satisfying this equation correspond to maximum and minimum values of $\frac{d\psi}{d\theta}$, where ψ is the angle in the w-plane corresponding to the angle θ in the z-plane.

A detailed discussion of this limiting case will be given in the next

(¹) We shall use the expression *analytic at a point* P in this sense, even when the function is not analytic at any other point in the neighborhood of P. This concept seems to be interesting and to be capable of development. Thus, if a function is analytic at each point of a set (E), it follows immediately from the continuity conditions already assumed that the function is analytic at every point of the first derived set (E′). In particular, if a function is analytic at a set of points that are dense in any region (or on any curve) the function is analytic throughout that region (or on that curve) provided the continuity conditions remain true.

few articles, where the equation for m derived above will be obtained in a different connection.

5. *Directional derivatives of functions.* — Instead of studying the variation in the distortion of angles, the variation in the value of the limit of the difference quotient may investigated. It will be convenient to regard this limit as a derivative associated with a given direction, and to use the usual notation for a derivative. The limit will be called the *directional derivative* of w.

By definition

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}.$$

The assumptions that have been made concerning the functions u and v permit the use of the law of the mean for functions of two variables. Thus we have,

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + R_1,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + R_2,$$

where the remainders, R_1 and R_2, are such that

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{R_1}{\Delta x} = 0, \qquad \lim_{\Delta x = 0} \frac{R_2}{\Delta x} = 0.$$

By the use of these formulas we obtain

$$\frac{dw}{dz} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + m\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + m^2\frac{\partial v}{\partial y}\right] \div (1 + m^2)$$
$$+ i\left[\frac{\partial v}{\partial x} + m\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - m^2\frac{\partial u}{\partial y}\right] \div (1 + m^2),$$

where Δz is supposed to approach zero in such a way that $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ approaches the limit m. The discussion can be easily modified to suit the case in which $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ approaches zero.

By squaring and adding the real and imaginary parts of $\frac{dw}{dz}$ we

obtain

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = \frac{E + 2mF + m^2(E + G) + 2m^3F + m^4G}{(1 + m^2)^2} = \frac{E + 2mF + Gm^2}{1 + m^2}.$$

This last expression is seen to be equivalent to $\frac{d\sigma^2}{ds^2}$ where ds and $d\sigma$ are the corresponding differentials of arc length in the z-plane, and in the w-plane, respectively.

6. *The principal directions for the derivative.* — We have already considered the distinction between analytic and non-analytic functions based upon the conformal property. A further fundamental distinction between them consists in the fact that the directional derivatives of the latter at a given point are not unique, but depend on the manner in which the increment of the independent variable approaches zero.

It is of interest, then, to know in what way these directional derivatives vary as the method of approach to a point varies, and in particular, to know whether the absolute value of the derivative regarded as a function of m, takes on maximum and minimum values. This question will now be considered.

For convenience we write

$$r = \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = \frac{E + 2Fm + Gm^2}{1 + m^2}. \tag{6}$$

The quadratic equation in m which determines the extreme values of r, when they exist, is

$$E + (G - E)m - Fm^2 = 0. \tag{7}$$

This is the special limiting case of equation (5) which was considered in § 4. That this should be so may be seen by noticing that from equation (4) we have

$$\lim_{k=0} \frac{\tan g\,\beta}{k} = \frac{\sqrt{(EG - F^2)}}{r}.$$

If F does not vanish equation (7) determines two mutually orthogonal directions. These are the principal directions of the function w *with respect to a zero angle*. We shall call them simply the *principal directions* of the function w.

These directions for any non-conformal transformation of any surface were discovered by Tissot ([1]) in connection with mapping problems.

If $F = 0$ and $E \neq G$, we shall say that the directions parallel to the axes are the principal directions. If $F = 0$ and $E = G$ we shall say that any two orthogonal directions are the principal directions. Thus in all cases we have the following theorem.

THEOREM II. — *For any function of the complex variable z there exists, through each point of the z-plane, a pair of principal directions. These directions are perpendicular to each other.*

The pair of principal directions through a point is unique except at points for which $E = G$ and $F = 0$.

The curves determined by the solutions of the differential équation (7) will be called the *characteristic lines* of the function w.

7. *The maximum and minimum values of r.* — The equation (7) regarded as an equation for m may be written in either of the forms

$$(8) \qquad \frac{F + Gm}{m} = \frac{E + 2Fm + Gm^2}{1 + m^2}, \qquad E + Fm = \frac{F + Gm}{m}.$$

Let λ denote either of the values of m satisfying equation (7) and let ρ denote the corresponding value of r. Then from equations (8)

$$(9) \qquad \rho = \frac{F + G\lambda}{\lambda}, \qquad \text{or} \qquad \rho = E + F\lambda.$$

The elimination of λ leads to the equation

$$(10) \qquad \rho^2 - (E + G)\rho - F^2 = 0.$$

The two solutions of this equation, when different, will be called the *principal expansion factors* of the function w.

Equations (9) can be solved for E and G in terms of ρ, λ, and F. When the resulting values are substituted in equation (6), the expres-

---

([1]) TISSOT, *Sur les cartes géographiques* (*Comptes rendus*, 1849).

sion for r reduces to

$$r = \rho - F\frac{(m-\lambda)^2}{\lambda(1+m^2)}. \tag{11}$$

From this it follows directly that if λ is the positive solution of equation (7), then ρ is the maximum of r at points where F is positive, and the minimum where F is negative. This may be seen also by computing $\frac{dr}{dm}$ from equation (11).

If $F = 0$ while $G \neq E$, the equation (6) for r becomes

$$r = \frac{E + Gm^2}{1+m^2},$$

from which we see that if G is positive and greater than E, $r = E$ is a minimum corresponding to $m = 0$, and that $r = G$ is a maximum corresponding to $m = \infty$. If G is negative the maximum and minimum values are interchanged. The argument is similar if $E > G$. Thus in every case we have proved the following theorem.

THEOREM III. — *The value of r at each point of the z-plane, corresponding to one of the principal directions is a maximum, and the value corresponding to the other principal direction is a minimum, whenever the solutions of equation* (10) *are distinct.*

8. *Fundamental property of characteristic lines.* — The characteristic lines form a special orthogonal system of lines in the z-plane. The lines of the w-plane corresponding to them also form an orthogonal system. This suggests the problem of determining the conditions which an orthogonal system must satisfy in order that the corresponding system may also be orthogonal. Let $p(x, y) = \text{const.}$, $q = \text{const.}$, be an orthogonal system of curves in the z-plane which corresponds to an orthogonal system in w-plane. Along one of the curves $q = c$, x and y may be regarded as functions of p, and along $p = c$ they may be regarded as functions of q. Similarly, in the w-plane, u and v along one set of the corresponding curves may be regarded as functions of p and along the other set, as functions of q.

The conditions of orthogonality in the two planes are

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q}=0.$$

The second of these may be written in the form

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q}\right)=0;$$

or

$$E\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+F\left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}\right)+G\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}=0$$

and by means of the first equation this can be reduced to

$$F\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2-(G-E)\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial p}-F\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2=0,$$

or to a similar equation with p replaced by q. Now along one of the curves $q=c$,

$$\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}=0.$$

By means of this formula the equation above reduces to

$$F\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2-(G-E)\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x}-F\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2=0.$$

The function p satisfies the same equation. These equations show that $m=-\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\div\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)$ computed from $q=c$ and the corresponding value computed from $p=c$, both satisfy equation (5). These curves are therefore the characteristic lines. Thus we have proved the following theorem.

THEOREM IV. — *The only orthogonal system of curves in the z-plane which corresponds, by means of a given non-analytic function w, to an orthogonal system in the w-plane, is the system of characteristic lines of the function w* [1].

---

[1] For a geometric proof of this theorem see Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. III, p. 49.

9. *The Beltrami Equations.* — The Cauchy-Riemann equations have been generalized by Beltrami to apply to a complex function on any surface. These generalized equations are valid for complex functions in a plane. We have, therefore, for any function $w = u + iv$ of the complex variable z the following equations :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \pm\left(E\frac{\partial v}{\partial y} - F\frac{\partial v}{\partial x}\right) : J, \qquad \left[J = \sqrt{(EG - F^2)}\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \pm\left(F\frac{\partial v}{\partial y} - G\frac{\partial v}{\partial x}\right) : J,$$

and also the equations obtained from these by interchanging the functions u and v.

From these equations u may be eliminated by equating the two expressions for the second partial derivative of u with respect to x and y. This is permissible, since the second derivatives of u and v are assumed to be continuous. Similarly, v may be eliminated. When the elimination is performed, it is found that u and v both satisfy the following partial differential equation of the second order :

$$(12) \qquad \frac{G}{J}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{E}{J}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} - \frac{2F}{J}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + \left[\frac{\partial\left(\frac{E}{J}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{F}{J}\right)}{\partial x}\right]\frac{\partial\theta}{\partial y} + \left[\frac{\partial\left(\frac{G}{J}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{F}{J}\right)}{\partial y}\right]\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0.$$

If, in the equation just obtained, the quantities E, F, and G are replaced by three quantities proportional to them, the equation would obviously remain unaltered, since in each term the factor of proportionality would occur in both numerator and denominator.

If v is a solution of equation (12), the solution u satisfying Beltrami's equations given above is determined except for an additive constant.

10. *Classification of functions.* — The generalized Laplace equation obtained at the close of the previous article may be used as the basis of a very convenient classification of functions. It is well known that all functions on a given surface are analytic functions of each

other[1]. This is true, in particular, for functions in a plane. It follows that all functions whose real and imaginary parts satisfy equation (12) are analytic functions of each other. All such functions which are defined throughout a given region *except at a set of points whose derived set is finite*, will be said to belong to the same class in that region.

Since the ratios of the quantities E, F, G, determine equation (12), these ratios determine the class to which a function belongs; thus if we write $p = \frac{F}{E}$, $q = \frac{G}{E}$, we may say that any function whose fundamental quantities determine the ratios p and q belongs to the class (p, q).

The following statements are easily proved :

Every function (subject to the continuity and differentiability conditions previously specified) *belongs to a definite class, in a given region.*

No function belongs to two different classes in the same region.

The totality of analytic functions in a given region constitute a separate class, the class (0,1).

There exist functions belonging to every class in a given region.

Equation (12) will be called the *differential equation of the class* determined by the quantities E, F, G, appearing in its coefficients.

11. *The ellipticity of a function.* — In order to picture more vividly the behavior of a function in the neighborhood of a point, an ellipse may be constructed whose axes lie in the direction of the characteristic lines at that point, and whose semi-major and semi-minor axes are equal to the principal expansion factors. The ellipse constructed in this manner has been called *Tissot's indicatrix.*

The semi-axes of Tissot's indicatrix are obtained from equation (10) of § **7**. In order to determine under what circumstances the indicatrix reduces to a circle we form the discriminant of this equation, which is, $(E + G)^2 - 4(EG - F^2)$. This can be reduced to $(G - E)^2 + 4F^2$, so that the discriminant vanishes only if $G = E$ and $F = O$.

---

[1] See PICARD, *Traité d'Analyse*, vol. II, p. 9. The restriction which we have introduced below, that the functions have a common region of definition, should be included here.

If these equations hold only at certain points, such points will be called *analytic points* of the function. These points may be isolated, or they may fill out a curve in the z-plane, or they may cover an entire region of the plane. In any case, they form a closed set. When they cover an entire region R the function is analytic in R.

Since the two principal expansion factors are equal at analytic points, we have equation

$$\rho_1 - \rho_2 = 0.$$

In the neighborhood of analytic points (assuming continuity) the difference of the principal expansions becomes smaller and the function behaves more and more like an analytic function. The absolute value of the difference between the solutions of equation (10) may be taken as the measure of the divergence of the function from an analytic function.

The expression

$$|\rho_1 - \rho_2| = 0,$$

will be called the *ellipticity* of the function. Given a set of points P_1, $P_2, \ldots, P_n, \ldots$ that have a limit point P, if the ellipticity at P_i is ε_i and if $\lim_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0$, the function is analytic at P.

12. *The indicatrix for functions of the same class.* — If two functions belong to the same class in a given region, the indicatrix of one of them is related to the indicatrix of the other in a very simple way. The indicatrix, at a given point, is determined by the values of the principal expansion factors. Since the quantities E, F, G, for two functions of the same class are proportional, it follows from the form of equation (10) that the principal expansion factors for one function are proportional to those of another of the same class. It is assumed that the factor of proportionality neither vanishes nor becomes infinite at the point under consideration. Thus we obtain the following theorem.

THEOREM V. — *The indicatrix of any function is similar to the indicatrix of any other function of the same class, at points for which the factor of proportionality between the fundamental quantities neither vanishes nor becomes infinite.*

13. *The proportionality factor.* — We have already noted that the fundamental quantities E, F and G, must satisfy the differential equation $K = 0$, where K is the expression for the total curvature of the differential form

$$E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2.$$

The equation $K = 0$, written out, is

$$\frac{1}{2J}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F}{EJ}\frac{\partial E}{\partial y} - \frac{1}{J}\frac{\partial G}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{J}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{J}\frac{\partial E}{\partial y} - \frac{F}{EJ}\frac{\partial E}{\partial x}\right)\right] = 0.$$

If we substitute λE, λF, λG, for E, F, G, in this equation, we obtain equation (12) with $\log\lambda$ in the place of θ. As a result, therefore, we obtain the following theorem.

THEOREM VI. — *The logarithm of the factor of proportionality of the two sets of fundamental quantities that belong to two functions of the same class must satisfy the differential equation of the class.*

14. *The class of a function of a function.* — Let $W_1 = U_1 + iV_1$ and $W_2 = U_2 + iV_2$ be two functions of z of the same class. We wish to consider how they are related when they are regarded as functions of a function $w = u + iv$.

Since the two functions (as functions of z) are of the same class, $E_1 = \lambda E_2$, $F_1 = \lambda F_2$, $G_1 = \lambda G_2$. The variables are now to be changed from the pair (x, y) to the pair (u, v). The formulas for the new values of the fundamental quantities are

$$\frac{e_1}{e_1 g_1 - f_1^2} = \frac{E_1\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - 2F_1\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + G_1\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}{E_1 G_1 - F_1^2},$$

$$\frac{e_2}{e_2 g_2 - f_2^2} = \frac{E_2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - 2F_2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + G_2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}{F_2 G_2 - F_2^2},$$

with the corresponding formulas for f_1, f_2, and g_1, g_2.

In the first of these formulas we may replace E_1, F_1, G_1, on the right by their values, λE_2, λF_2, λG_2. The result is $\frac{1}{\lambda}$ times the second

expression on the right. Thus

$$\frac{\lambda e_1}{j_1^2} = \frac{e_2}{j_2^2} \qquad \text{or} \qquad e_1 = k e_2,$$

where $k = \frac{j_1^2}{(\lambda j_2^2)}$. Similarly

$$f_1 = k f_2, \qquad \text{and} \qquad g_1 = k g_2.$$

Hence we have the following theorem.

THEOREM VII. — *If* W_1 *and* W_2 *are two functions of the same class when regarded as functions of some variable* z, *then they are also of the same class when regarded as functions of any function of* z.

15. *Functions determined by boundary values.* — As mentioned in the introduction, it is possible to generalize many theorems of the analytic function theory so as to apply to functions of any given class in a given region. As an illustration of this application of our theory we give a generalization of the well-known theorem concerning the determination of a function by means of its values on a given boundary.

Let $w = \varphi(z)$ be a non-analytic function of a certain class in a region including the closed region R, and consider the function

$$F(z) = A(w),$$

where A is analytic. $F(z)$ is then determined by its values on the boundary of a closed region R′ in the w-plane. If now, the closed region R′ corresponds uniquely by means of the function $w = \varphi(z)$, to the closed region R in the z-plane, then the function $F(z)$ is determined by its values on the boundary of the region R. We are thus led to following theorem.

THEOREM VIII. — *If by means of a non-analytic function* $w = \varphi(z)$, *there is a unique correspondence between a closed region* R *of the* z*-plane and a closed region* R′ *of the* w*-plane, then there is one and only one function* $F(z)$ *of the class determined by* $\varphi(z)$ *which takes on given values along the boundary of* R.

Sur l'itération analytique et les substitutions permutables (¹);

PAR P. FATOU.

CHAPITRE I.

L'ITÉRATION ANALYTIQUE DANS LE DOMAINE D'UN POINT DOUBLE ATTRACTIF DE MULTIPLICATEUR NON NUL.

On dit que deux substitutions analytiques effectuées sur une variable complexe z et définies respectivement par $z_1 = f(z)$, $z_1 = g(z)$ sont permutables lorsqu'on a identiquement

$$f[g(z)] = g[f(z)].$$

Pour que cette identité ait un sens, il faut que z appartenant à la fois aux domaines d'existence des deux fonctions f et g, les points $v = f(z)$, $w = g(z)$ appartiennent respectivement aux domaines d'existence des fonctions g et f. Si les fonctions f et g ont des déterminations multiples dans le domaine considéré, cette identité doit naturellement être précisée. Supposons, en particulier, que, lorsque z décrit le domaine D simplement connexe, les points v et w décrivent les domaines D_1 et D'_1 complètement intérieurs à D, les fonctions f et g étant holomorphes dans D. Chacune des substitutions considérées

(¹) Les principaux résultats exposés dans ce Mémoire ont été indiqués dans une Note des *Comptes rendus* (t. 173, 10 octobre 1921) : *Sur les fonctions qui admettent plusieurs théorèmes de multiplication*. M. Julia a énoncé ensuite dans ce même recueil (séance du 24 octobre 1921) des résultats entièrement analogues, en ce qui concerne les substitutions rationnelles.

possède alors un point double et un seul dans D, et ce point double est attractif; c'est là un fait bien simple à démontrer, au moyen de la représentation conforme (¹) ou des familles normales de M. Montel. Soit alors z_0 le point racine de $z = f(z)$ intérieur à D; on a

$$|f'(z_0)| < 1.$$

D'autre part,

$$f[g(z_0)] = g[f(z_0)] = g(z_0).$$

Le point $g(z_0)$ est donc un point double de f, et comme $g(z_0)$ appartient à D, on a

$$g(z_0) = z_0,$$

z_0 est donc un point double attractif commun aux deux substitutions.

La recherche des substitutions $[z|g(z)]$ permutables à $[z|f(z)]$ est alors équivalente au problème de l'itération analytique et M. Kœnigs, dans son Mémoire des *Annales de l'École Normale* sur les équations fonctionnelles, en a donné une solution extrêmement simple, du moins pour le cas de $f'(z_0) \neq 0$. Nous allons rappeler brièvement les résultats obtenus par M. Kœnigs, en renvoyant pour plus de détails au Mémoire cité.

Supposons que le point double attractif soit à l'origine et soit $f'(0) = s$, avec $0 < |s| < 1$. Soit Γ un cercle ayant son centre à l'origine et dans lequel on a

$$|f(z)| < k|z|,$$

k étant une constante positive comprise entre $|s|$ et 1. L'équation fonctionnelle de Schröder admet une solution $\Sigma(z)$, holomorphe dans Γ, nulle à l'origine et de dérivée égale à 1 en ce point :

$$\Sigma[f(z)] = s\Sigma(z).$$

Si le rayon de Γ est suffisamment petit, l'équation

$$u = \Sigma(z)$$

définit une fonction $z = \psi(u)$, holomorphe au voisinage de $u = 0$,

(¹) *Voir* G. Julia, *Sur l'itération des fonctions rationnelles* (*Journal de Mathématiques*, 1918, p. 61 et suiv.).

nulle en ce point, qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\psi(su) = f[\psi(u)].$$

Si l'on pose, d'une manière générale,

$$\begin{aligned} z &= \psi(u), \\ f(z) &= \psi(su), \\ f_\lambda(z) &= \psi(s^\lambda u) = \psi[s^\lambda \Sigma(z)], \end{aligned}$$

λ étant un paramètre arbitraire, on a les identités

$$\left\{\begin{aligned} f_\lambda[f_\mu(z)] &= f_{\lambda+\mu}(z) = f_\mu[f_\lambda(z)], \\ f_0(z) &= z, \\ f_1(z) &= f(z). \end{aligned}\right.$$

On définit ainsi un groupe continu à un paramètre de substitutions régulières à l'origine, permutables entre elles et avec la substitution donnée, et se réduisant à la substitution identique pour $\lambda = 0$, à la substitution donnée pour $\lambda = 1$.

$f_\lambda(z)$ est, comme l'on voit, une fonction analytique de λ. Toute substitution permutable à f, ayant un point double à l'origine et de multiplicateur s' donné, est complètement déterminée et coïncide par suite avec $f_\lambda(z)$, λ étant déterminé par la condition

$$s^\lambda = s'.$$

Pour le voir, il suffit de développer f et g en séries entières :

$$\begin{aligned} f(z) &= sz + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \\ g(z) &= s'z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots \end{aligned}$$

et d'identifier les développements de $f[g(z)]$ et $g[f(z)]$. On obtient ainsi des égalités de la forme

$$s u_n + F_n(u_1, \ldots, u_{n-1}) = s'' u_n + G_n(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$$

ou

$$(s^n - s) u_n = \Phi_n(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}),$$

F_n, G_n, Φ_n étant des fonctions entières des u_k dépendant en outre de s, s' et des a; en faisant $n = 2, 3, \ldots$ on détermine les u_n de proche en proche d'une manière unique, $s'' - s$ n'étant jamais nul. Il y a donc un développement et un seul qui satisfait formellement à l'équation fonc-

tionnelle exprimant la permutabilité, et dont la convergence est assurée par le fait qu'on connaît d'avance la solution

$$g(z) = \psi[s'\Sigma(z)].$$

Nous allons maintenant étudier, avec plus de détails, le cas particulier où $f(z)$ est une fonction rationnelle que nous désignerons dorénavant par $R(z)$, et rechercher la nature des singularités des fonctions $g(z)$ qui vérifient l'équation de permutabilité considérée plus haut, en supposant toujours

$$R(0) = g(0) = 0,$$
$$0 < |R'(0)| < 1,$$

et $g(z)$ régulière à l'origine. Nous avons étudié dans un Mémoire antérieur [1] les singularités de la fonction $\Sigma(z)$ de M. Kœnigs. Nous savons que $\Sigma(z)$ est holomorphe à l'intérieur du domaine connexe D_0 contenant l'origine et invariant par la substitution donnée; qu'elle admet pour points singuliers essentiels tous les points de la frontière f de ce domaine qui est constituée par un ensemble parfait continu ou discontinu; qu'elle est complètement indéterminée en chaque point de cette frontière, mais qu'elle y admet une valeur asymptotique infinie suivant certains chemins, quand le point considéré est accessible; qu'elle admet dans D_0 une infinité de zéros tendant vers tous les points de f, et qui sont les points antécédents de l'origine; qu'enfin sa dérivée $\Sigma'(z)$ y admet également une infinité de zéros tendant vers tous les points frontières et qui sont les antécédents des zéros de $R'(z)$, y compris ces points eux-mêmes. Nous devons maintenant étudier les singularités de la fonction $\psi(u)$ inverse de $\Sigma(z)$, qui est naturellement une fonction multiforme, puisque Σ reprend une infinité de fois chaque valeur finie. Partons de l'élément $\psi_0(u)$ de fonction analytique inverse de $\Sigma(z)$, nulle à l'origine, régulière et univalente dans le cercle Γ

$$(|u| \leq \rho).$$

L'équation fonctionnelle

$$\psi_0(su) = R[\psi_0(u)]$$

---

(1) *Sur les équations fonctionnelles* (*B. S. M. F.*, Chap. VII, 1920).

permet de faire le prolongement de la fonction ψ_0 dans tout le plan et de trouver ses points singuliers. En effet, considérons la fonction

$$\psi(u) = \overline{R}_{-1}[\psi_0(su)]$$

qui coïncide avec $\psi_0(u)$ dans Γ, $\overline{R}_{-1}(z)$ désignant la branche de fonction inverse de $R(z)$ qui est nulle à l'origine; quand u décrit Γ, le point $z = \psi_0(u)$ décrit un domaine simplement connexe Δ entourant l'origine, et le point $\overline{R}_{-1}(z)$ décrit le domaine Δ_{-1} antécédent de Δ et contenant Δ; Δ_{-1} correspond par l'égalité précédente au cercle de rayon $\frac{\rho}{|s|}$ décrit par le point u; $\psi(u)$ est algébroïde dans ce cercle, où elle admettra des points critiques algébriques si Δ_{-1} contient de tels points pour $\overline{R}_{-1}(z)$. En répétant cette opération, nous définissons par l'équation

$$\psi(u) = \overline{R}_{-n}[\psi_0(s^n u)]$$

une fonction algébroïde dans le cercle : $|u| \leqq \frac{\rho}{|s|^n}$, dont le rayon devient infini avec n, identique à $\Psi_0(u)$ dans le cercle initial et dont les valeurs recouvrent le domaine Δ_{-n}, $n^{\text{ième}}$ antécédent de Δ contenant Δ. Une valeur u^* ne pourra devenir critique pour cette fonction que si la valeur correspondante $\Psi_0(s^n u^*)$ est critique pour la fonction algébrique $\overline{R}_{-n}(z)$; or l'on sait ou l'on vérifie immédiatement que les points critiques de la fonction $\overline{R}_{-n}(z)$ dans D_0 sont les conséquents depuis le rang zéro jusqu'au rang $n-1$ inclus, des points critiques c, c', c'', ... de la fonction $\overline{R}_{-1}(z)$ contenus dans D_0; on devra donc avoir

$$\Psi_0(s^n u^*) = R_p(c) \qquad (0 \leqq p \leqq n-1),$$

ce qui équivaut, puisque Ψ_0 est univalente dans Γ, à

$$s^n u^* = \Sigma[R_p(c)] = s^p \Sigma(c),$$
$$u^* = \frac{\Sigma(c)}{s^{n-p}} \qquad (n-p \geqq 1).$$

Ceci étant, marquons dans le plan des u les points

$$\frac{\Sigma(c)}{s^q}, \frac{\Sigma(c')}{s^q}, \frac{\Sigma(c'')}{s^q}, \ldots \qquad (q = 1, 2, 3, \ldots),$$

qui ont l'infini comme point limite unique; remarquons qu'on peut encore désigner ces points par

$$\frac{\Sigma(\zeta)}{s^m}, \frac{\Sigma(\zeta')}{s^m}, \frac{\Sigma(\zeta'')}{s^m}, \ldots \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$\zeta, \zeta', \zeta'', \ldots$ étant les zéros de $R'(z)$ intérieurs à D_0, en supposant toutefois, comme il est permis, que les points $c, c', \ldots$ n'ont pas d'antécédents à l'infini; en effet, D_0 étant un domaine invariant, $c, c', c'', \ldots$ sont respectivement égaux à $R(\zeta)$, $R(\zeta')$, $R(\zeta'')$, ...; $\Sigma(c)$, $\Sigma(c')$, $\Sigma(c'')$ sont égaux à $s\Sigma(\zeta)$, $s\Sigma(\zeta')$, $s\Sigma(\zeta'')$....

Soit alors u_0 un point du plan des u distinct des points de l'ensemble E que nous venons de désigner et joignons Ou_0 par une ligne L ne contenant aucun point de E, formée par exemple de segments de droite, mais absolument arbitraire au point de vue de l'*analysis situs;* soit L la plus grande distance d'un point de cette ligne à l'origine et déterminons l'entier n de manière que

$$\frac{L}{|s|^n} < \rho;$$

la ligne L', transformée de L par $u' = s^n u$, est alors complètement intérieure à Γ, et l'on voit bien que la formule

$$\Psi(u) = \overline{R}_{-n}[\Psi_0(s^n u)]$$

définit une fonction analytique et régulière le long de L; le prolongement analytique de l'élément initial de fonction $\Psi_0(u)$ peut donc se faire au moyen d'une chaîne finie de cercles depuis O jusqu'en u_0, le long de cette ligne; tous les points du plan à distance finie autres que ceux de E sont donc réguliers pour la fonction.

Je dis maintenant que tout point de E est un point critique algébrique pour certaines branches de la fonction, régulier pour les autres. En effet, soit x un antécédent de rang m et intérieur à D_0, du point ζ; on a $R'_n(x) = 0$ pour $n > m$, comme il résulte de

$$R'_n(z) = R'(z).R'[R(z)]\ldots R'[R_{n-1}(z)].$$

Prenons $n > m$ et assez grand pour que le domaine Δ_{-n} considéré plus haut et qui tend vers D_0 pour n infini contienne x; joignons Ox

par une ligne C intérieure à Δ_{-n} et qui a pour $n^{\text{ième}}$ conséquente la ligne C′ intérieure à Δ et joignant l'origine au point $R_n(x)$; à ce point $R_n(x)$, point de ramification de la fonction $R_{-n}(z)$ qui fait remonter de Δ à Δ_{-n}, la relation $u = \Sigma(z)$ fait correspondre un point du plan des u intérieur à Γ qu'on peut appeler $s^n u^*$; la ligne L′, correspondant à C′, joint ce point à l'origine dans Γ; on a

$$s^n u^* = \Sigma[R_n(x)] = s^n \Sigma(x),$$

d'où

$$u^* = \Sigma(x);$$

d'autre part, la relation $R_m(x) = \zeta$ entraîne

$$s^m \Sigma(x) = \Sigma(\zeta),$$

d'où

$$u^* = \frac{\Sigma(\zeta)}{s^m}.$$

Soit maintenant L la ligne déduite de L′ en multipliant par $\frac{1}{s^n}$ l'affixe de chaque point de L, et qui joint l'origine au point u^*; si l'on effectue le prolongement de $\psi_0(u)$ suivant la ligne L, la relation

$$\psi(u) = R_{-n}[\psi_0(s^n u)]$$

montre alors bien clairement que u^* est un point critique algébrique pour $\psi(u)$, puisque la dérivée de la fonction $\psi_0(u)$ n'est jamais nulle dans Γ. Il suit de là que les points de E sont des points critiques algébriques pour certaines branches de $\psi(u)$ et que le prolongement de cette fonction peut se faire le long d'un chemin absolument quelconque, si l'on admet les éléments algébriques. Quant au fait que certaines branches sont régulières aux points de E, il découle aisément de cette remarque bien facile à vérifier que les ordres des points de ramification de $\overline{R}_{-n}(z)$ restent toujours bornés, tandis que le nombre des branches de cette fonction qui se permutent entre elles à l'intérieur de D_0 croît indéfiniment avec n.

Je dis maintenant que l'∞ est pour toute branche de la fonction un point critique transcendant; s'il en était autrement il existerait une ligne aboutissant au point à l'infini sur laquelle $\psi(u)$ tendrait vers une limite déterminée θ; or $\psi(u) = z$ reste toujours intérieur à D_0

d'après la manière dont on a construit cette fonction; de plus, on a toujours

$$\Sigma[\psi(u)] = u,$$

pour toute branche de la fonction, puisque cette relation est vérifiée pour l'élément initial $\psi_0(u)$, et que le premier membre représente une fonction analytique de u; u tendant vers l'∞ et z vers θ, la relation $\Sigma(z) = u$ montre que θ est un point frontière de D_0, puisque $\Sigma(z)$ ne devient infinie en aucun point intérieur à D_0. Si $\psi(u)$ admettait un développement de la forme

$$\theta + \frac{b}{u^{\frac{1}{c}}} + \frac{c}{u^{\frac{2}{c}}} + \ldots,$$

réciproquement u serait développable suivant les puissances descendantes de $(z-\theta)^{\frac{p}{q}}$, et le point $z = \theta$ serait pour $\Sigma(z)$ un point ordinaire ou singulier algébrique, non un point d'indétermination comme cela a lieu pour tous les points frontières de D_0.

Il n'est pas inutile de démontrer, bien que cela puisse paraître évident, que les diverses valeurs de $\psi(u)$ fournissent bien toutes les solutions de l'équation $\psi(u) = z$, pour un point z quelconque intérieur à D_0. En effet, l'équation $\Sigma(z) = u$ entraîne

$$\Sigma[R_n(z)] = s^n u,$$

n étant choisi assez grand pour que le point $s^n u$ tombe à l'intérieur du cercle Γ, et $R_n(z)$ à l'intérieur de Δ; comme Δ et Γ se correspondent d'une manière univoque par $z = \psi_0(u)$ et $u = \Sigma(z)$, on a

$$R_n(z) = \psi_0(s^n u),$$
$$z = \overline{R}_{-n}[\psi_0(s^n u)].$$

z a donc bien été obtenu par le procédé de prolongement de $\psi_0(u)$.

Ce qui précède revient à dire que deux racines z et z' de l'équation

$$\Sigma(z) = u$$

sont toujours liées par une relation de la forme

$$R_n(z) = R_n(z'),$$

qui définit une substitution algébrique; l'ensemble de ces substitutions pour toutes les valeurs de n forme un groupe, discontinu à l'intérieur de D_0, et qui admet la fonction $\Sigma(z)$ comme invariant absolu et caractéristique. Nous reviendrons dans un autre Mémoire sur l'étude de ce groupe, dont nous avons indiqué diverses propriétés dans une Note récente (*C. R. Ac. Sc.*, t. 173, 1921, séance du 24 octobre).

Connaissant maintenant d'une manière approfondie les singularités des fonctions $\Sigma(z)$ et $\psi(u)$, il est bien facile d'en déduire celles des substitutions permutables à R. Nous avons

$$g(z) = \psi[s'\Sigma(z)].$$

Nous poserons comme plus haut

$$u = \Sigma(z),$$

puis

$$w = s'u \qquad \text{et} \qquad g(z) = \psi(w).$$

La fonction $\psi(w)$ admet comme points critiques à distance finie les points de l'ensemble E; pour que w vienne coïncider avec un point de E, par exemple le point $\frac{\Sigma(\zeta)}{s^m}$, il faut que l'on ait

$$\Sigma(z) = \frac{\Sigma(\zeta)}{s' s^m}.$$

Dans un domaine fermé D′ complètement intérieur à D_0, l'ensemble des équations analogues à la précédente, où l'on remplace ζ successivement par les valeurs $\zeta, \zeta', \zeta'', \ldots$ en nombre fini et m par $0, 1, 2, \ldots$, n'admet qu'un nombre fini de solutions puisque le second membre tend vers l'infini avec m et que $\Sigma(z)$ est bornée dans D′. Les points racines en infinité dénombrable de l'ensemble des équations précédentes ont donc leurs points limites sur la frontière de D_0; $g(z)$ est donc analytique dans D_0, sauf en des points isolés.

Considérons le point $w^* = \frac{\Sigma(\zeta)}{s^m}$. On peut joindre l'origine au point w^* par une ligne $\mathcal{L}$ telle que la fonction $\psi(w)$, nulle à l'origine et suivie par continuité le long de cette ligne, ait un point critique en w^*; soit $\mathcal{L}'$ la ligne déduite de $\mathcal{L}$ par la transformation $u = \frac{w}{s'}$. On peut faire décrire au point z dans son plan une ligne $\mathcal{C}$ partant de

l'origine et telle que le point $u = \Sigma(z)$ décrive $\mathcal{L}'$; car on a $z = \psi(u)$, et l'on peut prolonger la fonction $\psi(u)$ le long de $\mathcal{L}'$; le chemin $\mathcal{C}$ obtenu va de l'origine à un point $z^\star$ intérieur à D_0; la fonction $g(z)$ prolongée le long de $\mathcal{C}$ admet certainement un point critique algébrique en $z^\star$, sauf peut-être dans le cas où $\Sigma'(z^\star) = 0$. Que faut-il pour que cela ait lieu? Les points racines de $\Sigma'(z)$ sont les points ζ et leurs antécédents; le lecteur trouvera la démonstration de ce fait dans mon Mémoire cité sur les équations fonctionnelles, ou l'établira lui-même en partant de l'expression

$$\Sigma'(z) = \lim_{n=\infty} \frac{R'_n(z)}{s^n}.$$

Si donc $z^\star$ est racine de $\Sigma'(z)$, on a, en désignant par ζ' une certaine racine de $R'(z)$, et p un entier positif,

$$\Sigma[R_p(z^\star)] = s^p \Sigma(z^\star) = \Sigma(\zeta').$$

Comme on a d'autre part

$$s' \Sigma(z^\star) = w^\star = \frac{\Sigma(\zeta)}{s^m},$$

il vient, en égalant les deux valeurs de $\Sigma(z^\star)$,

$$s' = \frac{\Sigma(\zeta)}{s^m \Sigma(\zeta')} s^p.$$

Ainsi, si l'on se donne ζ et m, pour que les points racines de l'équation

$$\Sigma(z) = \frac{\Sigma(\zeta)}{s' s^m}$$

ne soient critiques pour aucune branche de $g(z)$, il est nécessaire que s' soit de la forme précédente, p étant un entier positif et ζ' une racine de $R'(z)$, distincte ou non de ζ. Cette condition doit être vérifiée, en particulier, si $g(z)$ n'a qu'un nombre fini de points critiques à l'intérieur de D_0. Comme les points ζ, ζ', ... sont en nombre limité, on a donc

$$s' = A_i s^p,$$

les constantes A_i étant en nombre limité. Si nous posons

$$s' = s^\alpha, \qquad g(z) = R_\alpha(z),$$

l'indice d'itération α ne peut prendre, dans ces conditions, qu'un nombre limité de valeurs suivant les modules s et $\frac{2i\pi}{\log s}$, c'est-à-dire que les fonctions $g(z)$ correspondantes sont de la forme

$$R_n[g^{(k)}(z)] = g^{(k)}[R_n(z)],$$

les fonctions $g^{(k)}$ étant en nombre limité.

Supposons en particulier que $g(z)$ soit une fonction algébrique; $g_q(z) = R_{q\alpha}(z)$ sera évidemment une fonction algébrique, quel que soit l'entier q; comme le multiplicateur de cette fonction à l'origine est s^q, on devra avoir

$$s'^q = A_k s^n.$$

Comme les A_k sont en nombre limité, en faisant $q = 1, 2, \ldots$ on devra retrouver deux fois le même :

$$s'^{q_1} = A_k s^{n_1},$$
$$s'^{q_2} = A_k s^{n_2},$$

d'où

$$s'^{q_2 - q_1} = s^{n_2 - n_1},$$

c'est-à-dire

$$s^m = s'^{m'},$$

m et m' étant des entiers non nuls; les deux fonctions $R(z)$ et $g(z)$ sont donc liées par une relation de la forme

$$g_{m'}(z) = R_m(z).$$

Ainsi toutes les substitutions algébriques permutables à R et ayant un point double à l'origine satisfont à une relation de cette forme [1]. Parmi ces fonctions se trouvent toujours les itérées d'indice entier positif ou négatif de $R(z)$. On est certain qu'il n'y en a pas d'autres quand il y a un seul point racine de $R'(z)$ à l'intérieur du domaine D_0 puisque l'on a alors $\zeta' = \zeta$, par suite $s' = s^{p-n}$, donc

$$g(z) = R_{p-n}(z).$$

---

[1] On doit remarquer que la partie fractionnaire de $\frac{m}{m'}$ n'a qu'un nombre fini de valeurs.

Faisons maintenant une remarque à peu près évidente, c'est que z, restant intérieur à D_0, il en est de même de $g(z)$: cela résulte immédiatement du fait que la fonction $\psi(w)$ ne prend que les valeurs représentées par les points intérieurs à D_0 pour toute valeur finie de w; il résulte en outre d'un raisonnement fait plus haut, que $g(z)$ prend effectivement toutes les valeurs de D_0, et fait ainsi la représentation conforme de D_0 sur une surface de Riemann, généralement à une infinité de feuillets, étendue sur D_0. D'autre part, si z décrit un chemin $\mathcal{C}$ dont tous les points tendent vers l'ensemble frontière f, nous savons que $\Sigma(z)$ admet toujours l'infini comme limite d'indétermination; comme toute branche $y = \overline{g}(z)$ de la fonction $g(z)$ vérifie l'identité

$$s'\Sigma(z) = \Sigma(y),$$

le second membre est également non borné dans ces conditions, ce qui implique qu'il y a des points frontières dans le domaine d'indétermination de y; en particulier, s'il arrive que $g(z)$ est continue sur l'ensemble frontière, cet ensemble est invariant par la substitution considérée $[z \mid g(z)]$.

Faisons l'hypothèse que $g(z)$ est uniforme dans D_0; il en sera de même des itérées d'ordre entier et positif de $g(z)$, qui toutes laissent invariant le domaine D_0. Le raisonnement fait plus haut concernant le cas où $g(z)$ est algébrique est encore applicable, et $g(z)$ vérifie une condition de la forme

$$g_n(z) = R_p(z),$$

n et p entiers; on peut supposer $n > 0$, alors $p \geqq 0$, sinon $R_p(z)$ ne serait pas uniforme dans D_0 tandis que $g_n(z)$ est uniforme. On a donc

$$s'^n = s^p \qquad (n > 0,\ p \quad 0).$$

Je pense que $g(z)$, vérifiant ces conditions, est nécessairement rationnelle, mais ne suis pas parvenu à le démontrer dans le cas général. Voici la démonstration pour le cas où $R(z)$ définit une substitution à cercle fondamental de première espèce. Tout d'abord, $g(z)$ ne prend qu'un nombre limité de fois la même valeur dans D_0; en effet, d'une part il résulte de l'expression

$$g(z) = \psi[s'\Sigma(z)],$$

que $g(z)$ prend une fois au moins toute valeur de D_0; il en est de même de

$$g_{n-1}(z) = \psi[s'^{n-1}\Sigma(z)].$$

Donc si $g(z)$ prenait en $N+1$ points la même valeur, N étant le degré de $R_p(z)$, il en serait de même de

$$g[g_{n-1}(z)] = R_p(z),$$

ce qui est impossible. Ensuite, si z décrit un chemin aboutissant en un point de la frontière f de D_0, les limites d'indétermination de $g(z)$ qui comprennent, comme nous l'avons vu, au moins un point de f, ne contiennent aucun point intérieur à D_0; sinon il y aurait, comme on le sait, au moins un continu limite intérieur à D_0; il y aurait donc aussi une infinité de limites d'indétermination pour

$$g_n(z) = g_{n-1}[g(z)],$$

ce qui n'est pas possible puisque cette fonction est rationnelle. Si l'on suppose que f est la circonférence unité, il s'ensuit que $|g(z)|$ tend vers 1 sur f, et cela uniformément; désignons par $a, b, \ldots, d$ les zéros en nombre fini de $g(z)$ autres que zéro et intérieurs à D_0; par $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{d}$ les symétriques de $a, b, \ldots, d$ par rapport au cercle unité; la fonction rationnelle

$$h(z) = z\frac{z-a}{z-\bar{a}}\cdots\frac{z-d}{z-\bar{d}}$$

a un module constant pour $|z| = 1$; comme d'ailleurs le rapport $\frac{h(z)}{g(z)}$ n'a ni zéros ni pôles dans D_0, et que son module est continu et de valeur constante sur la circonférence, on conclut de propositions élémentaires de la théorie des fonctions que ce module est constant dans D_0; la fonction $\frac{h(z)}{g(z)}$ est donc une constante et $g(z)$ est rationnelle. C. Q. F. D.

Revenons maintenant au cas général et démontrons que, s' ayant une valeur quelconque, les points frontières de D_0 sont singuliers pour toutes les branches de $g(z)$; supposons qu'une branche $\bar{g}(z)$ de cette fonction soit régulière au point θ de f; on a l'identité

$$s'\Sigma'(z) = \Sigma'[\bar{g}(z)]\bar{g}'(z).$$

Nous savons que $\Sigma'(z)$ est nulle en une infinité de points ζ_{-n} antécédents de ζ et tendant vers θ; d'où

$$\Sigma'[\overline{g}(\zeta_{-n})]\overline{g}'(\zeta_{-n}) = 0,$$

et comme le second facteur n'est pas nul, au moins à partir d'un certain rang n, on a

$$\Sigma'[\overline{g}(\zeta_{-n})] = 0,$$

ce qui entraîne

$$\overline{g}(\zeta_{-n}) = \zeta'_{-m},$$

ζ' étant une autre racine de $R'(z)$ et m un entier > 0. On a ensuite les égalités évidentes

$$\Sigma[\overline{g}(\zeta_{-n})] = s'\,\Sigma(\zeta_{-n}) = \Sigma(\zeta'_{-m}),$$

$$\Sigma(\zeta_{n}) = \frac{1}{s^n}\Sigma(\zeta),$$

$$\Sigma(\zeta'_{-m}) = \frac{1}{s^m}\Sigma(\zeta'),$$

$$s' = \frac{\Sigma(\zeta')}{\Sigma(\zeta)}s^{n-m} = As^p,$$

A ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, les mêmes que celles obtenues dans la discussion précédente, et p étant un entier de signe inconnu. Ainsi donc les itérées d'indice quelconque de $R(z)$ sont des fonctions admettant dans le domaine D_0 une infinité de points critiques algébriques dont les points limites sont tous les points de l'ensemble frontière de D_0; ces derniers points sont singuliers pour toutes les branches de ces fonctions. L'une de ces propriétés ne cesse d'exister que pour une infinité dénombrable de valeurs de l'indice d'itération, qui sont congrues (mod 1) à un nombre fini d'entre elles: parmi les fonctions exceptionnelles se trouvent les itérées d'indice entier; en général il n'y en a pas d'autres et c'est toujours le cas quand D_0 ne renferme qu'un seul zéro de $R'(z)$.

Il est essentiel de remarquer que le problème de l'itération analytique ainsi résolu n'a pas reçu une solution très satisfaisante; en effet, les fonctions itérées ne sont pas uniformes *dans leur ensemble*, non seulement dans D_0, mais même dans un cercle de rayon arbitrairement petit ayant son centre à l'origine, les points critiques de ces

fonctions tendant vers l'origine quand λ croît indéfiniment par valeurs négatives, ou à partie réelle négative, comme on le voit en prenant par exemple λ réel négatif.

L'isomorphisme du groupe continu de substitutions ainsi défini avec un groupe de translations n'est qu'apparent, du moins quand on considère la totalité des transformations du groupe. Ceci s'applique notamment au groupe discontinu de transformations dérivé de la substitution rationnelle donnée et de son inverse et qui s'obtient en donnant à λ des valeurs entières; ce groupe n'est nullement isomorphe à un groupe cyclique simple de substitutions linéaires hyperboliques comme on pourrait le croire au premier abord; ce n'est même pas un groupe abélien; en effet, soient R^0_{-1}, R^1_{-1} deux branches de la substitution inverse de R, la première étant celle qui transforme l'origine en elle-même; si l'on applique d'abord la première puis la seconde, l'origine se transforme en un point antécédent α distinct de O; si au contraire on applique d'abord la seconde puis la première on obtient d'abord α' antécédent de O, puis β nécessairement distinct de α, puisque l'on a $R(\alpha) = 0$, et $R(\beta) = \alpha' \neq 0$; la définition précise des opérations considérées ici exigerait naturellement la considération d'un système de coupures *invariant* par $[z|R(z)]$ que l'on définira sans peine; mais quelles que soient les déterminations choisies, on voit que l'on a toujours

$$R^0_{-1} R^1_{-1} \neq R^1_{-1} R^0_{-1}.$$

Le groupe obtenu n'est donc pas abélien; il doit en outre être considéré comme dérivant en général de ν substitutions distinctes, ν étant le nombre des branches de R_{-1} qui se permutent entre elles à l'intérieur de D_0. C'est ce qui explique pourquoi l'étude de ce groupe discontinu, à laquelle est consacrée en grande partie notre Mémoire cité plus haut, est très complexe et comparable, par exemple, à l'étude des groupes fuchsiens. On voit ici l'importance de ce fait que R_{-1} présente toujours au moins un point critique à l'intérieur du domaine invariant D_0.

Si l'on revient maintenant au groupe continu, on peut encore remarquer que la fonction itérée $R_\lambda(z)$ n'est pas une fonction uniforme de λ; en effet

$$R_\lambda(z) = \Psi[s^\lambda \Sigma(z)]$$

devient ramifiée comme fonction de λ pour

$$s^{\lambda}\Sigma(z) = \frac{A}{s^{p}} \qquad [A = \Sigma(\zeta)],$$

$$s^{p+\lambda} = \frac{A}{\Sigma(z)},$$

d'où

$$p + \lambda = \frac{\log \frac{A}{\Sigma(z)} + 2ni\pi}{\log s},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\lambda = m_1 + \omega m_2 + [C + C' \log \Sigma(z)],$$

m_1, m_2 étant des entiers; ω, C, C′ des constantes dont la première est toujours imaginaire et la troisième non nulle; on a donc un ensemble de points congruents par rapport à un demi-réseau ($m_1 \leqq 0$) de parallélogrammes, mais dont l'un peut être pris arbitrairement en donnant à z une valeur convenable [1]. On ne peut donc pas appliquer sans précautions la formule

$$R_{\lambda}[R_{\mu}(z)] = R_{\lambda+\mu}(z).$$

D'une manière générale, on doit observer que les propositions générales relatives aux groupes finis ne peuvent plus être appliquées sans restrictions quand les fonctions qui définissent les transformations cessent d'être uniformes soit par rapport aux variables, soit par rapport aux paramètres.

Des circonstances analogues se présentent dans l'étude analytique des équations différentielles.

En résumé, les fonctions régulières à l'origine, nulles en ce point, qui définissent des substitutions permutables à la substitution rationnelle $[z|R(z)]$ possédant elle-même à l'origine un point double attractif de multiplicateur non nul, ont en général une infinité de points critiques algébriques mobiles, c'est-à-dire dépendant de la constante arbitraire, et une infinité non dénombrable de points singuliers transcendants fixes qui sont les points limites des précédents.

---

[1] Si l'on prend s^{λ} comme paramètre, les points critiques, distribués sur une droite ou une spirale, forment un système à un seul indice et tendent vers l'infini; ils dépendent toujours de z de sorte que l'un d'eux peut prendre une position arbitraire.

CHAPITRE II.

L'ITÉRATION ANALYTIQUE AU VOISINAGE D'UN POINT DOUBLE RÉPULSIF.

Quand on se place au point de vue local, ce cas est identique au précédent, comme on le voit en remplaçant la substitution donnée par son inverse; mais lorsqu'on étudie les singularités des fonctions itérées, la fonction donnée étant rationnelle, on obtient des résultats entièrement différents de ceux du paragraphe précédent. L'itération analytique se définit toujours par

$$f(z) = \varphi[s' X(z)],$$

la fonction $X(z)$ vérifiant la même équation fonctionnelle que la fonction $\Sigma(z)$ de M. Kœnigs, tandis que $\varphi(u)$, fonction inverse de $X(z)$ et qui remplace la fonction $\psi(u)$ de tout à l'heure, satisfait à la relation

$$\varphi(su) = R[\varphi(u)] \qquad (|s| > 1).$$

Mais maintenant $\varphi(u)$ représente une fonction uniforme, méromorphe en général, entière si R est un polynome; c'est la fonction de Poincaré que Lattès a eu l'idée d'introduire dans l'étude de l'itération des fonctions rationnelles; $X(z)$, fonction inverse de $\varphi(u)$ est au contraire une fonction multiforme.

Rappelons quelques propriétés connues de la fonction $\varphi(u)$:

Au point de vue des valeurs exceptionnelles de $\varphi(u)$, au seus de M. Picard, trois cas sont à distinguer :

1° Il y a deux valeurs exceptionnelles; la substitution $[z|R(z)]$ est alors la transformée par une substitution linéaire de $(z|z^{\pm m})$, la fonction $\varphi(u)$ se ramène à e^u, en faisant correspondre la valeur $u = 0$ au point double répulsif $z = 1$; la fonction inverse $\log z$ admet les deux points singuliers transcendants 0 et ∞.

2° Il y a une seule valeur exceptionnelle; $[z|R(z)]$ est alors la transformée linéaire d'une substitution rationnelle et entière; on peut donc prendre pour $R(z)$ un polynome, pour $\varphi(u)$ une transcendante entière, la valeur exceptionnelle unique étant infinie. $X(z)$ admet

toujours l'infini comme point critique transcendant; elle possède en outre des points critiques algébriques qui sont les conséquents (à partir du rang 1) des points racines de $R'(z)$. Elle peut admettre enfin d'autres points critiques transcendants qui sont les valeurs asymptotiques finies de $\varphi(u)$, et qui appartiennent toujours à l'ensemble E'_c dérivé des conséquents des points racines de $R'(z)$.

3° Il n'y a pas de valeur exceptionnelle; on peut alors supposer, en transformant au besoin $R(z)$ par une substitution linéaire préalable que l'infini n'est pas un point critique des fonctions $R_{-n}(z)$. La fonction $\varphi(u)$ est alors une fonction méromorphe sans pôles multiples; les points critiques algébriques de $X(z)$ sont les conséquents des points racines de $R'(z)$; les points critiques transcendants (qui peuvent ne pas exister) certains des points de l'ensemble dérivé de ces conséquents.

On obtient facilement maintenant les singularités de $f(z)$. Dans le premier cas, on a

$$f(z) = e^{s' \log z} = z^{s'},$$

fonction qui admet en général les deux points critiques o et ∞, et qui devient algébrique pour les valeurs commensurables de s', rationnelle pour les valeurs entières; l'indice d'itération λ est donné par $s' = m^{\lambda}$ ou $\lambda = \frac{\log s'}{\log m}$. On voit qu'il y a une différence essentielle avec les résultants du Chapitre I, $f(z)$ étant algébrique pour des valeurs du multiplicateur ou de l'indice qui forment un ensemble dense; en outre $f(z)$ devient rationnelle pour des valeurs réelles et incommensurables de l'indice d'itération.

Plaçons-nous maintenant dans le cas 2° ou 3°. Les seuls points singuliers possibles de $f(z)$, en laissant de côté les pôles, sont les points critiques de $X(z)$, d'abord les points critiques algébriques qui sont pour $f(z)$ des points de même nature, puisqu'ils font acquérir à l'argument $w = s' X(z)$ de la fonction φ des valeurs finies; ensuite les points critiques transcendants; si z tend vers un tel point, la branche correspondante de $X(z)$ tend vers l'infini, il en est de même de w; réciproquement, w ne tend vers l'infini que si z tend vers un point critique transcendant de $X(z)$. Ces points sont en général pour $f(z)$ des points critiques transcendants. De toute façon les points critiques

de $f(z)$ sont fixes, c'est-à-dire indépendants de s'. Il est à peu près évident que $f(z)$ ne peut devenir fonction algébrique de z que pour des valeurs de s', en infinité dénombrable. Démontrons-le en toute rigueur. Soit

$$z = \varphi(u)$$
$$y = f(z) = \varphi(s'u),$$

et supposons y et z liés par une relation algébrique de degré m et irréductible :

$$\Sigma A y^\alpha z^\beta = P(y, z) = 0,$$

dont nous laissons les coefficients indéterminés; $\varphi(u)$ étant développable autour de l'origine en série entière : $u + au^2 + \ldots$, le polynome $P(y, z)$ peut être développé suivant les puissances de u, et en égalant à zéro les coefficients, on obtient une infinité de relations linéaires et homogènes par rapport aux coefficients A, où s' entre rationnellement. Comme ces relations sont compatibles par hypothèse et qu'il ne peut exister plus d'une relation de la forme précédente, un nombre suffisamment grand de ces équations de condition détermineront les rapports des coefficients A à l'un d'entre eux, sous forme de fractions rationnelles en s'. Mais si toutes les équations de condition se trouvaient vérifiées quand on laisse s' arbitraire, on aurait une relation de la forme

$$\Sigma A(s') \varphi^\alpha(u) \varphi^\beta(s'u) = 0,$$

et en donnant à u une valeur numérique fixe u_0 différente de zéro, on obtiendrait une relation algébrique entre $\varphi(s'u_0)$ et s', dont les coefficients ne seraient pas tous nuls pour un choix convenable de u_0; cela revient à dire qu'il y aurait une relation algébrique entre u et $\varphi(u)$, ce qui est impossible puisque φ est une fonction méromorphe, non rationnelle. Ainsi donc l'une des équations de condition n'étant pas identiquement vérifiée quand on y remplace les A par leurs valeurs en fonction de s' donnera une équation algébrique en s' ayant un nombre fini de solutions. Il n'y a donc pour un degré donné m qu'un nombre fini de valeurs de s' qui donnent lieu à une relation algébrique entre y et z; en faisant varier m, on obtient pour s' au plus une infinité dénombrable de valeurs.

Considérons en particulier les fonctions elliptiques telles que $\varphi(pu)$

s'exprime rationnellement en fonction de $\varphi(u)$ pour p entier et qui appartiennent à la classe de fonctions méromorphes considérées ici; $X(z)$ est alors une intégrale abélienne de genre 1 et de première espèce qui n'a comme singularités que des points critiques algébriques en nombre fini; la fonction $f(z)$ possède alors, quel que soit s', la même propriété; de plus $f(z)$ devient algébrique pour toutes les valeurs rationnelles de s'; on a donc encore une infinité de valeurs de s' qui donnent pour $f(z)$ une fonction algébrique.

Supposons maintenant que $f(z)$ soit uniforme dans tout son domaine d'existence qui comprend d'ailleurs tout le plan, sauf un point au plus; je dis que $f(z)$ est nécessairement rationnelle. En effet, d'après la relation

$$\varphi(s^n u) = R_n[\varphi(u)],$$

le $n^{\text{ième}}$ conséquent d'un petit domaine du plan des z entourant l'origine couvre tout le plan pour une valeur finie de n, sauf dans le cas 2° où, l'infini étant une valeur exceptionnelle, ce domaine conséquent recouvre seulement un cercle de rayon arbitrairement grand entourant l'origine; en vertu de l'identité

$$R_n[f(z)] = f[R_n(z)]$$

ou

$$f(z) = R_{-n}\{f[R_n(z)]\};$$

il existe toujours une branche de $f(z)$, faisant le prolongement de l'élément initial holomorphe et nul à l'origine, et qui est algébroïde dans un domaine recouvrant tout le plan (cas des fonctions méromorphes sans valeur exceptionnelle), ou dans un cercle de rayon arbitrairement grand (cas des fonctions entières). Comme $f(z)$ est supposée uniforme, elle est nécessairement rationnelle dans le premier cas, entière (transcendante ou non) dans le deuxième cas. Je dis qu'aucune fonction transcendante entière ne peut vérifier une identité de la forme

$$f[R(z)] = R[f(z)]$$

où R est un polynome. En effet, soit $\mathfrak{M}(r)$, le module maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = r$; d'après un théorème de M. Hadamard, $\log \mathfrak{M}(r)$ est une fonction *convexe* de $\log r = \rho$, que nous pouvons

appeler $M(\rho)$. Si $\rho_1 > \rho$, on a donc

$$M(\rho_1) > (\rho_1 - \rho) M'(\rho),$$

$M'(\rho)$ désignant la dérivée à droite de $M(\rho)$, qui existe toujours et qui est une fonction monotone de ρ; si $M'(\rho)$ restait bornée pour ρ infiniment grand, on aurait : $M(\rho) < A\rho$, A étant une constante, c'est-à-dire $\mathfrak{M}(r) < r^A$, ce qui est contraire au théorème de Liouville. Si donc nous faisons croître ρ et ρ_1 indéfiniment de manière que

$$\rho_1 > k\rho \ (k > 1),$$

on aura

$$M(\rho_1) > (k-1) M'(\rho) \rho,$$

d'où l'on conclut que $\frac{M(\rho_1)}{\rho}$ tend vers l'infini. Considérons alors l'équation fonctionnelle précédente. En appelant r_1 le module de $z_1 = R(z)$, e le degré de $R(z)$, on a la double inégalité

$$B r_1^{\frac{1}{e}} < r < B' r_1^{\frac{1}{e}},$$

B et B' étant des constantes positives, dès que r_1 dépasse une certaine limite. L'équation fonctionnelle donne alors l'inégalité

$$M(r_1) < \frac{r^e}{B^e},$$

d'où l'on conclut, en prenant les logarithmes des deux membres, que

$$\frac{M(\rho_1)}{\rho}$$

reste borné; mais, d'autre part, on a

$$\log r_1 > e(\log r - \log B'),$$

d'où

$$\rho_1 > k\rho \qquad (k > 1),$$

pour ρ suffisamment grand; il y a contradiction avec la remarque que nous venons de déduire du théorème de M. Hadamard; donc $f(z)$ ne peut être qu'un polynome. D'une manière plus générale, aucune fonction transcendante entière ne peut vérifier une relation de la

forme

$$f[P(z)] = Q[f(z)]$$

où P et Q sont des polynomes.

Nous allons maintenant rechercher les valeurs de s' pour lesquelles $f(z)$ est rationnelle. Cela revient à chercher les substitutions rationnelles permutables à R et ayant avec celle-ci un point double commun à l'origine. Faisons d'abord une remarque générale sur les substitutions rationnelles permutables :

$$R[S(z)] = S[R(z)].$$

Soit F l'ensemble des points où les $R_n(z)$ ne forment pas une famille normale de fonctions méromorphes au sens de M. Montel; nous savons que F est un ensemble parfait; son complémentaire O est un ensemble ouvert formé d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de domaines; appelons F′ et O′ les ensembles analogues à F et O relatifs à S; F et O sont invariants par R, F′ et O′ par S. Soit ζ un point de O; je dis que $\zeta' = S'(\zeta)$ est encore de O. En effet, à un petit cercle de centre ζ et contenu dans O, la relation $z' = S(z)$ fait correspondre un petit domaine entourant ζ'; appelons δ et δ' les deux domaines ainsi définis; les fonctions $R_n(z)$ forment une famille normale dans δ'; on a, en effet,

$$R_n(z') = R_n[S(z)] = S[R_n(z)].$$

Des propriétés des suites normales il résulte qu'on peut prendre δ assez petit pour que les domaines conséquents $R_n(\delta)$, représentés sur la sphère de Riemann, restent eux-mêmes aussi petits que l'on veut; il en sera de même des domaines transformés de ces derniers par S, c'est-à-dire en vertu des relations qui précèdent, des domaines $R_n(\delta')$. Les domaines $R_n(\delta')$ restant ainsi bornés projectivement, et, par exemple, compris dans un hémisphère de la sphère de Riemann, il en résulte que ζ' appartient à O; en effet, les conséquents d'un domaine arbitrairement petit comprenant un point de F finissent par recouvrir toute la sphère, sauf au plus le voisinage immédiat de deux points.

Ainsi ζ' est de O; donc d'une manière générale, si ζ est de O, il en est de même de $S_n(\zeta)$, quel que soit n; ou, si l'on veut, δ étant un

domaine fermé contenu dans O, il en sera de même de $S_n(\delta)$. Donc les fonctions $S_n(z)$ forment une famille normale dans δ, puisqu'elles n'y prennent jamais les valeurs en nombre infini de l'ensemble F; tout point de O est donc de O', et comme la réciproque a lieu en vertu du même raisonnement, on a $O = O'$, $F = F'$. Ceci suppose, bien entendu, que R et S sont toutes deux de degré > 1. Si S, par exemple, est du premier degré, le raisonnement précédent permettrait de prouver que S est elliptique; mais on arrive plus rapidement à ce résultat de la manière suivante :

Soit $L(z)$, une fonction rationnelle linéaire telle que

$$L[R(z)] = R[L(z)]$$

et soit x un point double de L; on a

$$L(x) = x,$$
$$L[R(x)] = R(x),$$

$R(x)$ est donc encore un point double; si donc x' est l'autre point double on a : $R(x) = x$ ou x' et $R(x') = x'$ ou x; dans tous les cas, $R_2(x) = x$. Si x, x' sont distincts, on peut alors transformer R et L par une substitution linéaire préalable, de manière à avoir

$$R_2(z) = az^p + bz^q + cz^r + \ldots \qquad (abc\ldots \neq 0),$$
$$L(z) = Kz$$

et, en exprimant la permutabilité, il vient,

$$k^{p-1} = k^{q-1} = k^{r-1} = \ldots = 1.$$

Si k est racine primitive de $k^h = 1$, les entiers $p, q, \ldots$ sont congrus à $1 \pmod h$ et $R(z)$ prend la forme $zA(z^h)$; réciproquement, si $R(z)$ est de cette forme, la substitution correspondante est permutable aux substitutions linéaires elliptiques de période h et de points doubles (0 et ∞). On démontre du reste bien facilement qu'une substitution parabolique ne peut pas convenir. Par conséquent, les substitutions L sont en nombre fini puisque leurs points doubles sont en nombre fini et que celles dont les points doubles sont donnés forment un groupe cyclique fini. Le groupe fini des substitutions L peut d'ailleurs coïn-

cider, comme on le verra facilement, avec l'un quelconque des groupes de cette espèce.

Revenons maintenant à la représentation analytique des substitutions permutables et à la recherche effective de celles qui sont rationnelles; on est ramené à trouver les fonctions de Poincaré possédant deux théorèmes de multiplication :

$$\varphi(su) = R[\varphi(u)],$$
$$\varphi(s'u) = S[\varphi(u)].$$

Je dis que si S n'est pas du premier degré, on doit supposer $|s'| > 1$ (on a $|s| > 1$, par hypothèse). En effet, dans un petit domaine du plan des z entourant le point double répulsif, et correspondant à un petit cercle du plan des u qui entoure $u = 0$, les fonctions $S_n(z)$ ne peuvent pas former une famille normale, puisque les ensembles F et F′ coïncident et que le point double répulsif ($z = 0$) de R appartient à F. Or, on a

$$\varphi(s'^n u) = S_n[\varphi(u)];$$

si l'on avait $|s'| \leqq 1$, le premier membre resterait borné pour $|u| < \rho$ et $n \to +\infty$. On doit donc supposer $|s'| > 1$, sauf dans le cas où S est du premier degré et par suite de période finie h, ce qui entraîne $s^h = 1$. Comme on a

$$\varphi(s^n u) = R_n[\varphi(u)],$$
$$\varphi(s'^p u) = S_p[\varphi(u)],$$

nous dirons que les deux théorèmes de multiplication envisagés ici sont essentiellement distincts si l'on a $s^n \neq s'^p$, par suite $R_n(z) \neq S_p(z)$ et nous nous efforcerons de trouver les fonctions $\varphi(u)$ possédant une telle propriété et dont nous avons déjà donné des exemples.

A l'ensemble parfait F du plan des z, la relation $z = \varphi(u)$ fait correspondre dans le plan des u un ensemble parfait Π, invariant par les deux substitutions linéaires $(u|su)$ et $(u|s'u)$, de sorte que si u appartient à Π, il en est de même de $s^{m_1} s'^{m_2} u$ pour m_1 et m_2 entiers. Cherchons quelles valeurs peut prendre le facteur

$$s^{m_1} s'^{m_2} = e^{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3}$$
$$(\omega_1 = \log s, \qquad \omega_2 = \log s', \qquad \omega_3 = 2i\pi)$$

ou encore l'expression $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3$ pour m_1, m_2, m_3 entiers, sachant que cette expression n'est jamais nulle quand m_1, m_2, m_3 ne sont pas nuls tous les trois, puisqu'il n'existe aucune relation de la forme $s^n = s'^p$. Deux cas sont à distinguer :

1° Le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ est imaginaire et les points multiples entiers de ω_3 n'appartiennent jamais aux droites joignant deux sommets du réseau de parallélogrammes construit sur (ω_1, ω_2). Les composantes du vecteur ω_3 suivant ω_1 et ω_2 sont de la forme $k\omega_1$, $k'\omega_2$, k et k' étant des nombres réels et incommensurables qui ne sont liés par aucune relation linéaire à coefficients entiers; en effet, de

$$\omega_3 = k\omega_1 + k'\omega_2,$$
$$p_1 k + p_2 k' + p_3 = 0,$$

on déduirait

$$p_2\omega_3 = k(p_2\omega_1 - p_1\omega_2) - p_3\omega_2,$$

exprimant que le point $p_2\omega_3$ se trouve sur la droite joignant le point $-p_3\omega_2$ au point $p_2\omega_1 - (p_1 p_3)\omega_2$, c'est-à-dire deux points du réseau (distincts, puisque p_1 et p_2 ne sont pas tous deux nuls); on peut alors écrire

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 = \omega_1(m_1 + m_3 h) + \omega_2(m_2 + m_3 k') = \lambda\omega_1 + p\omega_2.$$

En vertu d'un théorème général dû à Kronecker concernant la résolution approchée des équations de Diophante et dont nous donnons à la fin de ce travail une démonstration simple pour le cas particulier qui nous occupe, les expressions

$$\lambda = m_1 + m_3 k,$$
$$\mu = m_2 + m_3 k$$

s'approchent autant que l'on veut et simultanément de tout système de deux valeurs réelles données à l'avance. Les points $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2$ sont denses dans tout le plan, il en est de même des $s^{m_1} s'^{m_2}$; par suite Π couvre tout le plan des u, F tout le plan des z. On sait qu'une telle circonstance ne peut pas se présenter si R est un polynome, c'est-à-dire si $\varphi(u)$ est une transcendante entière; mais elle se présente pour les fonctions elliptiques à multiplication complexe et de manière que

les nombres s et s' présentent les caractères que nous venons de leur attribuer. Soit par exemple une fonction elliptique, telle que $\wp u$, admettant une formule de multiplication rationnelle par un entier ordinaire arbitraire et par l'entier quadratique imaginaire $s' = \rho e^{i\theta}$, on posera donc

$$\log s = \log E,$$
$$\log s' = \log \rho + i\theta = \frac{1}{2}\log N + i\theta.$$

N étant la norme de s'. Une relation linéaire à coefficients entiers entre les quantités désignées plus haut par k et k' équivaudrait à

$$N^{m_2} = E^{2m_1 + m_2 \frac{\theta}{\pi}},$$

ce qui est impossible si l'on suppose E premier à N et $\frac{\theta}{\pi}$ incommensurable; cette dernière condition est en général vérifiée; $\frac{\theta}{\pi}$ n'est commensurable que si le nombre $\frac{s'}{\sqrt{N}}$ est une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, par suite un entier algébrique, ce qui n'a pas lieu en général; on le constatera sur l'exemple

$$s' = 2 + \sqrt{-3}, \qquad \frac{s'}{\sqrt{N}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \xi, \qquad 7\xi^4 - 2\xi^2 + 7 = 0.$$

2° Le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ est réel et incommensurable, ou un point multiple entier de ω_3 se trouve sur une droite joignant deux points du réseau (ω_1, ω_2).

Plaçons-nous d'abord dans la seconde hypothèse: le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ est imaginaire, et le point $p\omega_3$ se trouve sur une droite du réseau (ω_1, ω_2), p étant le plus petit nombre positif qui satisfasse à cette condition; soit d cette droite du réseau; si d ne passe pas par l'origine, la première droite du réseau parallèle à d que l'on rencontre à partir de l'origine se déduit de d par une homothétie de rapport $\frac{1}{q}$ et de centre O, q étant un entier positif; le point $\frac{p\omega_3}{q}$ se trouve par conséquent entre deux sommets du réseau qui forment avec l'origine un

triangle, moitié d'un parallélogramme générateur du réseau; soient ω'_1, ω'_2 les deux sommets en question; on a

$$\frac{p}{q}\omega_3 = \omega'_1 + k\omega'_2,$$

k étant un nombre réel (compris entre o et 1), nécessairement incommensurable; tout point Ω du système $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3$ peut aussi se représenter par $m_1\omega'_1 + m_2\omega'_2 + m_3\omega_3$, et en remplaçant ω'_1 par sa valeur tirée de l'équation précédente,

$$\Omega = m_3\omega_3 + \omega'_2(m_2 - km_1) + m_1\frac{p}{q}\omega_3.$$

En vertu d'une propriété classique des incommensurables, $m_2 - km_1$ prend des valeurs infiniment voisines de tout nombre réel pour m_1 et m_2 entiers; d'autre part, p et q étant premiers entre eux, on peut écrire

$$\Omega = \lambda\omega'_2 + m_3\omega_3 + \frac{m}{q}\omega_3,$$

λ étant un paramètre réel qui prend des valeurs discrètes mais denses de $-\infty$ à $+\infty$, et m prenant les valeurs entières d'un système complet (mod q).

Si la droite d passe par l'origine, on a

$$\omega_3 = \frac{1}{k}\omega'_2 \qquad (k, \text{ réel, incommensurable}),$$

$$\Omega = m_1\omega'_1 + (m_3 + m_2 k)\omega_3 = m_1\omega'_1 + \lambda\omega_3,$$

λ étant encore un paramètre qui prend des valeurs réelles et denses de $-\infty$ à $+\infty$.

Enfin, si $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ est réel et incommensurable, on a

$$\omega_2 = k\omega_1,$$

$$\Omega = (m_1 + km_2)\omega_2 + m_3\omega_3 = \lambda\omega_2 + m_3\omega_3.$$

En définitive, on peut écrire, dans tous les cas,

$$s^{m_1}s'^{m_2} = e^{\lambda(a+bi)+2i\pi\frac{m}{q}},$$

λ conservant sa signification, m prenant les valeurs entières d'un système complet (mod q); q peut être égal ou inférieur à 1; a n'est pas

nul, sinon on aurait $|s^{m_1} s'^{m_2}| = 1$, contrairement à l'hypothèse $|s| > 1$ et $|s'| > 1$.

Soit u_0 un point fixe du plan des u; posons

$$u_0 = e^{\alpha_0} e^{i\omega_0}.$$

Il vient

$$s^{m_1} s'^{m_2} u_0 = e^{\alpha_0 + \lambda a} e^{i\left(\omega_0 + \lambda b + 2m\frac{\pi}{q}\right)},$$

ou

$$u = e^t e^{i(ct + \varkappa)},$$

en posant

$$t = \alpha_0 + \lambda a,$$

$$c = \frac{b}{a},$$

$$\varkappa = \omega_0 - c\alpha_0 + 2\frac{m\pi}{q},$$

t prend toujours des valeurs denses de $-\infty$ à $+\infty$, c est indépendant de u_0, $\varkappa$ seul en dépend et prend en outre q valeurs distinctes (mod 2π). L'équation qui donne u définit un système de q spirales logarithmiques égales, et qui restent égales à l'une d'entre elles quand on fait varier $\varkappa$; elles s'enroulent toutes dans le même sens autour de l'origine. Pour $b = 0$, ces spirales sont remplacées par des droites.

Si l'ensemble parfait Π ne couvre pas tout le plan, il est donc constitué par un faisceau de spirales ou de demi-droites issues de l'origine; chacune de ces lignes coupe en un seul point un cercle de centre O; sur la circonférence d'un tel cercle, il existe des arcs contigus à Π. Examinons le changement produit sur ce faisceau par la substitution $(u|su)$ et ses puissances; nous savons qu'il est invariant; or, si l'on pose

$$s = e^{h+ik},$$

il vient

$$s^p u = e^{t+ph} e^{i(ct+\varkappa+pk)} = e^{t'} e^{ict'+i\varkappa+ip(k-ch)},$$

en posant

$$t' = t + ph.$$

La substitution $(u|s^p u)$ produit donc sur ce faisceau l'effet d'une rotation de l'angle $p(k - ch)$; donc pour que les transformés successifs d'un arc contigu à Π, qui doivent rester des arcs contigus, n'empiètent pas les uns sur les autres, il faut que $k - ch$ soit commensurable à 2π; donc il existe une puissance de la substitution $(u|su)$

qui laisse invariant le secteur, contigu à Π, limité par deux spirales ou deux droites du faisceau. Remarquons que Π est continu, deux de ses points pouvant toujours être reliés à l'origine par deux arcs de spirale. Cherchons la traduction de ces faits dans le plan des z, quand on pose $z = \varphi(u)$; pour éviter les difficultés relatives aux valeurs limites de $\varphi(u)$ à l'infini, les domaines considérés n'étant pas bornés, considérons seulement la partie Δ_0 du secteur Δ intérieure à un petit cercle de centre O; à Δ_0 correspond point par point un domaine D_0 du plan des z; comme $(u|s^p u)$ change Δ_0 en $\Delta'_0 > \Delta_0$, on en conclut que $[z|R_p(z)]$ change D_0 en $D'_0 > D_0$; le domaine D, contigu à F, dont font partie D_0 et D'_0 est par suite invariant par la même substitution; aux deux arcs de spirale qui limitent Δ_0 correspondent deux arcs de courbe simples au sens de M. Jordan, et d'ailleurs analytiques sauf en O dans le plan des z; ces deux arcs qui font partie de F constituent la frontière de ce domaine D_0, en y adjoignant la coupure artificielle formée d'un arc analytique, image de l'arc de cercle par lequel on a limité Δ_0. Remarquons, en outre, que D est simplement connexe, puisque F est continu en vertu de la remarque faite plus haut au sujet de Π. Je dis enfin que D n'est pas un domaine invariant singulier, au sens que j'ai donné à ce mot dans mon Mémoire cité, c'est-à-dire que les fonctions limites des itérées de $R(z)$ ne peuvent y être que des constantes; en effet, nous avons démontré qu'un domaine singulier, invariant par une substitution rationnelle $[z|T(z)]$, ne contient qu'un antécédent de chacun de ses points, les points limites des antécédents successifs étant fonctions de la position du point initial; or le domaine Δ_0 contient les transformés de ses points par les puissances négatives de la substitution $(u|s^p u)$, lesquels tendent uniformément vers l'origine; donc le domaine D_0 contient les antécédents successifs de chacun de ses points, obtenus par certaines branches de $T_{-n}(z)$ ou $-R_{-np}(z)$, ces points tendant uniformément vers l'origine. Il y a contradiction avec le théorème que nous venons de rappeler et l'hypothèse que Δ est un domaine singulier.

Donc D n'est pas un domaine singulier, et ne peut être, comme je l'ai démontré en détail, dans mon Mémoire sur les équations fonctionnelles, que le domaine immédiat d'un point double attractif ou d'un point double singulier de multiplicateur $+1$; comme, en outre,

la frontière continue de ce domaine présente des arcs analytiques isolés, il faut nécessairement que la frontière de ce domaine soit une circonférence (ou une droite); ou un arc de circonférence (ou un segment de droite), cette ligne frontière constituant à elle seule l'ensemble F. Cette propriété, qui est vraie pour $[z|R_p(z)]$, l'est également pour $[z|R(z)]$. Cette dernière substitution est donc de la classe particulière que j'ai appelée $\mathfrak{S}$ et qui comprend : 1° des substitutions à cercle fondamental de première espèce (cas de la frontière fermée); 2° des substitutions qui se déduisent des premières par une transformation du second degré (cas de la frontière ouverte).

Ces résultats importants étant rappelés, il est maintenant facile de déterminer celles des fonctions $\varphi(u)$ qui sont entières. Il s'agit, en définitive, d'obtenir des substitutions de la classe $\mathfrak{S}$, qui sont entières: c'est là une discussion facile et que j'ai déjà faite dans mon Mémoire sur les équations fonctionnelles (Chap. III, § 25). Le résultat est le suivant : les substitutions cherchées peuvent être transformées par une substitution linéaire en $Z = z^m$, pour la première sorte, et pour la deuxième en $Z = \pm P_m(z)$, $P_m(z)$ étant le polynome de Serret qui exprime $\cos m\varphi$ en fonction de $z = \cos\varphi$. On en déduit les fonctions entières cherchées, c'est-à-dire les fonctions de Poincaré, correspondant aux divers points doubles répulsifs $\left(z^{m-1} = 1,\ z = e^{\frac{2w\pi}{m-1}}\right)$; elles sont de la forme Ae^{ku}, A et k étant déterminés par les conditions

$$\varphi(0) = z_0 \qquad \text{(point double)},$$
$$\varphi'(0) = 1,$$

d'où

$$\varphi(u) = z_0\, e^{\frac{u}{z_0}}.$$

Les multiplicateurs donnant lieu à des formules rationnelles de multiplication sont les nombres entiers.

Pour les substitutions du second type, on obtient essentiellement les fonctions $\cos u$. Soit, par exemple,

$$z = \cos w,$$
$$P(z) = \cos mw.$$

Posons

$$\varphi(u) = \cos(ku + h) = \cos w,$$
$$\varphi(mu) = \cos(mku + h) = \cos mw.$$

La première relation donne

$$ku + h = \pm w,$$
$$mku + h = \pm mw - (m-1)h.$$

On aura

$$\cos(mku + h) = \cos mw$$

si

$$(m-1)h = 2N\pi.$$

Si l'on attribue à $\varphi(u)$ le multiplicateur $-m$, on trouve

$$(m+1)h = 2N\pi.$$

Les valeurs qui en résultent pour $\varphi(0) = \cos h$ sont bien toutes les racines de $z = P(z)$; le facteur k qui est resté arbitraire pourra être choisi de manière que $\varphi'(0) = 1$, du moins si $\sin h$ n'est pas nul, car on a

$$\varphi'(0) = -k \sin h.$$

h peut toujours prendre la valeur zéro qui correspond au point double $z = 1$; la fonction de Poincaré correspondante n'est donc pas la fonction $\cos u$, dont la dérivée est nulle pour $u = 0$, mais la fonction

$$\varphi(u) = \cos(i\sqrt{2u}) = 1 + u + \ldots.$$

En écrivant

$$w = i\sqrt{2u},$$
$$\cos mw = \cos(i\sqrt{2su}),$$

on voit que

$$s = m^2.$$

Pour $z = -1$ (m impair), on doit prendre de même

$$z = \varphi(u) = -\cos(\sqrt{2u}) = -1 + u + \ldots,$$
$$\sqrt{2u} = w + \pi,$$
$$\varphi(m^2 u) = -\cos(mw + m\pi) = \cos mw = P(z).$$

Si l'on considère maintenant la substitution

$$z = \cos w,$$
$$P(z) = -\cos mw,$$

elle se ramène à la précédente dans le cas de m impair par la transformation $(z \mid -z)$, mais dans le cas de m pair, elle en est distincte; car elle échange entre eux les points $(-1, +1)$, tandis que précédemment le point $(+1)$ était un point double. On voit facilement que les

fonctions de Poincaré sont toujours de la forme $\cos(ku+h)$ pour tous les points doubles répulsifs.

Si l'on se donne, *a priori*,

$$\varphi(u) = \cos(ku+h),$$

on trouve que $\varphi(su)$ s'exprime rationnellement en fonctions de $\varphi(u)$ pour s entier et $h = \frac{m\pi}{s-1}$; on a donc $\frac{h}{\pi} = \frac{p}{q}$, p et q premiers entre eux, et les multiplicateurs qui conviennent sont les entiers congrus à 1 (mod q). Pour les expressions $\cos(k\sqrt{u})$, les multiplicateurs cherchés sont les carrés des nombres entiers.

On voit bien que les fonctions entières de Poincaré admettant deux théorèmes de multiplication distincts sont essentiellement les fonctions e^u et $\cos u$, sans qu'il y ait lieu d'insister davantage sur la signification du mot essentiellement.

La recherche des fonctions méromorphes possédant la même propriété et qui ne sont pas, comme $\operatorname{tang} u$, la transformée linéaire d'une fonction entière paraît difficile, et je ne sais pas s'il y en a d'autres que les fonctions elliptiques [1]. On peut démontrer, toutefois, que les substitutions à cercle fondamental ne fournissent pas d'autre solution du problème que les transformées linéaires des fonctions entières déjà obtenues. Mais pour arriver à ce résultat, nous avons besoin de quelques préparatifs que nous allons maintenant exposer.

Démontrons d'abord ceci : soient $[z|R(z)]$ et $[z|S(z)]$ deux substitutions rationnelles permutables ; si α est un point double de la première, il en est de même des points $S(\alpha)$, $S_2(\alpha)$, ..., $S_p(\alpha)$, ..., qui, en outre, sont de la même espèce que α.

En effet, si $R(\alpha) = \alpha$, en vertu de l'identité

$$R[S(z)] = S[R(z)],$$

on a aussi

$$R[S(\alpha)] = S(\alpha).$$

$S(\alpha)$ est donc un point double de la première substitution. En outre, en dérivant l'identité qui précède, on a

$$R'[S(z)]S'(z) = S'[R(z)]R'(z).$$

---

[1] Il résulte des recherches de M. F. Ritt, parues depuis la rédaction du présent Mémoire, que les fonctions elliptiques répondent seules à la question. Les démonstrations de M. Ritt, de nature algébrique, sont sans lien avec les méthodes employées ici.

Au voisinage de $z = \alpha$, on a

$$R(z) = \alpha + k(z-\alpha)^m + l(z-\alpha)^{m+1} + \ldots \qquad (k \neq 0),$$
$$S(z) = S(\alpha) + c(z-\alpha)^p + d(z-\alpha)^{p+1} + \ldots \qquad (c \neq 0).$$
$$S'(z) = cp(z-\alpha)^{p-1} + d(p+1)(z-\alpha)^p + \ldots = cp(z-\alpha)^{p-1}[1 + \mathfrak{P}_1(z-\alpha)],$$
$$S'[R(z)] = cpk^{p-1}(z-\alpha)^{m(p-1)}[1 + \mathfrak{P}_2(z-\alpha)],$$
$$R'(z) = km(z-\alpha)^{m-1}[1 + \mathfrak{P}_3(z-\alpha)],$$

d'où

$$R'[S(z)] = \frac{S'[R(z)]\,R'(z)}{S'(z)} = mk^p(z-\alpha)^{(m-1)p}[1 + \mathfrak{P}_4(z-\alpha)],$$

en désignant en général par $\mathfrak{P}_i(z-\alpha)$ une série entière en $z-\alpha$, nulle pour $z = \alpha$. Pour $m = 1$, la formule précédente devient

$$R'[S(z)] = k^p(1 + \mathfrak{P}_4(z-\alpha)],$$

et pour $z = \alpha$,

$$R'[S(\alpha)] = k^p.$$

Pour $m > 1$, on a

$$R'[S(\alpha)] = 0.$$

Ainsi le multiplicateur au point $S(\alpha)$ de la première substitution est une puissance d'exposant positif entier, du multiplicateur en α; ces deux points doubles sont donc de même espèce : attractifs, répulsifs, indifférents, et dans le premier cas, en même temps, de multiplicateur nul ou différent de zéro; il en sera de même pour tous les points de la suite $S(\alpha)$, $S_2(\alpha)$, ..., et comme R n'a qu'un nombre fini de points doubles, cette suite comprend deux points identiques

$$S_p(\alpha) = S_{p+q}(\alpha) = S_q[S_p(\alpha)].$$

Le point $S_p(\alpha)$ est donc un point double de R et un point périodique d'ordre q de S, et de même espèce que α; en tant que point double de la substitution S_q, il est encore de même espèce pour S_q et pour R.

Considérons deux substitutions rationnelles permutables R et S de degré > 1, telles que l'on n'ait jamais $R_m = S_{m'}$ pour m et m' entiers; si R n'a pas de point double répulsif, on sait qu'il existe une puissance R_h de R qui possède un point double répulsif α; on pourra trouver, d'autre part, d'après ce qui précède, un point double répulsif β commun à R_h et à $S_{h'}$ pour une valeur convenable de h'; les deux substitutions R_h et $S_{h'}$ étant désignées par R' et S', on a

toujours

$$R'S' = S'R'$$

et

$$R'_m \neq S'_{m'}$$

pour m et m' entiers, R' et S' ayant, en outre, un point répulsif commun. Si R et S sont entières, il en est de même de R' et S'; réciproquement, si R' et S' sont entières, ce sont deux substitutions de la classe $\mathfrak{S}$ que nous venons d'étudier; R et S sont elles-mêmes entières et de la même classe; il y a toutefois une exception pour les substitutions $\mathfrak{S}$ de la première catégorie, réductibles à la forme $(z \mid z^m)$, qui peuvent être les itérées d'ordre entier d'une substitution fractionnaire $(z \mid z^{-\mu})$, pour une valeur paire de l'indice d'itération.

Soient donc R et S deux substitutions permutables, rationnelles et entières telles que l'on n'ait jamais $R_m = S_{m'}$. Deux cas sont à distinguer :

1° R peut être transformée par une substitution linéaire en $(z \mid z^m)$; la même substitution linéaire transforme alors S en $(z \mid a z^{m'})$; on a $a^{m-1} = 1$; m' peut être un entier quelconque.

2° R peut être ramenée par une transformation linéaire à la forme paramétrique

$$z = \cos w,$$
$$R(z) = \pm \cos m w,$$

qui est la forme générale des substitutions rationnelles et entières admettant comme ensemble F le segment $(-1, +1)$. La substitution S sera donc ramenée, par la même transformation linéaire, à la forme paramétrique

$$z = \cos w,$$
$$S(z) = \pm \cos m' w.$$

Si l'on écrit

$$z = \cos w,$$
$$R(z) = \varepsilon \cos m w;$$
$$z = \cos w',$$
$$S(z) = \varepsilon' \cos m' w',$$

on vérifie facilement que R et S sont permutables : 1° si $\varepsilon = \varepsilon' = +1$; 2° si $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$, m impair; 3° si $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$, m' impair; 4° si $\varepsilon = \varepsilon' = -1$, m et m' de même parité.

Revenons maintenant au cas des substitutions du type Θ, que nous désignons toujours par R et S, ayant un point double répulsif commun à l'origine, R ne pouvant être transformée par aucune substitution linéaire en une substitution entière; la fonction de Poincaré $\varphi(u)$ qui vérifie les identités

$$\varphi(su) = \mathrm{R}[\varphi(u)],$$
$$\varphi(s'u) = \mathrm{S}[\varphi(u)],$$

avec $s^{m_1} \neq s'^{m_2}$, pour m_1 et m_2 entiers, est donc une fonction méromorphe sans valeurs exceptionnelles au sens de M. Picard, et tout point du plan z possède, relativement à R, une infinité d'antécédents distincts; en outre, R et S, étant du type Θ, possèdent chacune un ou deux points doubles attractifs, ou encore un point double singulier de multiplicateur $+1$; on peut, en effet, laisser de côté le cas des substitutions à cercle fondamental du type II qui possèdent un cycle attractif d'ordre 2, et permutent entre eux l'intérieur et l'extérieur du cercle; il suffit, pour cela, de changer R en R_2, s en s^2; d'autre part, d'après une discussion faite plus haut, il est permis de supposer que ces points doubles attractifs ou singuliers sont les mêmes pour R et S; il suffit de changer S en S_p.

Soient d'abord z_0 un point double attractif de R et S, u_0 une racine de $\varphi(u) = z_0$; on a

$$\varphi(s'^p u_0) = \mathrm{S}_p(z_0) = z_0,$$
$$\mathrm{R}_n\left[\varphi\left(\frac{s'^p}{s^n} u_0\right)\right] = z_0.$$

Les points $\frac{s'^p}{s^n} u_0$ du plan des u ont donc pour homologues dans le plan des z des antécédents du point double z_0; les nombres s et s' sont d'ailleurs nécessairement réels, l'ensemble II devant se réduire à une droite ou à une demi-droite; le rapport $\frac{\log|s|}{\log|s'|}$ est incommensurable; donc $\frac{s^n}{s'^p}$ pour n et p entiers positifs prend des valeurs infiniment voisines de 1 et distinctes de 1; les antécédents de z_0 par R, distincts de z_0, auraient donc z_0 pour point limite; ceci est impossible, les points limites des antécédents de z_0 appartenant à la frontière F.

Supposons maintenant que R possède un point double singulier; la démonstration qui précède ne s'applique plus. Remarquons alors

(*loc. cit.*, Chap. VII, § **70**) que les points critiques algébriques de la fonction inverse de $\varphi(u)$ coïncident avec les conséquents des points critiques de $R_{-1}(z)$ (à partir du rang zéro); ceci est vrai sans exception, $\varphi(u)$ n'ayant pas de valeur exceptionnelle. Ces points critiques algébriques coïncident, d'autre part, avec les conséquents des points critiques de $S_{-1}(z)$. Si donc α, α', ... sont les points critiques de $R_{-1}(z)$; β, β', ... ceux de $S_{-1}(z)$, à tout $\alpha^{(i)}$ et à tout entier n positif ou nul correspond un $\beta^{(k)}$ et un entier p positif ou nul tel que

$$R_n(\alpha^{(i)}) = S_p(\beta^{(k)})$$

et réciproquement; ceci reste vrai quand on se borne aux $\alpha^{(i)}$ et $\beta^{(k)}$ qui sont extérieurs à F, et nous savons qu'il en existe. Soit donc α un point critique de R_{-1} extérieur à F; considérons les points z qui vérifient les équations

$$R_n(z) = S_p(\alpha),$$

en donnant à n et p toutes les valeurs positives entières. Si l'on appelle u' une racine de l'équation $\varphi(u) = \alpha$, l'équation qui précède est vérifiée pour

$$z = \varphi\left(\frac{s'^p u'}{s^n}\right).$$

Or, comme nous l'avons remarqué plus haut, les points $\frac{s'^p u'}{s^n}$ sont répartis d'une manière dense sur une droite et ont notamment pour limite le point u'; les points z correspondants auraient donc le point α pour point limite. Je dis que ceci est impossible. En effet, l'équation $R_n(z) = S_p(\alpha)$ équivaut à

$$R_n(z) = R_q[\beta^{(k)}];$$

autrement dit, z est homologue de $\beta^{(k)}$, par une substitution du groupe G des substitutions algébriques

$$R_n(z) = R_q(z').$$

Or les $\beta^{(k)}$ sont en nombre fini et intérieurs au domaine ou à l'un des deux domaines de convergence relatifs au point double singulier; or en tous les points intérieurs à un tel domaine, le groupe G est proprement discontinu; cela résulte, si l'on veut, de l'existence d'une fonction

uniforme et holomorphe à l'intérieur de ce domaine, invariante par les substitutions de G, par exemple, la fonction

$$I(z) = e^{\frac{2i\pi}{\omega} A(z)},$$

$A(z)$ étant la solution fondamentale de l'équation d'Abel,

$$A[R(z)] = A(z) + \omega,$$

qui est elle-même holomorphe dans le domaine considéré. Les points homologues des $\beta^{(k)}$ par les substitutions de G tendent donc vers F et ne sauraient tendre vers α, qui est extérieur à F. Nous retrouverons d'ailleurs dans les chapitres suivants une démonstration plus générale du fait que nous venons d'établir.

En résumé, si deux substitutions rationnelles R et S sont permutables et ne vérifient aucune relation

$$R_n = S_p$$

pour des valeurs entières de l'indice d'itération, R et S étant, d'ailleurs, l'une et l'autre, de degré > 1, il y a deux cas à distinguer :

1° L'une des substitutions R ou S est telle que l'ensemble F correspondant ne couvre pas tout le plan : ce qui arrive, notamment, quand R est une substitution entière, ou plus généralement possède un point double ou un cycle attractif ou de multiplicateur $e^{2i\pi\frac{p}{q}}$. Alors les deux substitutions peuvent être ramenées par une même transformation linéaire à la forme

$$Z = z^m,$$
$$Z = az^{m'},$$

m et m' étant des entiers positifs ou négatifs et $a^{m-1} = 1$; ou bien encore R et S seront transformables de la même manière en

$$Z = \varepsilon \cos(m \arccos z),$$
$$Z = \varepsilon' \cos(m' \arccos z),$$

m, m' entiers, $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1$, les signes de ε et ε' étant convenablement choisis.

2° L'ensemble F relatif aux substitutions R et S couvre tout le plan.

On ne connaît pas, dans ce cas, la forme générale des substitutions R et S, mais seulement des exemples provenant des formules de multiplication des fonctions elliptiques [1].

Je rappelle que F peut être défini comme l'ensemble dérivé des points racines des équations $R_n(z) = z$.

Une conséquence immédiate de ce qui précède est que, si R et S sont deux substitutions permutables de degré > 1, les points des cycles attractifs relatifs à R et S forment deux groupes (finis) de points qui coïncident.

On peut traiter d'une manière analogue le problème qui consiste à trouver, parmi les fonctions méromorphes de Poincaré possédant un théorème de multiplication, celles qui sont périodiques, soit à trouver les fonctions méromorphes qui vérifient les deux équations

$$\varphi(ku) = R[\varphi(u)],$$
$$\varphi(u + \omega) = \varphi(u).$$

On suppose

$$\varphi(0) = R(0) = 0 \qquad (|k| > 1),$$

hypothèses faciles à justifier.

On déduit de là

$$\varphi(ku + k\omega) = R[\varphi(u + \omega)] = R[\varphi(u)] = \varphi(ku),$$

d'où, en changeant u en $\frac{u}{k}$ dans les deux membres extrêmes,

$$\varphi(u + k\omega) = \varphi(u);$$

$k\omega$ est donc encore une période. Si k est imaginaire, $\varphi(u)$ est une fonction doublement périodique à multiplication complexe; k est alors un nombre quadratique imaginaire.

Si k est réel, il est nécessairement commensurable. Je dis même qu'il est entier. En effet, si u^* est racine de $\varphi(u) = 0$, il en est de même de $k^n u^*$, en vertu de

$$\varphi(k^n u) = R_n[\varphi(u)]$$

et de

$$R_n(0) = 0.$$

Comme $\varphi(0) = 0$, $k^n\omega$ est une racine, de même que $(k^n - x)\omega$ pour x entier, à cause de la périodicité; prenons pour x la partie entière

[1] Voir la note, page 374, et les travaux de M. F. Ritt parus dans les *Transactions of the mathematical american Society*.

de k^n et soit $k = \frac{p}{q}$, p et q premiers entre eux; si $q > 1$, on aura une infinité de zéros distincts, de la forme précédente, compris par conséquent à l'intérieur du segment $(0, \omega)$; en effet, deux de ces nombres ne peuvent coïncider que si la différence

$$\frac{p^{n+\nu}}{q^{n+\nu}} - \frac{p^n}{q^n} = \frac{p^n(p^\nu - q^\nu)}{q^{n+\nu}}$$

est un nombre entier, ce qui est impossible; $\varphi(u)$ aurait ainsi des points d'indétermination à distance finie, contrairement à l'hypothèse. On a donc $q = 1$, k est entier.

Soient deux points z et z' du plan des z, équivalents par rapport au groupe G′ des transformations

$$R_n(z) = R_n(z').$$

Cette relation équivaut à

$$\varphi(k^n u) = \varphi(k^n v)$$

si $z = \varphi(u)$, $z' = \varphi(v)$; on vérifie la relation précédente en posant

$$k^n u = k^n v + x\omega \qquad (x \text{ entier}),$$

$$u = v + \frac{x}{k^n}\omega$$

Les nombres $\frac{x}{k^n}$ étant partout denses, on peut écrire

$$u = v + \lambda\omega,$$

λ prenant des valeurs denses de $-\infty$ à $+\infty$; si l'on se donne v, l'ensemble dérivé des points u contient donc la parallèle au vecteur ω menée par v. Appelons toujours Π l'ensemble parfait du plan des u qui correspond à l'ensemble parfait F du plan des z attaché à la fraction rationnelle R. De la remarque que nous venons de faire et de l'invariance de F par rapport aux substitutions de G′, on déduit que Π est formé de parallèles au vecteur ω, parmi lesquelles se trouve la droite $O\omega$. Si π contient u_0 extérieur à cette dernière droite, il contient tous les points

$$u_0 k^{\pm p} + \lambda\omega;$$

λ variant de $+\infty$ à $-\infty$ et p prenant les valeurs entières, ces points sont répartis sur une infinité de droites parallèles à $O\omega$; les domaines

contigus à π, s'ils existent, sont formés de bandes parallèles à cette même droite.

Bornons-nous au cas où R est un polynome, $\varphi(u)$ une fonction entière; nous pouvons alors achever la détermination de $\varphi(u)$ sans avoir recours, comme précédemment, aux propriétés des frontières des domaines invariants par les substitutions rationnelles. En effet, soit Δ une bande de largeur finie, contiguë à Π; dans Δ la fonction $\varphi(u)$ est bornée, à cause de la périodicité, et quand u décrit Δ, $z = \varphi(u)$ décrit un domaine borné, d'un seul tenant, contigu à F. Or, prenons un point u_0 arbitraire sur une droite d de Π distincte de $O\omega$, auquel correspond le point $z_0 = \varphi(u_0)$ de F; à un petit cercle du plan des u entourant u_0 correspond un petit domaine du plan des z entourant z_0, ce dernier contenant certainement des points du domaine D_∞ du point à l'infini; on sait, en effet, que D_∞, qui est d'un seul tenant, admet tous les points de F comme points frontières; il y a donc des bandes telles que Δ qui correspondent à D_∞, puisque tout point u suffisamment voisin de u_0 et extérieur à Π appartient à une bande contiguë, Δ, de largeur finie. Le domaine D_∞ serait donc borné, ce qui est absurde. Il faut donc que l'ensemble Π se réduise à la seule droite $O\omega$. Quand u décrit cette droite, $z = \varphi(u)$ reprend périodiquement les mêmes valeurs et décrit une courbe analytique, ouverte ou fermée, Γ, du plan des z. Si z est de Γ (qui constitue ici l'ensemble F), l'équation $\varphi(u) = z$ a inversement tous ses points racines sur la droite $O\omega$.

Si l'on pose $w = e^{\frac{2i\pi u}{\omega}}$, $\varphi(u)$ devient une fonction $\theta(w)$ développable suivant les puissances entières, positives ou négatives de w; si z est un point de Γ, les racines de l'équation $\theta(w) = z$ ont l'unité pour module; donc, la fonction $\theta(w)$ ne prenant jamais les valeurs de Γ au voisinage des points o et ∞, ces points sont des pôles ou des points ordinaires pour la fonction, et $\theta(w)$ a par suite un développement limité :

$$\theta(w) = a_0 + a_1 w + \ldots + a_p w^p + \frac{a_{-1}}{w} + \ldots + \frac{a_{-q}}{w_q}.$$

Exprimons ensuite le théorème de multiplication de $\varphi(u)$; changer u en ku revient à changer w en w^k; soit maintenant

$$R(z) = kz + Az^2 + \ldots + L_1 z^m.$$

On doit avoir l'identité

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1 w^k + a_{p-1} w^{(p-1)k} + \frac{a_{-1}}{w^k} + \ldots + \frac{a_{-q}}{w^{kq}} \\
&\quad = k\left[a_0 + a_1 w + \ldots + a_p w^p + \frac{a_{-1}}{w} + \ldots + \frac{a_{-q}}{w^q}\right] \\
&\qquad + A\left[a_0 + a_1 w + \ldots + a_p w^p + \frac{a_{-1}}{w} + \ldots + \frac{a_{-q}}{w^q}\right]^2 \\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + L\left[a_0 + a_1 w + \ldots + a_p w^p + \frac{a_{-1}}{w} + \ldots + \frac{a_{-q}}{w^q}\right]^m.
\end{aligned}$$

On doit tenir compte, en outre, de la condition $\varphi'(0) \neq 0$, qui donne $\theta'(1) \neq 0$.

On trouve facilement $m = k$. L'identification donne ensuite

$$\begin{aligned}
a_{p-1} &= a_{p-2} = \ldots = a_1 = 0, \\
a_{-(q-1)} &= a_{-(q-2)} = \ldots = a_{-1} = 0
\end{aligned}$$

et $\theta(w)$ se réduit à

$$a_p w^p + a_0 + \frac{a_{-q}}{w^q}$$

que nous écrirons plus commodément

$$\theta(w) = \lambda w^p + \mu + \frac{\rho}{w^q}.$$

Nous devons exprimer que $\theta(w^k)$ est un polynome en $\theta(w)$. On voit facilement qu'il n'y a pas d'inconvénient à supposer $\mu = 0$. On écrit alors l'identité écrite plus haut sous la forme plus simple

$$\lambda w^{pk} + \frac{\rho}{w^{qk}} = c_0\left(\lambda w^p + \frac{\rho}{w^q}\right)^k + c_1\left(\lambda w^p + \frac{\rho}{w^q}\right)^{k-1} + \ldots + c_{k-1}\left(\lambda w^p + \frac{\rho}{w^q}\right) + c_k.$$

Supposons, par exemple, $p > q$; on obtient, en identifiant, d'abord

$$\begin{aligned}
\lambda - c_0 \lambda^k &= 0, \\
c_1 \lambda^{k-1} &= 0,
\end{aligned}$$

puis, en égalant les termes en $w^{p(k-1)-q}$,

$$c_1 \lambda^{k-1} \rho = 0.$$

Si $\lambda\rho \neq 0$, ceci est impossible; on doit donc avoir $p \leqq q$; de même

$p \geqq q$; donc $p = q$. On est donc conduit à exprimer que

$$\lambda w^{pk} + \frac{\rho}{w^{pk}}$$

est fonction rationnelle de

$$\lambda w^{p} + \frac{\rho}{w^{p}}$$

ou, en posant $w^p = t$, que

$$Y = \lambda t^k + \rho t^{-k}$$

est fonction rationnelle de

$$X = \lambda t + \rho t^{-1}.$$

Le produit des racines de cette dernière équation en t étant $\frac{\rho}{\lambda}$, Y ne doit pas changer si l'on change t en $\frac{\rho}{\lambda t}$, ce qui conduit à

$$\rho^{k-1} = \lambda^{k-1},$$
$$\lambda = \rho e^{2i\alpha} \qquad \left(\alpha = \frac{N\pi}{k-1}\right).$$

En remplaçant ensuite t par sa valeur $w^p = e^{\frac{2i\pi pu}{\omega}} = e^{iv}$, on trouve

$$X = 2\rho e^{i\alpha} \cos(v + \alpha),$$
$$Y = 2\rho e^{i\alpha} \cos(kv + \alpha).$$

On est ramené au problème de trigonométrie élémentaire déjà rencontré : exprimer que $\cos(kv + \alpha)$ est fonction rationnelle de $\cos(v + \alpha)$, ce qui a bien lieu pour $\alpha = \frac{N\pi}{k-1}$. Comme v est proportionnel à u, on n'obtient en définitive que le théorème de multiplication de $\cos u$. Pour λ ou $\rho = 0$, on est conduit à la fonction exponentielle.

Ainsi toute fonction périodique entière qui admet un théorème de multiplication se ramène par les substitutions $(v \mid Av + B)$ effectuée sur la fonction et $(u \mid cu)$ effectuée sur la variable, aux fonctions $\cos(u + h)$ et e^u.

On pourrait généraliser un peu la démonstration précédente; toutefois, nous ne sommes pas parvenus, par cette méthode, à l'expression générale des fonctions méromorphes périodiques ayant un théorème de multiplication, quand le multiplicateur est réel et par suite entier ordinaire.

(*A suivre.*)

Sulle trasformazioni delle reti cicliche;

Di Pasquale CALAPSO.

Diciamo che due reti (sistemi coniugati)

$$M(X_1, X_2, X_3) \quad \text{ed} \quad M'(X'_1, X'_2, X'_3),$$

appartenenti o no ad una stessa superficie, si corrispondono per *trasformazione di Guichard* quando le tangenti t_1 e t_2 alle curve della rete (M) nel punto M incontrano rispettivamente le tangenti t'_1, t'_2 alle curve della rete (M′) nel punto M′ corrispondente di M.

Nella presente nota è trattato esclusivamente il caso delle reti cicliche e sono stabilite le relazioni fra le trasformazioni di tali reti e le trasformazioni di Ribaucour.

In una prima parte è dimostrato che una *rete ciclica è sempre deducibile come inviluppo di un piano che contiene le normali a due superficie corrispondentisi per trasformazione di Ribaucour* (le curve della rete corrispondono alle linee di curvatura delle superficie).

L'inversa è nota.

Sotto altra forma: *per avere nel modo più generale una rete armonica ad una congruenza normale si trasformi una superficie* S *ortogonale ai raggi in una nuova superficie* S_1 *mediante una trasformazione di Ribaucour; il piano delle normali ad* S *ed* S_1 *nei punti corrispondenti inviluppa la rete richiesta* (le curve della rete corrispondono alle linee di curvatura della superficie ortogonale ai raggi).

Da queste considerazioni segue una classificazione delle trasformazioni di Guichard delle reti cicliche; diciamo che due reti cicliche (C) e (C′) si corrispondono *per trasformazione di prima specie* quando esse sono armoniche ad una stessa congruenza normale; le tangenti alle curve delle due reti nei punti corrispondenti si tagliano rispettivamente sui fuochi del raggio della congruenza.

Partendo da una superficie S, riferita alle linee di curvatura, siano S_1 ed S_2 due superficie contigue ad S per trasformazioni di Ribaucour; si sa (*) che esiste una quarta superficie S′ da cui S_1 ed S_2 sono deducibili con trasformazioni di Ribaucour.

Se indichiamo con n, n_1, n_2, n' le rispettive normali nei punti corrispondenti otteniamo quatro reti cicliche:

(C_{nn_1}), inviluppo del piano delle normali alle superficie S ed S_1 e similmente

$$(C_{nn_2}), \quad (C_{n'n_1}) \quad (C_{n'n_2}).$$

Le quattro reti cicliche

$$(C_{nn_1}), \quad (C_{nn_2}), \quad (C_{n'n_1}), \quad (C_{n'n_2})$$

sono nella configurazione espressa dal teorema di permutabilità di Bianchi nel senso che la seconda e la terza sono contigue alla prima ed alla quarta per trasformazione di Guichard di prima specie.

Nella seconda parte vengono stabilite le *trasformazioni di seconda specie* che si basano sulle considerazioni seguenti.

Si sa che una congruenza armonica ad una rete ciclica non è di necessità una congruenza normale (congruenza O), ma in generale é 3O; nasce quindi il problema di ricercare le coppie di reti cicliche corrispondentisi per trasformazioni di Guichard in guisa che siano armoniche ad una stessa congruenza 3O.

Ad una tale coppia di reti cicliche inponiamo una condizione. Chiamando come sopra con t_1, t_2 le tangenti alle curve della rete (M) e con t'_1, t'_2 le tangenti analoghe della rete (M′), sia P_1 il punto comune alle tangenti t_1 e t'_1 e sia P_2 il punto comune alle tangenti t_2, t'_2. Le reti (M) ed (M′) si deformano rispettivamente in $(\overline{M})$ ed $(\overline{M}')$, e queste nuove reti col metodo di Guichard sono individuate anche in posizione nello spazio (posizione attuale).

La condizione impone che la proprietà, che le tangenti alle curve delle due reti si tagliano rispettivamente, si conservi dopo effettuata la deformazione (nella posizione attuale, a meno di simmetria) e si conservi anche la distanza tra il punto comune ed il punto di contatto.

Le reti (M) ed (M′) nelle condizioni sudette si diranno corrispondenti per *trasformazione di seconda specie*.

Si sa che ad ogni rete ciclica si può sempre associare una rete O dello

spazio a quattro dimensioni. Nella presente nota è dimostrato che *la trasformazione di Guichard di seconda specie è equivalente ad una trasformazione di Ribaucour della rete* O.

Resta pertanto accertata l'esistenza delle trasformazioni di Guichard di prima e di seconda specie, senza che tale esistenza apporti restrigione alla rete ciclica di partenza (M).

È chiaro che per le trasformazioni di seconda specie sussiste il teorema di permutabilità di Bianchi, giacché esso sussiste per le transformazioni delle reti O dello spazio a quattro dimensioni.

I. — Le reti cicliche dello spazio euclideo S_3.

1. Assumiamo un determinante ortogonale di quarto ordine

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix}$$

i cui elementi soddisfano ad equazioni della forma

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial \xi_r}{\partial u} = -a_1 x_{1r} - a_2 x_{2r} - p\eta_r, & \dfrac{\partial \xi_r}{\partial v} = q\eta_r \\ \dfrac{\partial \eta_r}{\partial u} = p\xi_r, & \dfrac{\partial \eta_r}{\partial v} = -b_1 x_{1r} - b_2 x_{2r} - q\xi_r \\ \dfrac{\partial x_{1r}}{\partial u} = a_1 \xi_r, & \dfrac{\partial x_{1r}}{\partial v} = b_1 \eta_r \\ \dfrac{\partial x_{2r}}{\partial u} = a_2 \xi_r, & \dfrac{\partial x_{2r}}{\partial v} = b_2 \eta_r \\ & (r = 1, 2, 3, 4). \end{array} \right.$$

È noto che i coefficienti che intervengono in questo sistema soddisfano alle equazioni differenziali

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial a_1}{\partial v} = pb_1, & \dfrac{\partial b_1}{\partial u} = qa_1; \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial v} = pb_2, & \dfrac{\partial b_2}{\partial u} = qa_2; \\ \dfrac{\partial p}{\partial v} + \dfrac{\partial q}{\partial u} + a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 & \end{array} \right.$$

Introduciamo ancora le funzioni x_1, x_2, x_3, x_4 mediante le equazioni

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = h z_i, \qquad \frac{\partial x_i}{\partial v} = l z_i, \tag{4}$$

in cui h ed l sono legate alle rotazioni di Δ mediante le equazioni

$$\frac{\partial h}{\partial v} = l p, \qquad \frac{\partial l}{\partial u} = h q. \tag{5}$$

Si sa che il punto dello spagio S_4 che ha le coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 descrive una rete O di Guichard.

2. Se poniamo

$$X_i = x_i + \rho x_{1i} + r x_{2i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{6}$$

in cui ρ ed r sono definite dalle equazioni

$$\begin{cases} h + \rho a_1 + r a_2 = 0, \\ l + \rho b_1 + r b_2 = 0, \end{cases} \tag{7}$$

il punto (X_1, X_2, X_3) dello spazio S_3 descrive una rete ciclica, applicabile sulla rete (iX_4, ρ, r).

Si sa dalle ricerche di Guichard che tutte le reti cicliche si ottengono nel modo indicato.

Dalle (6) per derivazione si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X_i}{\partial u} = \dfrac{\partial \rho}{\partial u} x_{1i} + \dfrac{\partial r}{\partial u} x_{2i}, \\ \dfrac{\partial X_i}{\partial v} = \dfrac{\partial \rho}{\partial v} x_{1i} + \dfrac{\partial r}{\partial v} x_{2i}; \end{cases} \tag{8}$$

inoltre dalle (7) si deducono le relazioni

$$\begin{cases} a_1 \dfrac{\partial \rho}{\partial v} + a_2 \dfrac{\partial r}{\partial v} = 0, \\ b_1 \dfrac{\partial \rho}{\partial u} + b_2 \dfrac{\partial r}{\partial u} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Con una nuova derivazione si ottengono le formole

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial u \, \partial v} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \, \partial v} x_{1i} + \frac{\partial^2 r}{\partial u \, \partial v} x_{2i}. \tag{10}$$

3. Sia (C) una rete ciclica costruita nella maniera indicata; possiamo associare a (C) una rete O dello spazio ordinario S_3 nel modo seguente.

Poniamo

$$
(10)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\psi = -\dfrac{x_4}{1+x_{24}}, \qquad 2m\sigma = -\dfrac{1-x_{24}}{x_4}; \\
\lambda = -\dfrac{\xi_4}{1+x_{24}}, \qquad \mu = -\dfrac{\eta_4}{1+x_{24}}, \qquad w = -\dfrac{x_{14}}{1+x_{24}}; \\
m\varphi = \dfrac{a_2}{1+x_{24}}, \qquad m\Omega = \dfrac{b_2}{1+x_{24}} \\
\left[1 + 2m\psi\sigma = \dfrac{2}{1+x_{24}}\right];
\end{array}
\right.
$$

$$
(11)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\sqrt{E} = h + a_2\psi, & \sqrt{G} = l + b_2\psi; \\
-\dfrac{D}{\sqrt{E}} = a_1 + a_2 w, & -\dfrac{D''}{\sqrt{G}} = b_1 + b_2 w.
\end{array}
\right.
$$

Tenendo conto delle equazioni fondamentali (2) si verificano con facilo calcolo le equazioni

$$
(12)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial u} = \sqrt{E}\,\lambda, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial v} = \sqrt{G}\,\mu
$$

ed osservando ancora le (3) si ricava

$$
(13)\qquad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = p + a_2\mu, \qquad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = q + b_2\lambda.
$$

Indi seguono facilmente le relazioni

$$
(14)\qquad \lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2m\psi\sigma,
$$

$$
(15)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\mu + \dfrac{D}{\sqrt{E}}w + m\varphi, & \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\mu; \\
\dfrac{\partial\mu}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\lambda, & \dfrac{\partial\mu}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\lambda + \dfrac{D''}{\sqrt{G}}w + m\Omega; \\
\dfrac{\partial w}{\partial u} = -\dfrac{D}{\sqrt{E}}\lambda, & \dfrac{\partial w}{\partial v} = -\dfrac{D''}{\sqrt{G}}\mu; \\
\dfrac{\partial\sigma}{\partial u} = \dfrac{\lambda}{\psi}(\varphi - \sigma\sqrt{E}), & \dfrac{\partial\sigma}{\partial v} = \dfrac{\mu}{\psi}(\Omega - \sigma\sqrt{G}); \\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\Omega, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\varphi.
\end{array}
\right.
$$

Ed ora consideriamo la superficie S descritta dal punto le cui coordinate x, y, z hanno le espressioni

$$(16)\qquad \begin{cases} x = x_1 + \psi x_{21}, \\ y = x_2 + \psi x_{22}, \\ z = x_3 + \psi x_{23}. \end{cases}$$

Si ha

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\,(\xi_1 + \lambda x_{21}), & \dfrac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\,(\eta_1 + \mu x_{21}); \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{E}\,(\xi_2 + \lambda x_{22}), & \dfrac{\partial y}{\partial v} = \sqrt{G}\,(\eta_2 + \mu x_{22}); \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{E}\,(\xi_3 + \lambda x_{23}), & \dfrac{\partial z}{\partial v} = \sqrt{G}\,(\eta_3 + \mu x_{23}), \end{cases}$$

in cui $\sqrt{E}$ e $\sqrt{G}$ sono date dalle (11); da queste segue facilmente

$$(18)\qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = E, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = G.$$

Inoltre i cosemi degli spigoli del triedro formato dalle tangenti alle linee u et v di S e dalla normale, hanno i valori

$$\begin{array}{lll} \overline{X}_1 = \xi_1 + \lambda x_{21}, & \overline{Y}_1 = \xi_2 + \lambda x_{22}, & \overline{Z}_1 = \xi_3 + \lambda x_{23}; \\ \overline{X}_2 = \eta_1 + \mu x_{21}, & \overline{Y}_2 = \eta_2 + \mu x_{22}, & \overline{Z}_2 = \eta_3 + \lambda x_{23}; \\ \overline{X}_3 = x_{11} + w x_{21}, & \overline{Y}_3 = x_{12} + w x_{22}, & \overline{Z}_3 = x_{13} + w x_{23}, \end{array}$$

ed il determinante ortogonale del terzo ordine

$$\begin{vmatrix} \overline{X}_1 & \overline{Y}_1 & \overline{Z}_1 \\ \overline{X}_2 & \overline{Y}_2 & \overline{Z}_2 \\ \overline{X}_3 & \overline{Y}_2 & \overline{Z}_3 \end{vmatrix}$$

è destrorso o sinistrorso secondo che Δ è destrorso o sinistrorso.

Supponendo, come è lecito, che il determinante Δ sia destrorso possiamo calcolare gli altri elementi della superficie S con la formole

$$D = -\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X_3}{\partial u}, \qquad D' = -\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X_3}{\partial v}, \qquad D'' = -\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X_3}{\partial v}$$

e si trova appunto

$$-\frac{D}{\sqrt{E}} = a_1 + a_2 w, \qquad D' = 0, \qquad -\frac{D''}{\sqrt{G}} = b_1 + b_2 w.$$

Si conclude che la superficie S definita dalle (16) è riferita alle linee di curvatura; si vede inoltre che le (10) danno un sistema di funzioni trasformatrici per il passagio da S ad una sua trasformata di Ribaucour S_1.

4. Infine vediamo come si esprimono le coordinate del punto che descrive la rete ciclica medianti gli elementi della superficie S.

A tale scopo consideriamo il piano passante per le normali alle superficie S ed S_1 nei punti corrispondenti; il punto in cui il piano tocca il suo inviluppo ha le coordinate

$$\bar{x} = x + T\bar{X}_3 + H(\lambda\bar{X}_1 + \mu\bar{X}_2 + \omega\bar{X}_3) \tag{19}$$

in cui le funzioni T ed H sono definite dalle condizioni

$$\begin{cases} \sqrt{E} - T\dfrac{D}{\sqrt{E}} + Hm\varphi = 0, \\ \sqrt{G} - T\dfrac{D''}{\sqrt{G}} + Hm\Omega = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Si ha

$$d\bar{x} = \bar{X}_3 dT + (\lambda\bar{X}_1 + \mu\bar{X}_2 + \omega\bar{X}_3)\, dH$$

e quindi

$$\begin{aligned} d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 &= dT^2 + 2m\psi\sigma\, dH^2 + 2\omega\, dT\, dH \\ &= dT^2 + dH(2\omega\, dT + 2m\psi\sigma\, dH). \end{aligned}$$

Se introduciamo la funzione

$$K = 2\omega T + 2m\psi\sigma H + 2\psi$$

possiamo scrivere

$$d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 = dT^2 + dH\, dK.$$

Poniamo

$$\rho = T, \qquad r = \frac{H + K}{2} = \omega T + \psi + \frac{1 + 2m\psi\sigma}{2} H;$$

le (20) si trasformano subito nelle (7), e tenendo conto delle espressioni superiori della quantità $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{X}_3$ ed osservando le (16) otteniamo con facile calcolo

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_1 + \rho x_{11} + r x_{21}, \\ \bar{y} &= x_2 + \rho x_{12} + r x_{22}, \\ \bar{z} &= x_3 + \rho x_{13} + r x_{23}. \end{aligned}$$

Dal confronto di queste con le (6) risulta subito il teorema

Una rete ciclica è sempre deducibile come inviluppo di un piano che contiene le normali a due superficie S *ed* S_1 *corrispondentisi per trasformazione di Ribaucour* (le curve della rete corrispondono alle linee di curvatura di S ed S_1).

L'inversa è nota.

Si può anche dire : *per avere nel modo più generale una rete armonica ad una congruenza normale si trasformi una superficie* S *ortogonale ai raggi in una nuova superficie* S_1 *mediante una trasformazione di Ribaucour; il piano delle normali ad* S *ed* S_1 *nei punti corrispondenti inviluppa la rete richiesta* (le curve della rete corrispondono alle linee di curvatura della superficie ortogonale ai raggi).

II. — Le trasformazioni di prima specie delle reti cicliche.

5. Diciamo che due reti cicliche (C) e (C′) sono trasformate l'una dell'altra con *trasformazione di Guichard di prima specie*, quando esse sono armoniche ad una stessa congruenza normale. In tali condizioni le tangenti alle curve delle due reti nei punti corrispondenti si tagliano rispettivamente sui fuochi del raggio della congruenza.

Se indichiamo con S, S_1, S_2, S′ le quattro superficie del teorema di permutabilità per le trasformazioni di Ribaucour (*) e con n, n_1, n_2, n' le rispettive normali nei punti corrispondenti otteniamo quattro reti cicliche; cioè :

(C_{nn_1}), che si ottiene come inviluppo del piano delle normali alle superficie S ed S_1 e similmente (C_{nn_2}), $(C_{n'n_1})$, $(C_{n'n_2})$.

In ogni caso la rete $(C_{n_i n_j})$ è armonica ad entrambe le congruenze (n_i) ed (n_j); segue che le coppie

$$(C_{nn_1}) \quad \text{e} \quad (C_{nn_2}),$$
$$(C_{nn_1}) \quad \text{e} \quad (C_{n'n_1}),$$
$$(C_{n'n_2}) \quad \text{e} \quad (C_{nn_2}),$$
$$(C_{n'n_2}) \quad \text{e} \quad (C_{n'n_1}),$$

si corrispondono ogni volta in una trasformazione di Guichard di

prima specie e quindi

$$(C_{nn_1}),\quad (C_{nn_2}),\quad (C_{n'n_1}),\quad (C_{n'n_2})$$

formano una quaterna di reti cicliche nella configurazione espressa dal teorema di permutabilità di Bianchi.

III. — Le trasformazioni di seconda specie delle reti cicliche.

6. Siano M ed M′ due punti che descrivono due reti cicliche, tali che le tangenti t_1, t_2 alle curve della rete (M) nel punto M incontrino rispettivamente le tangenti t'_1, t'_2 alle curve della rete (M′) nel punto M′ corrispondente di M. Sia P_1 il punto comune alle tangenti t_1 e t'_1 e sia P_2 il punte comune alle tangenti t_2 e t'_2.

Indichiamo con $(\overline{M})$ ed $(\overline{M}')$ le reti deformate nella posizione attuale definita al n° **2**, e con $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, $\bar{t}'_1$, $\bar{t}'_2$ le tangenti alle curve delle reti nella nuova configurazione. Diciamo che le reti (M) ed (M′) sono trasformate l'una dell'altra con *trasformazione di Guichard di seconda specie* quando le tangenti $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ incontrano rispettivamente le tangenti t'_1, t'_2 ed in modo da aversi

$$\overline{MP}_1 = MP_1, \qquad MP^2 = \overline{MP}_2 = MP_2.$$

Immaginiamo la rete (M) formata come ai numeri **1** e **2** e la rete (M′) costruita in modo analogo, introducendo per la seconda rete le medesime notazioni munite da un accento.

Le condizioni imposte dal problema si traducono in relazioni della forma

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &\rho - T\frac{\partial\rho}{\partial u} = \rho' - T'\frac{\partial\rho'}{\partial u},\\ &r - T\frac{\partial r}{\partial u} = r' - T'\frac{\partial r'}{\partial u},\\ &x_i + \left(\rho - T\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)x_{1i} + \left(r - T\frac{\partial r}{\partial u}\right)x_{2i}\\ &= x'_i + \left(\rho' - T'\frac{\partial\rho'}{\partial u}\right)x'_{1i} + \left(r' - T'\frac{\partial r'}{\partial u}\right)x'_{2i} \end{aligned}\right.$$

essendo T e T′ convenienti funzioni. Se poniamo

$$(22) \qquad A = \rho - T\frac{\partial \rho}{\partial u}, \qquad B = r - T\frac{\partial r}{\partial u}$$

possiamo scrivere

$$(23) \qquad x_i + A x_{1i} + B x_{2i} = x'_i + A x'_{1i} + B x'_{1i}.$$

Similmente si dovrà avere

$$\left\{\begin{aligned} &\rho - \overline{T}\frac{\partial \rho}{\partial v} = \rho' - \overline{T}'\frac{\partial \rho'}{\partial v}, \\ &r - \overline{T}\frac{\partial r}{\partial v} = r' - \overline{T}'\frac{\partial r'}{\partial v}, \\ &x_i + \left(\rho - \overline{T}\frac{\partial \rho}{\partial v}\right) x_{1i} + \left(r - \overline{T}\frac{\partial r}{\partial v}\right) x_{2i} \\ &= x'_i + \left(\rho' - \overline{T}'\frac{\partial \rho'}{\partial v}\right) x'_{1i} + \left(r' - \overline{T}'\frac{\partial r'}{\partial v}\right) x'_{2i} \end{aligned}\right.$$

e ponendo

$$(24) \qquad A' = \rho - \overline{T}\frac{\partial \rho}{\partial v}, \qquad B' = r - \overline{T}\frac{\partial r}{\partial v}$$

scriveremo

$$(25) \qquad x_i + A' x_{1i} + B' x_{2i} = x'_i + A' x'_{1i} + B' x'_{2i}.$$

Da questa e dalla (23) si ricavano le relazioni

$$x_i + \frac{AB' - A'B}{B' - B} x_{1i} = x'_i + \frac{AB' - A'B}{B' - B} x'_{1i},$$

$$x_i + \frac{AB' - A'B}{A - A'} x_{2i} = x'_i + \frac{AB' - A'B}{A' - A} x'_{2i}.$$

Queste si interpretano così; se si considerano le reti (O) ed (O′) dello spazio S_4 descritte rispettivamente dai punti

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \text{ed} \quad (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4),$$

le due normali alla rete (O) *incontrano rispettivamente le due nor-*

mali alla rete O′ *in punti equidistanti da* O *ed* O′. La stessa proprietà ha luogo per le tangenti alle reti (O) ed (O′). Il passaggio dalla rete (O) alla rete (O′) è perciò una trasformazione di Ribaucour.

Osservazione. — Il caso B′ = B non è da considerare; infatti seguirebbe

$$x_{1i} = x'_{1i}; \qquad \text{oppure } A = A'.$$

Nel primo caso, essendo le ξ_i e le η_i proporzionali alle derivate di x_{1i} è due determinanti ortogonali coinciderebbero; nel secondo caso sarebe nullo il determinante funzionale di ρ ed r.

Si osserva in ultimo che derivando ad esempio la prima delle precedenti si ottiene

$$\left(h + \frac{AB' - A'B}{B' - B} a_1\right)\xi_i + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{AB' - A'B}{B' - B}\right)x_{1i}$$
$$= \left(h' + \frac{AB' - A'B}{B' - B} a'_1\right)\xi'_i + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{AB' - A'B}{B' - B}\right)x'_{1i};$$

il caso $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{AB' - A'B}{B' - B}\right) = 0$ non è da considerare perchè altrimenti i due determinanti ortogonali avrebbero in comune la terza linea e per le (2) anche la quarta.

IV. — Teorema d'inversione.

7. Ora dobbiamo procedere all'inversione del risultato precedente; mostreremo cioè che *qualunque sia la trasformata di Ribaucour* (O′) *della rete* (O) *dello spazio* S_4, *le reti cicliche dello spazio* S_3 *ad esse associate si corrispondono per trasformazione di Guichard di seconda specie.*

Sulla rete O descritta dal punto (x_1, x_2, x_3, x_4) operiamo una trasformazione di Ribaucour nella forma data dal Bianchi. Indicando con

$$\lambda, \quad \mu, \quad w_1, \quad w_2, \quad \psi, \quad \sigma, \quad \varphi, \quad \Omega$$

un sistema di funzioni trasformatrici, si ha il sistema di equazioni

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial\lambda}{\partial u} = -a_1 w_1 - a_2 w_2 - p\mu + m\varphi, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = q\mu;\\
&\frac{\partial\mu}{\partial u} = p\lambda, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial v} = -b_1 w_1 - b_2 w_2 - q\lambda + m\Omega;\\
&\frac{\partial w_1}{\partial u} = a_1\lambda, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial v} = b_1\mu;\\
&\frac{\partial w_2}{\partial u} = a_2\lambda, \qquad \frac{\partial w_2}{\partial v} = b_2\mu;\\
&\frac{\partial\psi}{\partial u} = h\lambda, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial v} = l\mu;\\
&\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \frac{\lambda}{\psi}(\varphi - h\sigma), \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \frac{\mu}{\psi}(\Omega - l\sigma);\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial v} = p\Omega, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial u} = q\varphi
\end{aligned}
\right.
$$

con la relazione

$$
(27)\qquad \lambda^2 + \mu^2 + w_1^2 + w_1^2 = 2m\psi\sigma
$$

in cui m è una costante arbitraria diversa da zero.

Le coordinate del punto che descrive la nuova rete O, trasformata della prima sono

$$
(28)\qquad x'_i = x_i - \frac{1}{m\sigma}(\lambda\xi_i + \mu\eta_i + w_1 x_{1i} + w_2 x_{2i})
$$

e gli elementi del determinante trasformato di Δ hanno le espressioni

$$
(29)\quad \left\{
\begin{aligned}
x'_{1i} &= \frac{\lambda w_1}{m\psi\sigma}\xi_i + \frac{\mu w_1}{m\psi\sigma}\eta_i + \frac{w_1}{m\psi\sigma}(w_1 x_{1i} + w_2 x_{2i}) - x_{1i},\\
x'_{2i} &= \frac{\lambda w_2}{m\psi\sigma}\xi_i + \frac{\mu w_2}{m\psi\sigma}\eta_i + \frac{w_2}{m\psi\sigma}(w_1 x_{1i} + w_2 x_{2i}) - x_{2i},\\
\xi'_i &= \frac{\lambda^2}{m\psi\sigma}\xi_i + \frac{\lambda\mu}{m\psi\sigma}\eta_i + \frac{\lambda}{m\psi\sigma}(w_1 x_{1i} + w_2 x_{2i}) - \xi_i,\\
\eta'_i &= \frac{\lambda\mu}{m\psi\sigma}\xi_i + \frac{\mu^2}{m\psi\sigma}\eta_i + \frac{\mu}{m\psi\sigma}(w_1 x_{1i} + w_2 x_{2i}) - \eta_i.
\end{aligned}
\right.
$$

Infine le funzioni intrinseche relative alla rete trasformata, sono

$$
(30)\quad \begin{cases}
h' = \dfrac{\varphi}{\sigma} - h, \qquad l' = \dfrac{\Omega}{\sigma} - l; \\[2ex]
a'_1 = a_1 - \dfrac{\varphi w_1}{\psi\sigma}, \qquad b'_1 = b_1 - \dfrac{\Omega w_1}{\psi\sigma}; \qquad a'_2 = a_2 - \dfrac{\varphi w_2}{\psi\sigma}, \qquad b'_2 = b_2 - \dfrac{\Omega w_2}{\psi\sigma}; \\[2ex]
p' = p - \dfrac{\varphi\mu}{\psi\sigma}, \qquad q' = q - \dfrac{\Omega\lambda}{\psi\sigma}.
\end{cases}
$$

8. La trasformazione di Ribaucour della rete (x_1, x_2, x_3, x_4) trae seco una trasformazione della rete ciclica che ad essa è associata. Le coordinate del punto che descrive la nuova rete ciclica sono

$$
(31)\quad \begin{cases}
X'_1 = x_1 - \dfrac{1}{m\sigma}[\lambda\xi_1 + \mu\eta_1 + w_1 x_{11} + w_2 x_{21}] \\
\qquad + \bar{\rho}\left[\dfrac{\lambda w_1}{m\psi\sigma}\xi_1 + \dfrac{\mu w_1}{m\psi\sigma}\eta_1 + \dfrac{w_1}{m\psi\sigma}(w_1 x_{11} + w_2 x_{21}) - x_{11}\right] \\
\qquad + \bar{r}\left[\dfrac{\lambda w_2}{m\psi\sigma}\xi_1 + \dfrac{\mu w_2}{m\psi\sigma}\eta_1 + \dfrac{w_2}{m\psi\sigma}(w_1 x_{11} + w_2 x_{21}) - x_{12}\right], \\
X'_2 = x_2 - \dfrac{1}{m\sigma}[\lambda\xi_2 + \mu\eta_2 + w_1 x_{12} + w_2 x_{22}] \\
\qquad + \bar{\rho}\left[\dfrac{\lambda w_1}{m\psi\sigma}\xi_2 + \dfrac{\mu w_1}{m\psi\sigma}\eta_2 + \dfrac{w_1}{m\psi\sigma}(w_1 x_{12} + w_2 x_{22}) - x_{12}\right] \\
\qquad + \bar{r}\left[\dfrac{\lambda w_2}{m\psi\sigma}\xi_2 + \dfrac{\mu w_2}{m\psi\sigma}\eta_2 + \dfrac{w_2}{m\psi\sigma}(w_1 x_{12} + w_2 x_{22}) - x_{22}\right], \\
X'_3 = x_3 - \dfrac{1}{m\sigma}[\lambda\xi_3 + \mu\eta_3 + w_1 x_{13} + w_2 x_{23}] \\
\qquad + \bar{\rho}\left[\dfrac{\lambda w_1}{m\psi\sigma}\xi_3 + \dfrac{\mu w_1}{m\psi\sigma}\eta_3 + \dfrac{w_1}{m\psi\sigma}(w_1 x_{13} + w_2 x_{23}) - x_{13}\right] \\
\qquad + \bar{r}\left[\dfrac{\lambda w_2}{m\psi\sigma}\xi_3 + \dfrac{\mu w_2}{m\psi\sigma}\eta_3 + \dfrac{w_2}{m\psi\sigma}(w_1 x_{13} + w_2 x_{23}) - x_{23}\right]
\end{cases}
$$

e la rete su cui questa è applicabile è rappresentata dalle equazioni

$$
(33)\quad \begin{cases}
iX'_4 = X' = ix_4 - \dfrac{i}{m\sigma}[\lambda\xi_4 + \mu\eta_4 + w_1 x_{14} + w_2 x_{24}] \\
\qquad + i\bar{\rho}\left[\dfrac{\lambda w_1}{m\psi\sigma}\xi_4 + \dfrac{\mu w_1}{m\psi\sigma}\eta_4 + \dfrac{w_1}{m\psi\sigma}(w_1 x_{14} + w_2 x_{24}) - x_{14}\right] \\
\qquad + i\bar{r}\left[\dfrac{\lambda w_2}{m\psi\sigma}\xi_4 + \dfrac{\mu w_2}{m\psi\sigma}\eta_4 + \dfrac{w_2}{m\psi\sigma}(w_1 x_{14} + w_2 x_{24}) - x_{24}\right], \\
\overline{Y}' = -\bar{\rho}, \\
\overline{Z}' = -\bar{r},
\end{cases}
$$

Le derivate di X'_1, X'_2, X'_3, $\bar{X}'_4$ si esprimono con le formole analoghe alle (8), e le quantità $\bar{\rho}$ ed $\bar{r}$ sono definite dalle formole

$$(34)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varphi}{\sigma} - h + \bar{\rho}\left(a_1 - \dfrac{\varphi w_1}{\psi\sigma}\right) + \bar{r}\left(a_2 - \dfrac{\varphi w_2}{\psi\sigma}\right) = 0, \\ \dfrac{\Omega}{\sigma} - l + \bar{\rho}\left(b_1 - \dfrac{\Omega w_1}{\psi\sigma}\right) + \bar{r}\left(b_2 - \dfrac{\Omega w_2}{\psi\sigma}\right) = 0, \end{cases}$$

donde

$$(35)\qquad \begin{cases} \left(a_1 - \dfrac{\varphi w_1}{\psi\sigma}\right)\dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial v} + \left(a_2 - \dfrac{\varphi w_2}{\psi\sigma}\right)\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial v} = 0, \\ \left(b_1 - \dfrac{\Omega w_1}{\psi\sigma}\right)\dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial u} + \left(b_2 - \dfrac{\Omega w_2}{\psi\sigma}\right)\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

9. Ciò premesso consideriamo il determinante

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\rho}{\partial u} & \dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial u} & \rho + \bar{\rho} \\ \dfrac{\partial r}{\partial u} & \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u} & r + \bar{r} \\ 0 & b_1\dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial u} + b_2\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u} & b_1\bar{\rho} + b_2\bar{r} - l \end{vmatrix};$$

esso è nullo perchè se agli elementi dell'ultima riga si aggiungono quelli della prima moltiplicati per $(-b_1)$ e quelli della seconda moltiplicate per $(-b_2)$ prende la forma

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\rho}{\partial u} & \dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial u} & \rho + \bar{\rho} \\ \dfrac{\partial r}{\partial u} & \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u} & r + \bar{r} \\ -b_1\dfrac{\partial\rho}{\partial u} - b_2\dfrac{\partial r}{\partial u} & 0 & -b_1\rho - b_2 r - l \end{vmatrix}$$

e si annulla per le (7) e (9).

Si deduce che le equazioni

$$(36)\qquad \rho - T\frac{\partial\rho}{\partial u} = -\bar{\rho} + T'\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial u}, \qquad r - T\frac{\partial r}{\partial u} = -r + T'\frac{\partial\bar{r}}{\partial u};$$

$$(37)\qquad T'\left(b_1\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial u} + b_2\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\right) = b_1\bar{\rho} + b_2\bar{r} - l$$

sono coesistenti.

L'ultima di queste si riduce alla forma

$$T' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial u} w_1 + T' \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} w_2 - \bar{\rho} w_1 - \bar{r} w_2 + \psi = 0,$$

donde segue facilmente che per i valori T e T′ dati dalle (36) sono soddisfatte le equazioni

$$X_i - T \frac{\partial X_i}{\partial u} = X'_i - T' \frac{\partial X'_i}{\partial u} \qquad (i = 1, 2, 3, 4); \tag{38}$$

$$\begin{cases} \rho - T \dfrac{\partial \rho}{\partial u} = -\bar{\rho} + T' \dfrac{\partial \bar{\rho}}{\partial u}, \\ r - T \dfrac{\partial r}{\partial u} = -\bar{r} + T' \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u}. \end{cases} \tag{39}$$

Relazioni analoghe sussistono fra le stesse funzioni e le loro derivate rispetto a v. Si conclude che le reti (X_1, X_2, X_3) ed (X'_1, X'_2, X'_3) si corrispondono in una trasformazione di Guichard di seconda specie.

10. Risolviamo il sistema (36) rispetto a T; si ottiene il valore

$$T = \frac{w_1 \rho + w_2 r + \psi}{w_1 \dfrac{\partial \rho}{\partial u} + w_2 \dfrac{\partial r}{\partial u}},$$

e quindi le quantità

$$X_i - T \frac{\partial X_i}{\partial u}$$

prendono la forma

$$x_i + \frac{w_2 l - \psi b_2}{b_2 w_1 - b_1 w_2} x_{1i} - \frac{w_1 l - \psi b_1}{b_2 w_1 - b_1 w_2} x_{2i}. \tag{40}$$

Indicando, come al n° **6**, con P_1 e P_2 i punti d'incontro delle tangenti alle due reti cicliche, i parametri direttori della rete $P_1 P_2$ sono dati dalle formole

$$w_2 x_{1i} - w_1 x_{2i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{41}$$

Deriviamo le (40) rispetto a v, osservando le equazioni fonda-

mentali (2), (3), (4), (5), si ha

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(x_i + \frac{w_2 l - \psi b_2}{b_2 w_1 - b_1 w_2} x_{1i} - \frac{w_1 l - \psi b_2}{b_1 w_1 - b_1 w_2} x_{2i}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{w_2 l - \psi b_2}{b_2 w_1 - b_1 w_2}\right) x_{1i} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{w_1 l - \psi b_1}{b_2 w_1 - b_1 w_2}\right) x_{2i};$$

ma si riconosce facilmente che

$$w_1 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{w_2 l - \psi b_2}{b_2 w_1 - b_1 w_2}\right) - w_2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{w_1 l - \psi b_1}{b_3 w_1 - b_1 w_2}\right) = 0,$$

quindi il punto P_1 è uno dei fuochi del raggio $P_1 P_2$; similmente per il punto P_2; si conclude che *la congruenza descritta dalla reta* $P_1 P_2$ *è armonica ad entrambe le reti cicliche* (X_1, X_2, X_3) ed (X'_1, X'_2, X'_3).

11. Si verifica col calcolo diretto che l'equazione di Laplace a cui soddisfano i parametri direttori del raggio della congruenza ha la forma

$$(42)\quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{p(b_2 w_1 - b_1 w_2) - \mu(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_2 w_1 - a_1 w_2} \frac{\partial \theta}{\partial u}$$
$$+ \frac{q(a_2 w_1 - a_1 w_2) + \lambda(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{b_2 w_1 - b_1 w_2} \frac{\partial \theta}{\partial v}$$
$$+ \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)\begin{bmatrix} q\mu(a_2 w_1 - a_1 w_2) \\ - p\lambda(b_2 w_1 - b_1 w_2) + \lambda\mu(a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{bmatrix}}{(a_2 w_1 - a_1 w_2)(b_2 w_1 - b_1 w_2)} \theta.$$

Questa equazione ammette, oltre le soluzioni

$$w_2 x_{11} - w_1 x_{21}, \quad w_2 x_{12} - w_1 x_{22}, \quad w_2 x_{13} - w_1 x_{23}$$

anche le soluzioni

$$w_2 x_{14} - w_1 x_{24}, \quad w_1, \quad w_2;$$

a causa della relazione

$$\sum_{i=1}^{4} (w_2 x_{1i} - w_1 x_{2i})^2 - w_1^2 - w_2^2 = 0,$$

la congruenza descritta dalla rete $P_1 P_2$ è in generale 3O; anzi risulta

facilmente che se le funzioni trasformatrici

$$\lambda, \quad \mu, \quad \ldots, \quad \varphi, \quad \Omega,$$

non sono soggette ad altre condizioni oltre le (26) e (27), non si può avere riduzione di grado per la congruenza $P_1 P_2$.

È chiaro che per le trasformazioni di seconda specie sussite il teorema di permutabilità di Bianchi, giacchè esso sussiste per le trasformazioni delle reti O dello spazio a quattro dimenzioni.

Sur les zéros de certaines fonctions;

Par A. ANGELESCO.

Dans ce travail, nous nous proposons de démontrer une proposition générale, en ce qui concerne les zéros de certaines fonctions continues. Nous utiliserons cette proposition pour déterminer une classe de fonctions biorthogonales, et ensuite nous indiquerons des exemples et des applications.

1. Soit $\varphi(x, \lambda)$ une fonction de x et du paramètre λ satisfaisant aux conditions suivantes :

Toute équation en x de la forme

$$\varphi(x, \lambda_0) + A_1\varphi(x, \lambda_1) + \ldots + A_s\varphi(x, \lambda_s) = 0, \tag{1}$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_s$ sont des constantes et les nombres de la suite

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad \ldots \tag{2}$$

étant tous différents et compris dans un intervalle (α, β), ne peut avoir plus de s racines dans un intervalle (a, b); et de plus, si l'équation (1) a s racines distinctes dans cet intervalle, son premier membre change de signe quand x passe par la valeur d'une de ces racines.

Nous appellerons ces conditions *les conditions* L.

Il résulte, en particulier, de ces conditions, que l'équation

$$\varphi(x, \lambda_0) = 0$$

n'a aucune racine dans l'intervalle (a, b).

Désignons alors par $K(x)$ une fonction positive pour x dans l'intervalle (a, b) et démontrons que :

Si une fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle (a, b), satisfait aux n conditions

$$(3) \qquad \int_a^b K(x)\,\varphi(x, \lambda_i)\,f(x)\,dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

l'équation $f(x) = 0$ a au moins n racines réelles et distinctes dans l'intervalle (a, b) (¹).

En effet, $\varphi(x, \lambda_0)$ gardant un signe constant dans l'intervalle d'intégration, il résulte de la condition (3), pour $i = 0$, que $f(x)$ change de signe dans l'intervalle (a, b); $f(x)$ a donc une racine que nous désignons par r_1. Déterminons alors la constante C de manière que l'équation

$$\varphi(x, \lambda_0) + C\varphi(x, \lambda_1) = 0$$

ait pour racine r_1. Comme

$$\int_a^b K(x)\,[\varphi(x, \lambda_0) + C\varphi(x, \lambda_1)]\,f(x)\,dx = 0,$$

il résulte des conditions L que $f(x)$ doit changer de signe au voisinage d'une autre racine r_2. De proche en proche, on établit la proposition énoncée (²).

2. Considérons l'équation intégrale de première espèce

$$\int_a^b K(x)\,\varphi(x, y)\,X(x)\,dx = \Phi(y),$$

la fonction $\varphi(x, y)$ satisfaisant aux conditions L. Il résulte de notre proposition que, si la fonction $\Phi(y)$ a n zéros dans l'intervalle (α, β), la fonction $X(x)$ aura au moins n zéros dans l'intervalle (a, b).

3. *Fonctions biorthogonales.* — Soit $\psi(x, \mu)$ une autre fonction

---

(¹) Nous avons démontré cette proposition quand $\varphi(x, \lambda) = x^\lambda$ dans une Note des *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 273.

(²) Le principe de cette démonstration est le même que celui employé par Legendre pour prouver la réalité des racines de ses polynomes.

satisfaisant aux conditions L pour x dans le même intervalle (a, b) et pour les valeurs distinctes

$$\mu_0, \quad \mu_1, \quad \ldots, \quad \mu_n, \quad \ldots$$

du paramètre μ.

On peut déterminer les n constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et d'une seule manière, telles que si

$$(4) \qquad P_n = \psi(x, \mu_n) + a_1\psi(x, \mu_{n-1}) + \ldots + a_n\psi(x, \mu_0)$$

on ait

$$(5) \qquad \int_a^b K(x)\varphi(x, \lambda_i) P_n dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

En effet, il ne peut y avoir indétermination, en ce qui concerne la détermination des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$; car si l'on avait deux fonctions de la forme (4) satisfaisant aux conditions (5), on déduirait qu'une fonction de la forme

$$R = C_1\psi(x, \mu_{n-1}) + C_2\psi(x, \mu_{n-2}) + \ldots + C_n\psi(x, \mu_0)$$

y satisfait aussi. Donc, d'après notre proposition, l'équation $R = 0$ aurait n racines dans l'intervalle (a, b), ce qui est impossible d'après les conditions L.

Déterminons de même la fonction de la forme

$$Q_n = \varphi(x, \lambda_n) + b_1\varphi(x, \lambda_{n-1}) + \ldots + b_n\varphi(x, \lambda_0)$$

par les n conditions

$$\int_a^b K(x)\psi(x, \mu_i) Q_n dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

On voit alors immédiatement que

$$\int_a^b K(x) P_m Q_n dx = 0$$

si m est différent de n et que l'intégrale

$$\int_a^b K(x) P_m Q_m dx$$

est différente de zéro.

Exemples des fonctions satisfaisant aux conditions L.

4. *Premier exemple.* — Soit $\varphi(x)$ une fonction continue, positive et monotone pour x dans l'intervalle (a, b). Alors la fonction

$$[\varphi(x)]^{\lambda}$$

satisfait aux conditions L, quel que soit l'intervalle (α, β).

En effet, l'équation (1) est dans ce cas de la forme

$$[\varphi(x)]^{\lambda_0} + A_1[\varphi(x)]^{\lambda_1} + \ldots + A_s[\varphi(x)]^{\lambda_s} = 0$$

et devient, en posant $\varphi(x) = u$,

$$u^{\lambda_0} + A_1 u^{\lambda_1} + \ldots + A_s u^{\lambda_s} = 0.$$

Mais cette dernière équation ne peut avoir plus de s racines positives et, si elle a s racines positives distinctes, son premier membre change de signe quand x traverse une racine. On le voit pour $s = 1$. Supposons-le pour $s = p$ et démontrons-le pour $s = p + 1$.

En divisant le premier membre de l'équation considérée $\mathcal{E}$ (l'équation précédente où $s = p + 1$) par $u^{\lambda_{p+1}}$ et en dérivant ensuite, on obtient une équation $\mathcal{E}'$ qui ne peut avoir que p racines positives, donc $\mathcal{E}$ ne peut avoir tout au plus que $p + 1$ racines positives. Si $\mathcal{E}$ a $p + 1$ racines positives distinctes, son premier membre change de signe quand x traverse une de ces racines; car si, pour la racine r, il n'y avait pas de changement de signe, le premier membre de $\mathcal{E}$ est un maximum ou un minimum pour $x = r$, et par conséquent $\mathcal{E}'$ devrait avoir $p + 1$ racines positives, ce qui est impossible.

5. *Deuxième exemple.* — Soit

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

une série entière en x dans laquelle tous les coefficients sont positifs ou nuls, a_0 étant différent de zéro. Soit R le rayon de convergence de cette série. Nous prendrons $a \geqq 0$ et $b > 0$; pour l'intervalle (α, β), l'intervalle $\left(0, \frac{R}{b}\right)$.

Dans ces conditions, la fonction $\varphi(\lambda x)$ satisfait aux conditions L. En effet, les équations de la forme

$$\varphi(\lambda_0 x) + A_1 \varphi(\lambda_1 x) + \ldots + A_s \varphi(\lambda_s x) = 0 \tag{6}$$

ont été étudiées par Laguerre [1] et il résulte de son étude que l'équation (6) a au plus s racines positives. Si cette équation a s racines positives distinctes, comme son premier membre est une série entière en x, on a les mêmes changements de signes que pour un polynome qui admet le nombre maximum de racines positives distinctes.

Remarque. — La fonction simple $(\lambda - x)^t$, où t est un nombre négatif, satisfait aux conditions L pour x positif et inférieur à un nombre l, l'intervalle (α, β) étant l'intervalle $(l, l+m)$, m étant un nombre positif. On le voit en posant $\lambda = \frac{1}{\mu}$; on est ainsi ramené aux fonctions précédentes.

On voit de même que la fonction $(x+\lambda)^m$ satisfait aux conditions L, pour m entier positif, x et λ étant positifs.

6. *Applications.* — Soient l'intégrale

$$I(y) = \int_0^1 x^{y-1} A(x)\, dx,$$

où $y > 0$, et

$$A(x) = a_0 x^{\lambda_0} + a_1 x^{\lambda_1} + \ldots + a_n x^{\lambda_n},$$

les nombres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ étant tous positifs. On voit immédiatement que

$$I(y) = \frac{a_0}{y+\lambda_0} + \frac{a_1}{y+\lambda_1} + \ldots + \frac{a_n}{y+\lambda_n},$$

d'où la proposition suivante :

Les nombres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ étant tous positifs, si l'équation

$$\frac{a_0}{x+\lambda_0} + \frac{a_1}{x+\lambda_1} + \ldots + \frac{a_n}{x+\lambda_n} = 0$$

---

[1] *Œuvres*, t. I, p. 26.

a p racines positives distinctes, l'équation

$$a_0 x^{\lambda_0} + a_1 x^{\lambda_1} + \ldots + a_n x^{\lambda_n} = 0$$

aura au moins p racines distinctes dans l'intervalle (0, 1).

7. Partons de l'intégrale

$$I(y) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} x^y A(x)\, dx,$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $y > 0$ et

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Le terme contenant a_i dans $I(y)$ est

$$a_i \frac{\Gamma(\alpha + y + i)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + y + i + 1)},$$

donc

$$I(y) = \frac{\Gamma(\alpha + y)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + y)} \left[\sum_{i=0}^{i=n} a_i \frac{(\alpha + y)(\alpha + y + 1)\ldots(\alpha + y + i - 1)}{(\alpha + \beta + y)(\alpha + \beta + y + 1)\ldots(\alpha + \beta + y + i)} \right].$$

Par suite, la proposition suivante :

α et β étant deux nombres positifs, si l'équation

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i \frac{(x + \alpha)(x + \alpha + 1)\ldots(x + \alpha + i - 1)}{(x + \alpha + \beta)(x + \alpha + \beta + 1)\ldots(x + \alpha + \beta + i)} = 0$$

a p racines positives distinctes, l'équation

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

aura au moins p racines distinctes dans l'intervalle (0, 1).

8. Considérons l'intégrale

$$(7) \qquad I(y) = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{k}} x^{y-1} A(x)\, dx,$$

où $y > 0$, k un nombre positif et

$$A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n.$$

Changeons dans l'intégrale (7) x en kx. Alors, à l'aide de l'intégrale qui définit la fonction Γ, on trouve

$$I(y) = k^y \Gamma(y) \left[\sum_{i=0}^{i=n} k^i \alpha_i y(y+1)\ldots(y+i-1) \right].$$

Et par suite :

k étant un nombre positif, si l'équation

$$k^n \alpha_n x(x+1)\ldots(x+n-1) + k^{n-1} \alpha_{n-1} x(x+1)\ldots(x+n-2) + \ldots + \alpha_0 = 0$$

a p racines positives distinctes, l'équation

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n = 0$$

aura au moins p racines positives distinctes.

9. Considérons encore l'intégrale

$$(8) \qquad I(x) = \int_a^b k(u)(x-u)^n f(u)\,du,$$

où $b > a$, $k(u)$ restant positif dans l'intervalle d'intégration et $f(u)$ étant une fonction continue dans l'intervalle (a, b), n étant un entier positif. Démontrons que :

Si l'équation $I(x) = 0$ a p racines réelles et distinctes toutes supérieures à b, ou toutes inférieures à a, la fonction $f(u)$ aura p zéros dans l'intervalle (a, b) (¹).

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_p$ les p racines de $I(x) = 0$ supposées toutes supérieures à b. Faisons dans l'intégrale (8) le changement $u = b - v$; on aura alors

$$I(x) = \int_0^{b-a} k(b-v)(x-b+v)^n f(b-v)\,dv.$$

En posant $\lambda_i = r_i - b$, il résulte que

$$\int_0^{b-a} k(b-v)(\lambda_i + v)^n f(b-v)\,dv = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

(¹) Nous avons démontré une proposition analogue dans les *Comptes rendus*, t. **172**, 1921, p. 1153.

Mais $b - a > 0$ et les nombres λ_i sont tous positifs. Nous avons vu (*remarque*, n° 5) que, dans ces conditions, la fonction $(v + \lambda)^n$ satisfait, dans l'intervalle d'intégration, aux conditions L.

Par suite, $f(b - v)$ a n zéros dans l'intervalle $(0, b - a)$. Donc notre proposition est démontrée dans le cas des racines toutes supérieures à b.

Pour le cas des racines $r_1, r_2, \ldots, r_p$ toutes inférieures à a, la démonstration se fait de même, en faisant le changement $u = a + v$.

10. *Exemple de fonctions biorthogonales.* — Proposons-nous de déterminer le polynome P_n

$$(9) \qquad P_n = \frac{x^n}{n!} + A_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + A_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + A_n$$

par les n conditions

$$(10) \qquad \int_0^\infty e^{-kx} P_n \, dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

En tenant compte que

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^p \, dx = \left(\frac{1}{k}\right)^{p+1} p!,$$

les n conditions (10) nous conduisent aux n relations

$$(11) \qquad \left(\frac{1}{k}\right)^{n+1} + A_1 \left(\frac{1}{k}\right)^n + A_2 \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} + \ldots + A_n \frac{1}{k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

On aura donc

$$(12) \qquad x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = (x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdots \left(x - \frac{1}{n}\right),$$

d'où les valeurs des coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$. On trouve ainsi :

$$P_1 = x - 1,$$

$$P_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} x + \frac{1}{2},$$

$$P_3 = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{12} + x - \frac{1}{6},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cherchons une relation entre deux polynomes consécutifs P_n et P_{n+1}. En multipliant la relation (12) par $\left(x - \frac{1}{n+1}\right)$, on déduit que

$$P_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \left(A_1 - \frac{1}{n+1}\right)\frac{x^n}{n!}$$
$$+ \left(A_2 - \frac{1}{n+1}A_1\right)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \left(-\frac{A_n}{n+1}\right),$$

de sorte que

$$P_{n+1} = \int_0^x P_n\,dx - \frac{P_n}{n+1}.$$

Le polynome P_n peut être représenté à l'aide d'un déterminant que l'on déduit des relations (9) et (11). Indiquons une expression par intégrale de ce polynome. Écrivons, pour cela, la relation (9) sous la forme

$$P_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z}\left[\left(\frac{x}{z}\right)^n + A_1\left(\frac{x}{z}\right)^{n-1} + \ldots + A_n\right]dz,$$

l'intégrale étant prise suivant un cercle C entourant l'origine.

Si nous posons

$$\Pi_n(x) = (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdots\left(x - \frac{1}{n}\right),$$

il résulte que

$$P_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z}\Pi_n\left(\frac{x}{z}\right)dz.$$

Déterminons à présent une fonction de la forme

$$(13)\qquad Q_n = B_0 e^{-x} + B_1 e^{-2x} + \ldots + B_n e^{-(n+1)x}$$

par les n conditions

$$(14)\qquad \int_0^\infty x^i Q_n\,dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Il résulte de ce que nous avons vu antérieurement que ces conditions déterminent la fonction Q_n, à un facteur constant près. Mais il est facile de voir que l'on satisfait aux conditions (14) en prenant

$$(15)\qquad Q_n = (-1)^n \frac{d^{n+1}(1-e^{-x})^{n+1}}{dx^{n+1}},$$

et cette expression est bien de la forme (13), car

$$(-1)^n \frac{d^{n+1}(1-e^{-x})^{n+1}}{dx^{n+1}} = C_{n+1}^1 e^{-x} - 2^{n+1} C_{n+1}^2 e^{-2x} + \ldots \pm (n+1)^{n+1} e^{-(n+1)x}.$$

Alors, avec la valeur (15) de Q_n,

$$\int_0^\infty P_m Q_n \, dx = 0$$

si m est différent de n.

L'intégrale

$$I = \int_0^\infty P_m Q_m \, dx,$$

qui se réduit à

$$I = \int_0^\infty \frac{x^m}{m!} Q_m \, dx,$$

d'après les conditions (14), se calcule immédiatement en remplaçant Q_m par son expression (15) et l'on trouve $I = 1$.

Comme application, on vérifie sans difficulté que l'on a

$$e^{-x} = \sum \frac{(-1)^n}{n+2} P_n,$$

où $P_0 = 1$.

TABLE DES MATIÈRES.

TOME II.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

Pages.

[**D 3-5**] Differential Properties of Functions of a Complex Variable which are Invariant under Linear Transformations; by *E. J. Wilczynski* 1

[**J 5**] Sur un ensemble non mesurable B; par *Nicolas Lusin* et *Waclaw Sierpinski* 53

[**I**] Recherche des systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour N premier (ou puissance de nombre premier) de la forme $6n+1$; par *S. Bays* 73

[**O 7**] Contribution à la Géométrie conforme, cercles et surfaces cerclées; par *E. Vessiot* 99

[**Q 1**] Sur un théorème fondamental de M. H. Weye; par *E. Cartan*. 167

[**H 12b**] Remarques diverses sur le calcul aux différences finies; par *N.-E. Nörlund* 193

[**Q 2**] Sur les principes fondamentaux de la théorie des contacts dans l'Hypergéométrie réelle ou imaginaire et sur les familles complètes de figures intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre; par *Ch. Riquier* 215

Pages.

[I22c] A new simple Theory of Hypercomplex Integers; by *L. E. Dickson* 281

[D3] Theory of non-analytic Functions of a complex Variable; by *E. R. Hedrick*, *Louis Ingold* and *W. D. A. Westfall* 327

[H11] Sur l'itération analytique et les substitutions permutables (premier Mémoire); par *M. P. Fatou* 343

[O5] Sulle transformazioni delle reti cicliche; *di Pasquale Calapso* 385

[D6] Sur les zéros de certaines fonctions; par *A. Angelesco* 403

FIN DU TOME II.

69060 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

QA
1
J684
sér.9
t.1-2
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

105
✓
95/105/34 205/53 | 160